

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

2° SEMESTRE



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali."

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 1 luglio 1894.

Matematica. — *Sopra alcune trasformazioni delle equazioni della dinamica del punto.* Nota del dott. MICHELE LEONCINI, presentata dal Socio BIANCHI.

« Le trasformazioni delle equazioni della dinamica studiate da Appell⁽¹⁾, e dal Dautheville⁽²⁾ nel caso di un punto mobile su di una superficie, non richiedono nessuna condizione per le forze agenti, oltre quella di dipendere solamente dalle coordinate del mobile.

« Sotto qualche altra ipotesi, di natura molto generale, sulle dette forze, esistono altre trasformazioni che qui mi propongo di considerare.

« Limitandomi al moto di un punto su di una superficie esamino due casi:

1° Quello in cui le forze ammettono un potenziale;

2° Quello in cui esse sono centrali.

« 1. Consideriamo prima il caso particolare di un punto che si muove in un piano, e siano

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad (1)$$

(1) American Journal of Mat. Vol. XII, N. 1, Crell^a Jour. 1892.

(2) Ann. de l'Éc. norm. sup. T. VII, N. 12, 1890.

le equazioni corrispondenti, con XY funzioni di xy soltanto. Esse, quando vi si operi la trasformazione:

$$x_1 = \varphi(xy) \quad Y_1 = \psi(xy) \quad dt_1 = \lambda(xy) dt \quad (2)$$

diventano:

$$\frac{d^2 x_1}{dt_1^2} = X_1 \quad \frac{d^2 y_1}{dt_1^2} = Y_1 \quad (3)$$

dove

$$X_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \quad (4)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y} Y \right]$$

e l'espressione corrispondente per Y_1 si ottiene mutando φ in ψ .

* Volendo che le X_1, Y_1 risultino, qualunque siano le X, Y , funzioni delle sole xy , bisogna nelle (4) annullare i coefficienti di $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \dots$, e questo porta, come ha mostrato Appell, ad una trasformazione omografica.

* Se però ci limitiamo a considerare forze XY a potenziale U , le (1) ammetteranno l'integrale primo:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = 2U$$

(la costante arb. inclusa in U) in forza del quale le (4) si potranno scrivere:

$$X_1 = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \right\} + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) U +$$

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

e l'analoga per Y_1 . Di qui si vede, che X_1, Y_1 verranno a dipendere solo dalle x_1, y_1 quando si prendano φ, ψ, λ in modo che venga:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 0$$

e le analoghe per ψ .

* Segue da queste, che si può scrivere:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda u \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lambda v \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \lambda u_1 \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \lambda v_1,$$

se con $u + iv, u_1 + iv_1$ si indicano due funzioni monogene della variabile complessa $x + iy$.

* Eliminando φ e ψ si hanno due relazioni in $\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y}$, che risolte danno:

$$\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{u \frac{\partial v_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial v}{\partial x}}{v u_1 - v_1 u} \quad \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{v_1 \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial u_1}{\partial y}}{v u_1 - v_1 u}.$$

« Se in queste facciamo $u_1 = v$ $v_1 = -u$, i secondi membri diventano integrabili, e si ha a meno di un fattore costante:

$$\lambda = \frac{1}{u^2 + v^2} \quad (5)$$

e quindi

$$x_1 = \varphi(xy) = \int \frac{u dx + v dy}{u^2 + v^2} \quad y_1 = \psi(xy) = \int \frac{v dx - u dy}{u^2 + v^2} \quad (6)$$

Se 5) 6) ci danno una trasformazione dipendente da una funzione arbitraria. Si verifica facilmente che anche le forze $X_1 Y_1$ ammettono un potenziale U_1 , cioè si ha:

$$X_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad Y_1 = \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \quad U_1 = (x^2 + y^2) U.$$

« 2. Passiamo ora al moto su di una superficie qualunque S. Scelto su di essa un sistema di linee coordinate u, v , sia

$$(1) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

il quadrato del suo elemento lineare. L'equazioni del moto di un punto su S si possono scrivere:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = R_1 \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = R_2 \end{cases}$$

dove $\left\{ \begin{matrix} r s \\ t \end{matrix} \right\}$ rappresentano i noti simboli di Christoffel calcolati con E F G, ed

$$(3) \quad R_1 = \frac{GQ_1 - FQ_2}{EG - F^2} \quad R_2 = \frac{-FQ_1 + EQ_2}{EG - F^2}$$

se $Q_1 Q_2$ sono le componenti secondo $u v$ delle forze agenti nel punto.

« Si voglia ora far corrispondere ad ogni moto del punto di S un moto di un punto su di un'altra superficie S_1 . Prese su S_1 le linee corrispondenti alle $u v$ di S, e che chiameremo anche $u v$, sia (4) $ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2$ la forma dell'elemento lineare di S_1 .

« Mediante la trasformazione $dt_1 = \lambda(uv) dt$ (A) le (2) si cambiano nelle altre:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt_1^2} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \left(\frac{du}{dt_1} \right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dv}{dt_1} \right)^2 = \frac{R_1}{\lambda^2} \\ \frac{d^2 v}{dt_1^2} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{du}{dt_1} \right)^2 + 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt_1} \right)^2 = \frac{R_2}{\lambda^2} \end{cases}$$

« Interpretiamo queste equazioni come quelle del moto del punto di S_1 , e t_1 come rappresentante il tempo. Se si indicano con $\left\{ \begin{matrix} r s \\ i \end{matrix} \right\}_1$ i simboli di

Christoffel relativi alla forma (4) e con T_1, T_2 le quantità analoghe ad R_1, R_2 avremo:

$$T_1 = \frac{R_1}{\lambda^2} + \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) \left(\frac{du}{dt_1} \right)^2 + 2 \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1} + \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \left(\frac{dv}{dt_1} \right)^2$$

$$T_2 = \frac{R_2}{\lambda^2} + \left(\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right) \left(\frac{du}{dt_1} \right)^2 + 2 \left(\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) \frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1} + \left(\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) \left(\frac{dv}{dt_1} \right)^2$$

« Se si vuole, che qualunque siano le forze Q_1, Q_2 , purchè funzioni delle sole uv , le forze agenti sul punto di S_1 , e quindi anche T_1, T_2 , non vengano a dipendere dalle derivate $\frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1}$, si hanno i risultati ottenuti dal Dautheville.

« Supponiamo che le forze Q_1, Q_2 ammettano un potenziale P , talchè:

$$Q_1 = \frac{\partial P}{\partial u} \quad Q_2 = \frac{\partial P}{\partial v}$$

Le equazioni (2) allora ammetteranno l'integrale della forza viva:

$$E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = 2P$$

(intendendo al solito la costante arbitraria inclusa in P), a cui corrisponderà, nel moto trasformato, l'integrale:

$$(B) \quad E \left(\frac{du}{dt_1} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1} + G \left(\frac{dv}{dt_1} \right)^2 = \frac{2P}{\lambda^2}.$$

« Se ora vogliamo, che qualunque sia P le T_1, T_2 non vengano a dipendere dalle derivate $\frac{du}{dt_1} \frac{dv}{dt_1}$, sarà necessario e sufficiente, in forza dell'integrale trovato, che si abbiano le relazioni:

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = mE, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = mF, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = mG$$

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = nE, \quad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = nF, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = nG$$

con m, n fattori di proporzionalità qualunque.

« Per integrare queste relazioni procediamo nel modo seguente:

« Le due forme $ds^2 ds_1^2$, essendo definite positive, si potranno mediante un cambiamento simultaneo di variabili ridurre a mancare dei termini in $du dv$.

« Supposto che ciò sia stato già fatto, le equazioni precedenti si scrivono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2E_1} \frac{\partial E_1}{\partial u} - \frac{1}{2E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = mE, \quad \frac{1}{E_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \quad -\frac{1}{2E_1} \frac{\partial G_1}{\partial u} + \frac{1}{2E} \frac{\partial G}{\partial u} = mG \\ -\frac{1}{2G_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} + \frac{1}{2G} \frac{\partial E}{\partial v} = nE, \quad \frac{1}{G_1} \frac{\partial G_1}{\partial u} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0, \quad \frac{1}{2G_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} - \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = nG \end{array} \right.$$

La seconda e la quarta si integrano immediatamente, e danno:

$$(C) \quad E_1 = E \lambda U \quad G_1 = G \lambda V$$

dove UV indicano due funzioni arbitrarie della sola u e v rispettivamente.

« Eliminando le indeterminate $m n$ fra le altre quattro equazioni, si hanno le due:

$$\begin{cases} \frac{1}{E_1} \frac{\partial E_1}{\partial u} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{E}{E_1} \frac{\partial G_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{1}{G_1} \frac{\partial G_1}{\partial v} - \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{E} \frac{G}{G_1} \frac{\partial E_1}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

le quali, in forza delle precedenti (C) si possono scrivere:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{U'}{V - U} = 0 \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{V'}{V - U} = 0$$

« Derivando la prima di queste equazioni rispetto a v , la seconda rispetto ad u , e sottraendo si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{G}{E} = 0,$$

da cui si ricava, che le linee uv formano un sistema isotermo sulla superficie S . Indicando allora con $U_1 V_1$ due nuove funzioni qualunque, la prima della sola u , la seconda della sola v , e con μ una funzione qualunque di u, v , potremo porre $E = \mu U_1$, $G = \mu V_1$, per cui la (1) diviene

$$(1a) \quad ds^2 = \mu (U_1 du^2 + V_1 dv^2).$$

« Dopo questa posizione, le due equazioni precedenti si integrano immediatamente e danno:

$$\lambda = \frac{V - U}{\mu} \quad (5)$$

Sostituendo questi valori di $E G \lambda$ nelle espressioni di $E_1 G_1$, la (4) assumerà la forma

$$(4a) \quad ds_1^2 = (V - U) (U_1 U du^2 + V_1 V dv^2);$$

cioè « l'elemento lineare della superficie S_2 assumerà la forma di Liouville ». Viceversa è chiaro, che quando gli elementi lineari di S ed S_1 hanno rispettivamente le forme (1a) e (4a) e λ ha la forma data dalla (5), la trasformazione (A) gode della proprietà richiesta.

« Dunque possiamo dire: Se ad ogni movimento su S di un punto soggetto a forze che ammettono un potenziale vogliamo far corrispondere un movimento su S_1 di un punto sotto l'azione di forze dipendenti solo dalla sua posizione, è necessario e sufficiente, che dei due sistemi ortogonali di linee che si corrispondono sulle due superficie, quello della S sia isotermo, quello della S_1 abbia la forma di Liouville, e precisamente siano nella relazione di (1a) e (4a).

« Nel caso particolare che sia $\mu = U_2 - V_2$ e $U = \frac{1}{U_2} V = \frac{1}{V_2}$, le due forme diventano

$$ds^2 = (U_2 - V_2) (U du^2 + V dv^2) \quad ds_1^2 = \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{U_2} \right) \left(\frac{U_1 du^2}{U_2} + \frac{V_1 dv^2}{V_2} \right)$$

e le due superficie SS_1 sono riferite geodeticamente l'una all'altra. Allora è noto (Dautheville), che ad ogni movimento su S sotto l'azione di forze qualunque dipendenti da uv soltanto, corrisponde, su S_1 un movimento della medesima natura. Se con K_1 K_2 indichiamo le componenti secondo uv della forza agente sul punto mobile di S_1 , avremo

$$K_1 = E_1 T_1 + F_1 T_2 \quad K_2 = F_1 T_1 + G_1 T_2.$$

« Sostituendo i valori trovati di E_1 G_1 ($F_1 = 0$) e calcolando $T_1 T_2$, servendosi della relazione (B) si trova dopo qualche riduzione:

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial u} \left(P \mu \frac{U}{V - U} \right) \quad K_2 = \frac{\partial}{\partial v} \left(P \mu \frac{V}{V - U} \right).$$

« Volendo che anche le forze K_1 K_2 ammettano un potenziale, sarà necessario e sufficiente che $P\mu$ sia della forma $U_3 - V_3$ con U_3 funzione della sola u , V_3 della sola v , cioè il potenziale delle forze Q_1 Q_2 sia della forma:

$$P = \frac{U_3 - V_3}{\mu},$$

ed allora il potenziale delle forze K_1 K_2 sarà

$$P_1 = \frac{U_3 U - V_3 V}{V - U}.$$

« 3. Facciamo ora la seconda delle ipotesi enunciate, cioè passiamo al caso in cui le forze X Y agenti sul punto mobile siano centrali. Riprendiamo le formole (1) (2) (3) (4) del n. 1 del moto di un punto in un piano. Nella detta ipotesi, le equazioni (1) ammetteranno l'integrale delle aree:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = \alpha = \text{cost.}$$

e quindi fra le quantità $\left(\frac{dx}{dt} \right)^2$, $\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt}$, $\left(\frac{dy}{dt} \right)^2$ passerà la relazione:

$$y^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 2xy \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + x^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \alpha^2.$$

« Allora è chiaro, che, affinchè le quantità X_1 Y_1 vengano a dipendere solamente da x_1 y_1 , sarà necessario e sufficiente scegliere φ ψ λ in modo che sia:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) : \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) : \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = y^2 : -2xy : x^2$$

e le analoghe per ψ .

« Una di queste equazioni si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

da cui $\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y \lambda}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 \frac{\partial z}{\partial x}$, dove z indica una funzione qualunque di xy .

« Sostituendo questi valori nell'altra equazione, si ha per z la relazione:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

che si integra facilmente col metodo delle caratteristiche ⁽¹⁾.

« Il suo integrale generale è: $z = \frac{1}{x} f\left(\frac{y}{x}\right) + f_1\left(\frac{y}{x}\right)$ con f, f_1 funzioni arbitrarie.

« Sostituendo questo valore di z nelle espressioni di $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ si ha

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^2 f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x} f_1'\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\lambda \left\{ f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + y f_1'\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \end{cases}$$

« Facciamo un cangiamento provvisorio di variabili, ponendo:

$$x = \xi \quad y = \xi \eta;$$

ne viene:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = -\lambda \eta f(\eta) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\lambda \xi \left\{ f(\eta) + \eta f'(\eta) + \eta \xi f_1'(\eta) \right\}$$

da cui eliminando φ per mezzo della relazione: $\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, si ha:

$$a) \quad \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \xi \left\{ f + \eta f' + \xi \eta f_1' \right\} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \eta f = -\xi \eta f_1'$$

« Formole perfettamente analoghe si hanno per ψ . Indicando con p, p_1 due funzioni arbitrarie di $\frac{y}{x}$, si può scrivere:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \lambda \left\{ \left(\frac{y}{x}\right)^2 p'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x} p_1'\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\lambda \left\{ p\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} p'\left(\frac{y}{x}\right) + y p_1'\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \end{cases}$$

(1) Darboux, *Leçons* ecc. t. III, p. 264.

e nelle variabili $\xi\eta$ si ha la condizione di integrabilità:

$$(b) \quad \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} \xi \left\{ p + \eta p' + \xi \eta p'_1 \right\} - \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \eta p = - \xi \eta p'_1$$

Dalla a) b) si ricava

$$\frac{\partial \log \sqrt{\lambda}}{\partial \xi} = - \frac{p f'_1 - f p'_1}{p f - f p' + \xi (p f'_1 - f p'_1)}$$

ed integrando

$$\sqrt{\lambda} = \frac{F(\eta)}{p f' - f p' + \xi (p f'_1 - f p'_1)}$$

con F funzione incognita.

« Ricavendo da questa espressione il valore di $\frac{1}{2\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \eta}$ e sostituendolo in (a) e (b) si ha la relazione:

$$\begin{aligned} \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} \{ p f' - f p' + \xi (p f'_1 - f p'_1) \} \eta - \{ p f'' - f p'' + \xi (p f'_1 - f p'_1)' \} \eta = \\ = \xi (f p'_1 - p f'_1) + \eta \xi (f' p'_1 - p' f'_1), \end{aligned}$$

la quale è di 1° grado in ξ e si scinde nelle altre:

$$\frac{F'}{F} (p f' - f p') = p f'' - f p'', \text{ che dà } F(\eta) = a (p f' - p' f)$$

con a fattore costante e

$$\frac{p f'' - f p''}{p f' - f p'} - \frac{p f'_1'' - f p'_1''}{p f'_1 - f p'_1} + \frac{1}{\eta} = 0.$$

A questa relazione devono soddisfare le 4 funzioni f, f_1, p, p_1 di η .

« Se in essa facciamo $p'_1 = f'_1$, diviene immediatamente integrabile, e dà:
 $p'_1 = f'_1 = b \eta (p f' - p' f)$ con b fattore costante.

Fatto questo, si ha subito il valore di λ

$$\lambda = \frac{a^2}{\{ 1 + b \xi \eta (p - f) \}^2} = \frac{a^2}{\{ 1 + b \eta (p - f) \}^2} \quad (3)$$

Allora le (2) diventano integrabili, e danno dopo qualche riduzione;

$$\varphi = \frac{1}{b(p-f)} \left\{ \frac{a^2 f}{1 + b \eta (p-f)} - p \right\} \quad (4)$$

Analogamente

$$\psi = \frac{1}{b(p-f)} \left\{ \frac{a^2 p}{1 + b \eta (p-f)} - f \right\} \quad (5)$$

« Le formole (3) (4) (5) danno una trasformazione, che gode delle proprietà richieste, e che dipende da due funzioni arbitrarie.

« Troviamo ora le componenti X_1, Y_1 della forza agente sul punto nel moto trasformato. Le forze XY sono centrali; supposto il centro nella origine delle coordinate, possiamo porre

$$X = Fx \quad Y = Fy,$$

e si avrà tenendo conto delle formole trovate

$$X_1 = \frac{1}{a^2} \{ 1 + by(p-f) \}^2 \left\{ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{y}{x} \right) + b \frac{y}{x^2} (pf' - p'f) \right) - Fyf \left(\frac{y}{x} \right) \right\}$$

$$Y_1 = \frac{1}{a^2} \{ 1 + by(p-f) \}^2 \left\{ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2} p' \left(\frac{y}{x} \right) + b \frac{y}{x^2} (pf' - p'f) \right) - Fyp \left(\frac{y}{x} \right) \right\}$$

« Si potrebbe ancora vedere in qual caso anche queste forze saranno centrali ».

Matematica. — *Sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia.* Nota di A. DEL RE, presentata dal Socio CREMONA.

« In questa 3^a Nota sulla superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia, io mi propongo di aggiungere, a quelle già sviluppate in due Note precedenti ⁽¹⁾, altre proprietà. Queste riguardano la costruzione della superficie, in cinque diversi modi, col mezzo di forme proiettive; la formazione di cinque connessi punto-piano (1, 2) di ciascuno dei quali si presenta come superficie fondamentale; la formazione, in due modi diversi, dell'equazione della superficie, e la ricerca degli invarianti assoluti proiettivi. In ultimo indico la costruzione delle omografie che cangiano l'una nell'altra due superficie siffatte, quando è soddisfatta l'uguaglianza fra detti invarianti.

« Siccome, per non fare inutili ripetizioni, mi occorre spesso di citare formole, e risultati, già stabiliti nelle suddette Note, indicherò queste rispettivamente con NI, NII.

§ I.

« 1. I cinque connessi punto-piano (1, 2) a cui ho fatto cenno al principio del § VI (n. 16) della NII, e di ciascuno dei quali la superficie può essere riguardata come fondamentale, si ottengono nel modo seguente, dal quale abbiamo anche altri modi di costruzione della superficie per forme proiettive.

« Fissiamo una qualunque delle 5 distinte reti di quadriche, di cui si è discorso al n. 13, NII, e sia, p. es., la $\lambda f^{(i)} + \mu \varphi^{(i)} + r\psi = 0$ ivi considerata. Le quadriche polari delle rette m di A_i rispetto al fascio $\lambda f^{(i)} + \mu \varphi^{(i)} = 0$ formano una rete particolare, la cui base si compone della polare b_i rispetto a questo fascio, e dei 4 punti A_h, A_l, A_m, A_n . Le quadriche di questa rete, e le rette m , sono fra loro riferite proiettivamente, ed i punti M, M' , fuori

(1) Cfr. questi Rend. vol. II, 2° sem., serie 5^a, fasc. 4 e 5.

di A_i , nei quali m incontra ulteriormente la superficie, sono tali che i loro piani polari rispetto a $\psi = 0$ sono tangenti alla quadrica corrispondente della m . Cosicchè, mutando, per polarità rispetto a $\psi = 0$, la rete ora considerata, quella quadrica si muterà in un'altra della rete tangenziale ottenuta dalla trasformazione, la quale avrà comuni con m precisamente i punti M , M' . Fra m e questa quadrica vi sarà frattanto corrispondenza proiettiva, e noi quindi possiamo enunciare il risultato seguente, il quale, come dicevamo, fornisce nuovi modi di costruzione della superficie, cioè:

« Vi sono 5 modi diversi di produrre la superficie come luogo delle intersezioni delle rette di una stella, col centro in un punto triplo, e le quadriche di una rete tangenziale la cui base è formata dalle facce del tetraedro dei rimanenti punti tripli, e della retta b della superficie.

« Fra le quadriche di questa rete vi sono le 4 coppie di punti costituite da un vertice del tetraedro dei piani a cui esse sono tangenti, e dal punto in cui b taglia la faccia opposta. Fra le rette della stella proiettiva, vi sono poi le 4 rette che proiettano i vertici di quel tetraedro, e che corrispondono ordinatamente a quelle quadriche. Siccome una corrispondenza proiettiva fra due forme di 2^a specie, è individuata dal dare 4 coppie di elementi corrispondenti, così si ricava di nuovo i 5 punti tripli e la retta b individuano la superficie (cfr. N I, n. 5).

« 2. Formiamo le equazioni delle 5 corrispondenze proiettive suddette; e, per semplicità, riferiamoci alle (2) e (3) della N I. I punti di una retta per ξ_i saranno dati, quando s'indichino con $\tau_1: \tau_2: \tau_3$ due parametri variabili con la retta, e con σ un parametro variabile con un punto di questa, dalle formule:

$$z_1 = \sigma \xi_1 + \tau_1, \quad z_2 = \sigma \xi_2 + \tau_2, \quad z_3 = \sigma \xi_3 + \tau_3, \quad z_4 = \sigma \xi_4 \quad (1)$$

perciò, il piano polare di ognuno di questi punti, rispetto alla (2) cit., avrà per equazione

$$\lambda (\sigma f_{\xi x} + f_{\tau x}) + \mu (\sigma g_{\xi x} + g_{\tau x}) = 0,$$

avendo posto:

$$g_{\xi x} = \sum_1^4 g_i \xi_i x_i, \quad g_{\tau x} = \sum_1^3 g_i \tau_i x_i \quad (g \equiv f, \varphi).$$

« Cosicchè dovrà essere, indipendentemente da σ :

$$\sigma f_{\xi x} + f_{\tau x} = 0, \quad \sigma g_{\xi x} + g_{\tau x} = 0,$$

e ciò richiede che si abbia:

$$f_{\xi x} g_{\tau x} - f_{\tau x} g_{\xi x} = 0. \quad (2)$$

« Se si osserva che

$$\begin{aligned} f_1 x_1 \cdot \varphi_{\xi x} - \varphi_1 x_1 \cdot f_{\xi x} &= (f\varphi)_{12} \cdot \xi_2 x_1 x_2 + (f\varphi)_{13} \cdot \xi_3 x_1 x_3 + (f\varphi)_{14} \cdot \xi_4 x_1 x_4 \\ f_3 x_2 \cdot \varphi_{\xi x} - \varphi_2 x_2 \cdot f_{\xi x} &= (f\varphi)_{21} \cdot \xi_1 x_1 x_2 + (f\varphi)_{23} \cdot \xi_3 x_2 x_3 + (f\varphi)_{24} \cdot \xi_4 x_2 x_4 \\ f_3 x_3 \cdot \varphi_{\xi x} - \varphi_3 x_3 \cdot f_{\xi x} &= (f\varphi)_{31} \cdot \xi_1 x_1 x_3 + (f\varphi)_{32} \cdot \xi_2 x_2 x_3 + (f\varphi)_{34} \cdot \xi_4 x_3 x_4 \end{aligned}$$

e si pone $(f\varphi)_{ik} = A_{ik}$ ($ik = 12, \dots, 34$) potremo scrivere la (2) nella forma

$$\begin{aligned} & \tau_1 \{ A_{12} \xi_2 \cdot x_1 x_2 - A_{31} \xi_3 \cdot x_1 x_3 + A_{14} \xi_4 \cdot x_1 x_4 \} \\ & + \tau_2 \{ -A_{12} \xi_1 \cdot x_1 x_2 + A_{23} \xi_3 \cdot x_2 x_3 + A_{24} \xi_4 \cdot x_2 x_4 \} \\ & + \tau_3 \{ A_{31} \xi_1 \cdot x_1 x_3 - A_{23} \xi_2 \cdot x_2 x_3 + A_{34} \xi_4 \cdot x_3 x_4 \} = 0 \end{aligned} \quad (2')$$

da cui segue che, mutando per polarità rispetto alla (3) cit., conformemente a quanto si è detto nel n. precedente, e ponendo:

$$\begin{aligned} \chi_1 \{ A_{12} \xi'_2 \cdot u_1 u_2 - A_{31} \xi'_3 \cdot u_1 u_3 + A_{14} \xi'_4 \cdot u_1 u_4 \} &= \Phi_1 \\ \chi_2 \{ -A_{12} \xi'_1 \cdot u_1 u_2 + A_{23} \xi'_3 \cdot u_2 u_3 + A_{24} \xi'_4 \cdot u_3 u_4 \} &= \Phi_2 \quad (\xi'_i = \chi_i \xi_i, i=1, \dots, 4) \\ \chi_3 \{ A_{31} \xi'_1 \cdot u_1 u_3 - A_{23} \xi'_2 \cdot u_2 u_3 + A_{34} \xi'_4 \cdot u_3 u_4 \} &= \Phi_3 \end{aligned}$$

si avrà l'equazione:

$$\tau_1 \Phi_1 + \tau_2 \Phi_2 + \tau_3 \Phi_3 = 0 \quad (3)$$

della rete tangenziale di quadriche che, insieme alla stella di rette (1), e corrispondentemente ai medesimi sistemi di valori dei parametri $\tau_1 : \tau_2 : \tau_3$, produce la superficie.

« 3. Poniamo ora:

$$\begin{aligned} \tau_1 \chi'_{12} A_{12} \xi_2 - \tau_2 \chi'_{12} A_{12} \xi_1 &= B_{12}, \quad -\tau_1 \chi'_{31} A_{31} \xi_3 + \tau_3 \chi'_{31} A_{31} \xi_1 = B_{31}, \\ \tau_2 \chi'_{23} A_{23} \xi_3 - \tau_3 \chi'_{23} A_{23} \xi_2 &= B_{23} \\ (\tau_1 \chi'_{14} A_{14}, \tau_2 \chi'_{24} A_{24}, \tau_3 \chi'_{34} A_{34}) \xi_4 &= B_{14}, B_{24}, B_{34} \quad (\chi'_{ik} = \chi_i \chi_k; ik=12, \dots, 34) \end{aligned}$$

avremo la (3) nella forma:

$$B_{12} \cdot u_1 u_2 + B_{23} \cdot u_2 u_3 + B_{31} \cdot u_3 u_1 + B_{14} \cdot u_1 u_4 + B_{24} \cdot u_2 u_4 + B_{34} \cdot u_3 u_4 = 0. \quad (4)$$

« Rimpiazziamo in questa i valori

$$\tau_1 = x_1 \xi_4 - x_4 \xi_1, \quad \tau_2 = x_2 \xi_4 - x_4 \xi_2, \quad \tau_3 = x_3 \xi_4 - x_4 \xi_3 \quad (u)$$

che si cavano dalle (1) dopo di che diciamo B'_{ik} ciò che diventa B_{ik} per tale sostituzione. Avremo l'equazione

$$\sum B'_{ik} u_i u_k = 0 \quad (i \neq k; i, k = 1, \dots, 4) \quad (5)$$

che è quella di un connesso punto-piano (1, 2) di cui la superficie è fondamentale. Noi abbiamo dunque così questo interessante risultato:

« La superficie è fondamentale per 5 diversi connessi punto-piano (1, 2) specializzati, le cui equazioni si possono ridurre tutte al tipo (5).

« Da questo risultato si cava che una forma dell'equazione della superficie è:

$$\begin{vmatrix} 0 & B'_{12} & B'_{31} & B'_{14} & x_1 \\ B'_{12} & 0 & B'_{23} & B'_{24} & x_2 \\ B'_{31} & B'_{23} & 0 & B'_{34} & x_3 \\ B'_{14} & B'_{24} & B'_{34} & 0 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

che può anche essere scritta nella forma

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12}p_{12} & A_{31}p_{31} & A_{14}p_{14} & x_1 \\ A_{12}p_{12} & 0 & A_{23}p_{23} & A_{24}p_{24} & x_2 \\ A_{31}p_{31} & A_{23}p_{23} & 0 & A_{24}p_{24} & x_3 \\ A_{14}p_{14} & A_{24}p_{24} & A_{31}p_{31} & 0 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

dove si è supposto $\chi_i = 1$ ($i = 1, \dots, 4$), il che è lecito (n. 13, N II), si sono indicate con p_{ik} le coordinate della retta che unisce il punto x_i della superficie al punto triplo ξ_i , e dove le costanti A_{ik} soddisfanno alla condizione

$$A_{12} A_{34} + A_{23} A_{14} + A_{31} A_{24} = 0.$$

« 4. È da osservarsi che questa 2^a forma dell'equazione della superficie si può cavare direttamente dalla (2') scrivendo dapprima tangenzialmente l'equazione del sistema di quadriche da queste rappresentate, poi ponendo al posto delle x_1, x_2, x_3 i valori (u), con che si cade sull'equazione di un connesso piano retta (2, 3) (1), e poi facendo le sostituzioni $x_i = u_i$ ($i = 1, \dots, 4$), ciò che concorda con quanto dicemmo più in generale nella Nota: « *Altre proprietà ecc.* » (questi Rend., nov. 1892).

§ II.

« 5. Cerchiamo ora gli invarianti assoluti della superficie, rispetto al gruppo lineare. Se dalla retta b proiettiamo i 5 punti tripli A_1, \dots, A_5 , avremo i 5 rapporti anarmonici

$$b(A_1 A_2 A_3 A_4), \quad b(A_1 A_2 A_3 A_5), \dots, b(A_2 A_3 A_4 A_5)$$

di cui due soltanto sono indipendenti, poichè detti ordinatamente $\lambda_5, \lambda_4, \dots, \lambda_1$ si hanno le note relazioni:

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_5 = \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_1 = \lambda_4 \lambda_5 + \lambda_2 = \lambda_5 \lambda_1 + \lambda_3 = 1.$$

« Ora, dato il pentagono dei punti tripli, due qualunque di questi rapporti anarmonici non fissano la retta b ma assicurano soltanto che questa è fra le corde di una certa cubica φ circoscritta a quel pentagono. Per fissare b occorre dunque dare i suoi punti di appoggio su questa cubica, cioè due altri rapporti anarmonici se la cubica è doppia per la superficie, ed uno soltanto se è cuspidale. Ne concludiamo che la superficie ha 4 o 3 invarianti assoluti secondo che la cubica φ è per essa doppia o cuspidale.

« Possiamo trovare sul piano rappresentativo (cfr. NI, § II) che cosa valgono questi invarianti assoluti. Per i due ultimi rapporti anarmonici sunnominati

(1) Questo connesso è quello che ci ha condotti alle formule (1) della N I, e quindi anche uno dei 5 di cui è parola ai n. 13 e 16 della N II.

si possono prendere quelli che i punti di appoggio della b sulla φ fanno con 3 dei 5 punti tripli. Ora la φ è rappresentata dai punti delle rette e, f e queste, insieme ai lati del pentalatero 12...5 che rappresentano i punti tripli, sono tangenti ad una stessa conica, la \mathcal{A} . Ne segue che dei rapporti anarmonici sunnominati, due sono quelli, indipendenti, del pentalatero 12...5 e gli altri sono quelli delle rette e, f con 3 dei lati di esso. Si vede così che corrispondentemente alle trasformazioni lineari che mutano il sistema rappresentativo di una superficie S , come quella che stiamo studiando, nel sistema rappresentativo di un'altra tale superficie S' , quando è soddisfatta l'uguaglianza fra il numero ed il valore degli invarianti assoluti, si hanno trasformazioni lineari di S in S' . Cerchiamo ora direttamente queste trasformazioni.

« 6. Diciamo A_i, A'_i ($i=1, \dots, 5$) i rispettivi punti tripli di S, S' ; b, b' le rette fuori di essi punti; φ, φ' le cubiche doppie; H_i, H'_i ($i=1, 2$) i punti $b.\varphi, b'.\varphi'$. Queste cubiche sono individuate dai primi due degli invarianti assoluti relativi a ciascuna superficie, e di cui si è discusso al n. precedente, perchè ciascuna si presenta come linea focale del sistema di rette (1, 3) ulteriore sezione di due complessi tetraedrali i cui tetraedri fondamentali hanno in comune tre vertici; perciò, in qualunque modo, ma con riguardo alla genesi di φ, φ' omograficamente, si passi dal pentagono $A_1...A_5$ al pentagono $A'_1...A'_5$, allo stesso modo si passerà dalla cubica φ alla cubica φ' . — Ora, si supponga che l'uguaglianza degli invarianti assoluti segua così che si abbia:

$$b(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) \overline{\wedge} b'(A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A'_5)$$

$$(A_i A_k A_l H_p) = (A'_i A'_k A'_l H'_p) \quad (p=1, 2)$$

sulle cubiche φ, φ' si avranno le serie proiettive

$$A_1 A_2...A_5 H_1 H_2 \overline{\wedge} A'_1 A'_2...A'_5 H'_1 H'_2$$

epperò l'omografia spaziale

$$\Omega \equiv \frac{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5}{A'_1 A'_2 A'_3 A'_4 A'_5}$$

farà corrispondere al punto H_p il punto H'_p ($p=1, 2$); cosicchè muterà anche b in b' . Se ne conclude, in virtù di quanto si disse nel numero 5 della NI, ed in fine del prec. n.º 1, che Ω muta S in S' , e quindi, il risultato seguente:

« L'uguaglianza degli invarianti assoluti indipendenti delle superficie S, S' porta seco l'esistenza, in generale, di un'omografia che cangia S in S' . Ed in particolare:

« La superficie che stiamo studiando non ammette, in generale, trasformazioni lineari in sè, diverse dall'identità.

« 7. Per giustificare l'*in generale* con cui abbiamo creduto accompagnare gli enunciati precedenti, supponiamo, p. es., che su φ sia H_1 l'armonico di A_3 ed H_2 l'armonico di A_4 rispetto ad $A_1 A_2$; allora evidentemente sarà:

$$\Omega_1 \equiv \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & A_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2 & H_1 \end{pmatrix}$$

un'omografia che cangia S in sè stessa; e sarà perciò allora $\Omega_1 \Omega$ un'altra omografia, diversa dalla Ω , che cangia S in S' ».

Elettricità. — *Sulla determinazione delle costanti dielettriche col mezzo delle oscillazioni rapide* ⁽¹⁾. Nota del dott. ADOLFO CAMPETTI, presentata dal Corrispondente NACCARI.

1. Allorquando, adottando la disposizione di Lecher, si siano determinati i nodi delle oscillazioni elettriche che si propagano lungo i fili secondari, si osserva facilmente che qualunque cambiamento, sia della capacità, sia dell'autoinduzione del primario o del secondario porta con sè un cambiamento nel sistema delle onde, cambiamento che si rende manifesto collo spostamento dei nodi. A questo proposito si hanno, fra le altre, esperienze di Cohn ed Heerwagen ⁽²⁾, Salvioni ⁽³⁾, Ebert e Wiedemann ⁽⁴⁾.

« Approfitando di tali fenomeni, ho pensato che si potrebbero facilmente determinare o confrontare la capacità di dati condensatori in queste condizioni, ed avere quindi un metodo abbastanza semplice di determinare costanti dielettriche per durate di carica così brevi. Ma prima di occuparmi di tale argomento credo opportuno di far vedere come ci si possa render conto dello spostamento dei nodi prodotto dall'inserire una capacità in un punto qualunque del secondario. A tale scopo basterà, come in caso analogo ha fatto anche il Salvioni, partire dai due postulati richiamati e giustificati dal Cohn ed Heerwagen (l. c.) e cioè: a) *L'energia dei due sistemi (fili e condensatore) ha una somma indipendente dal tempo*; b) *La differenza di potenziale tra le estremità dei fili attaccati al condensatore è uguale alla differenza di potenziale tra le lastre del condensatore*; ed applicare poi al nostro sistema le espressioni date dagli autori per la differenza di potenziale

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Università di Torino.

(2) Cohn e Heerwagen, Wied. 43, 1891.

(3) Salvioni, Rendiconti dei Lincei 1892.

(4) Ebert und Wiedemann, Wied. Ann. 48, 1893.

tra due punti affacciati dai fili e per la energia elettrica e magnetica del sistema. Queste sono

$$\Phi = 2B \log \frac{b}{a} \sin nt \sin mz \quad \text{con } m = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$W = \frac{B^2}{4} \log \frac{b}{a} \sin \frac{2mz}{m} \cos^2 nt + A \quad n = \frac{2\pi}{T}$$

ove B è costante, A indipendente dal tempo t , z la lunghezza contata sul filo, b la distanza, a il raggio di fili secondari, λ e T la lunghezza d'onda e la durata d'oscillazione (completa). — Nel nostro caso si ponga il condensatore di capacità C alla distanza x dell'ultimo nodo di un sistema, il qual nodo disti di l dall'estremo dei fili; e sia d la distanza (fissa) del condensatore da questo estremo: l'equazione da verificare sarà

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} C \Phi^2(x) + W(l) \right\} = 0$$

la quale, poichè in ogni caso $l = n + d$, ci dà

$$(\alpha) \quad C \log \frac{b}{a} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\lambda}{8\pi} \sin \frac{4\pi(x+d)}{\lambda}$$

che fornisce per ogni valor di C una relazione tra x e λ .

« Questa relazione è assai complicata ; solo quando C sia abbastanza piccolo, λ abbastanza grande e si prenda pure d assai grande, si potrà dire che, aumentando C , il nodo si avvicinerà al condensatore. Ammettendo per semplicità di ragionamento che si tratti di un nodo unico nel secondario, si potrà dire che l'inserire una capacità tra i fili corrisponde ad aumentare la loro lunghezza di guisa che la prima parte del sistema (cioè palline dall'eccitatore, fili adduttori, lastre primarie, lastre secondarie coi fili sino al nodo) che secondo le idee di Cohn, Herwagen e Salvioni è in risonanza colla parte rimanente del secondario, deve, per mantenere questa risonanza, aumentare la sua lunghezza d'onda e quindi ha luogo uno spostamento del nodo, finchè il compenso sia stabilito.

« In modo analogo al precedente si potrebbe esaminare l'influenza di un condensatore sopra un nodo successivo: ma nelle esperienze eseguite non si è fatto uso della formula (α) e si è proceduto un po' diversamente come vedremo poi.

« Prima però diciamo qualche cosa sullo scopo del presente lavoro.

« È noto che la teoria elettromagnetica della luce porta come conseguenza alla relazione $n^2 = d$ fra il quadrato dell'indice di rifrazione e la costante dielettrica di un dato mezzo; e si sa pure che tale relazione non è verificata se non per gli isolanti più perfetti, quando per n si prenda l'indice ottico e per d il valore calcolato coi metodi usuali. Dopo le esperienze di Hertz vari sperimentatori cercarono di determinare l'indice di rifrazione di varie sostanze

per i raggi elettrici: e, senza parlare dei metodi adoperati, ricorderò che così è stato trovato da Ellinger ⁽¹⁾ $n = 4,9$ per l'alcool a 96% e $n = 8,7$ per l'acqua; da Rubens ⁽²⁾ $n = 2,05$ (olio di ricino); $n = 1,71$ (olio di oliva); $n = 1,49$ (petrolio); da Cohn ⁽³⁾ $n = 8,50$ per l'acqua: da U. Yule ⁽⁴⁾ infine $n = 8,33$ per l'acqua, $n = 5,17$ per l'alcool a 95%. Ora, è vero che facendo il quadrato dell'indice di rifrazione ottenuto per es. per l'acqua e l'alcool, si ottengono numeri non molto distanti dalla costante dielettrica determinata con lente oscillazioni, ma quando si noti che per es.: Lecher ⁽⁵⁾ ha trovato che per alcune sostanze, come vetro, petrolio, la costante dielettrica aumenta crescendo il numero delle alternazioni, si vede come una completa verificaione della $n^2 = \epsilon$ sia ancora molto dubbia: e per conseguenza non mi è parso inutile di tentare di determinare direttamente, anche per liquidi poco isolanti, la costante dielettrica a mezzo delle oscillazioni Hertziane; tanto più che finora non si hanno che alcune misure di I. I. Thomson per il vetro, lo zolfo e l'ebanite, di Lecher per il vetro e il petrolio, e di Blondot ancora per il vetro. Quanto all'acqua, le esperienze di Lecher devono essere state affette da una causa di errore, perchè egli trova per la costante dielettrica dell'acqua un valore infinito.

« Nelle mie esperienze i liquidi sottoposti ad esperienza sono stati; petrolio comune, benzolo, olio di oliva, alcool iso-butilico, alcool metilico, alcool etilico ed acqua, non che alcune soluzioni di acido cloridrico nell'acqua e negli alcool.

« 2. La disposizione delle mie esperienze per quel che riguarda il primario e il secondario era quella di Lecher: le lastre erano di zinco di 40 centimetri di lato: i fili secondari del diametro di 1^{mm},4 partendo dal centro delle lastre secondarie si piegavano fino a raggiungere dopo 30 centimetri la distanza di cent. 31,5 che mantenevauo poi per tutta la lunghezza rimanente (cent. 455). Alle estremità dei fili si trovavano due piccole bottiglie di Leida, costituite da due tubetti di vetro ricoperti di stagnola; l'armatura interna essendo costituita dal filo stesso; le armature esterne erano in comunicazione l'una con una coppia di quadranti, l'altra coll'altra coppia di quadranti e coll'ago di un elettrometro Edelman situato a qualche metro di distanza. Quando un ponte mobile scorrevole sui fili si trovava in un nodo, si aveva all'elettrometro un massimo di deviazione; e la determinazione di questo massimo si poteva fare con molta esattezza. In tali condizioni e per una distanza delle lastre di 16 centimetri si avevano ben distinti quattro nodi alle distanze 15, 125, 264, 364. Inserendo un condensatore alla distanza 100 (cioè dopo il

(1) Ellinger, Wied. Ann. 45 e 46, 1892.

(2) Arons e Rubens, Wied. Ann. 42, 1891.

(3) Cohn, Wied. Ann. 45, 1892.

(4) U. Yule, Phil. Mag. 1893, e Wied. Ann. 1893.

(5) Lecher, Wied. Ann. 1891, 42.

primo nodo che è isolato nel secondario e cui corrisponderebbe una lunghezza d'onda $\lambda = 1760$) si avevano spostamenti del nodo verso il condensatore e cioè

capacità	nodo
1,83	17
2,60	19

come la teoria faceva prevedere. Nelle misure eseguite si trovò più opportuno di appendere alle estremità dei fili due lastre di zinco di 150 centimetri quadrati: in tal modo il sistema di onde si cambiava (i nodi apparivano a 7, 145, 275, 366) in modo che all'elettrometro si avevano deviazioni maggiori.

« Per eseguire il confronto delle capacità si procedette così. Si inseriva tra due punti opposti dei fili (per es. alla distanza 100) un condensatore formato da due dischi di ottone perfettamente piani, dei quali si poteva variare a piacere la distanza: la capacità di questo condensatore si calcolava colla formula di Kirchhoff (Ges. Abh. pag. 112)

$$C = \frac{r^2}{4e} + \frac{r}{4\pi} \left\{ -1 + \log \left[\frac{16\pi(e+d)r}{e^2} \right] + \frac{d}{e} \log \frac{e+d}{d} \right\}$$

ove r è il raggio del disco, d il suo spessore, ed e la distanza dei due dischi. La tavola seguente contiene nella prima linea le capacità calcolate, nella seconda le posizioni del secondo nodo: si scelse questo a preferenza degli altri perchè il massimo appariva più marcato.

0	8,9	15,9	24,9	32,9	39,0	65,2	88,8	119,5
145	138	133	131	128	124	115	110,5	105,5

« Nello stesso punto del secondario si inserisce allora un condensatore costituito da due cilindri di vetro sottile ad assi coincidenti, ricoperti per una certa porzione della loro superficie laterale (esterna per il maggiore, interna per il minore) di stagnola: si determinava poi la posizione del nodo quando lo spazio compreso fra i condensatori era vuoto o ripieno del liquido in esame. Di qui si avevano le capacità nei due casi e quindi la costante dielettrica. Il primo condensatore aveva le seguenti dimensioni:

Diametro del cilindro esterno di stagnola 9,21. Distanza delle armature 1,28.
Diametro del cilindro interno di stagnola 6,65.

Parte occupata dal vetro 0,24. Idem dall'aria 1,04.

« Siccome tra le due armature la parte occupata dal vetro è piccola di fronte alla distanza loro, è facile vedere come si possa introdurre la correzione dovuta alla presenza del vetro tra le armature stesse, prendendo 3 per sua costante dielettrica, ed osservando che una differenza anche notevole nel valore di questa costante non porterebbe nel valore finale della costante dielettrica d del liquido che un errore dell'ordine di quelli dell'esperienza, finchè si tratti di liquidi a costante dielettrica bassa.

« *Petrolio*. Densità a 18°: 0,801. Temperatura di ebollizione tra 165° e 175°.

1^a Esp. Capacità del condensatore vuoto $C_1 = 26,2$ — Capacità del condensatore ripieno di petrolio . . . $C_2 = 49,1$. Di qui si deduce

$$d = 2,03.$$

2^a Esp. $C_1 = 27,4$ $C_2 = 50,7$ onde $d = 1,98$.

« Come media si ha dunque $d = 2,01$.

« *Benzolo*.

1^a Esp. $C_1 = 25$ $C_2 = 53,5$ onde $d = 2,33$.

2^a Esp. $C_1 = 26,2$ $C_2 = 55$ onde $d = 2,29$.

« In media dunque $d = 2,31$.

« *Olio di oliva*. Densità 0,915 a 18°.

1^a Esp. $C_1 = 24,9$ $C_2 = 64$ onde $d = 2,84$

2^a Esp. $C_1 = 24,9$ $C_2 = 65$ onde $d = 2,97$.

« In media quindi $d = 2,91$.

« 3. Per le altre sostanze di costante dielettrica maggiore la capacità di questo condensatore sarebbe troppo grande: ne costruisco per ciò tre altri dello stesso tipo, ma col cilindro interno più piccolo; e, per evitare l'errore dovuto ai bordi delle armature, al disopra e al disotto di queste attacco un'altra striscia di stagnola a poca distanza (3 millimetri). La capacità di questi condensatori vuoti non può dedursi con sufficiente esattezza dello spostamento del nodo; ma si calcola dalla formula data per questo caso da J. J. Thomson (1) e cioè

$$C = \frac{l}{2 \log \frac{r_2}{r_1}} \left\{ 1 + \frac{b}{l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arccotang} \frac{b}{2(r_2 - r_1)} + \frac{2(r_2 - r_1)}{\pi b} \log \left(1 + \frac{b^2}{4(r_2 - r_1)^2} \right) + \frac{r_2 - r_1}{4r_1} \right] \right\}$$

ove r_1 e r_2 sono i raggi dei cilindri esterno ed interno, l l'altezza per cui sono rivestiti di stagnola, b la distanza dell'armatura dalle striscie superiore e inferiore.

« Le capacità di ciascuno dei tre condensatori che chiamerò I, II, III risultano allora $c_1 = 5,26$ $c_2 = 1,83$ $c_3 = 0,682$. In questi condensatori la distanza delle armature (sempre qualche centimetro) era molto grande rispetto allo spessore totale del vetro (cent. 0,18): perciò la correzione da introdurre nei vari casi è sempre molto piccola.

« *Alcool isobutilico*. Densità a 0° riferita all'acqua a 0°: 0,8200. Lossen trova nelle stesse condizioni la densità compresa fra 0,816 e 0,818.

(1) J. J. Thomson, Philosoph. Trans. 181. 1890.

« Per maggiore sicurezza ed anche come riprova dei risultati precedenti, la determinazione si fa in due modi: 1°. Confrontando la capacità del condensatore pieno di alcool con quella calcolata per il condensatore vuoto. 2°. Confrontando la prima di dette capacità con quella che il condensatore stesso possiede quando sia ripieno di petrolio. Si ha così:

« Esperienze col condensatore I. Si ottiene col primo metodo $d = 20,3$: col secondo 19,8; media $d = 20,1$.

« Esperienze col condensatore II. Si ottiene col primo metodo $d = 18,9$: col secondo $d = 19,6$; media $d = 19,3$.

« Quindi media definitiva $d = 19,7$.

« *Alcool etilico*. Qui le misure si fanno confrontando al solito la capacità del condensatore pieno di alcool etilico con quella del condensatore vuoto o con quella del condensatore stesso pieno di alcool isobutilico. L'alcool adoperato è a 97 %.

« Condensatore II. Si ottengono per la costante dielettrica i due valori $d = 25$; $d = 24,4$ in media 25,0.

« Condensatore III. Si ottiene confrontando colla capacità del condensatore vuoto $d = 24,6$; quindi come media finale $d = 24,8$.

« *Alcool metilico*. Distillato sopra solfato di rame assume la densità 0,800 a 18°; sarebbe dunque a 97,5% circa.

« Condensatore II. Si ottengono per la costante dielettrica i due valori 31,9 e 30,5 onde in media $d = 31,2$.

« *Acqua distillata*. Condensatore III. Confrontando la capacità del condensatore pieno di acqua con quella del condensatore vuoto si ottiene come costante dielettrica dell'acqua $d = 69,4$; confrontando invece colla capacità del condensatore pieno di alcool metilico si ottengono in due esperienze i valori $d = 73,6$ $d = 70,8$. In media si ha dunque per l'acqua $d = 71,3$.

4°. Dai risultati sopra riferiti apparisce intanto come questo metodo possa servire bene, quando si vogliano determinare costanti dielettriche con durate di carica molto brevi; le differenze, per altro non troppo grandi, fra i valori trovati nelle diverse esperienze per i liquidi di costante dielettrica più elevata, sono in parte da attribuire a imperfetta costruzione dei miei condensatori, per cui da una esperienza all'altra si avevano leggeri spostamenti nella posizione relativa degli assi dei due cilindri.

« Non mi pare si possa parlare di una variazione della costante dielettrica colla durata di carica, salvo forse per l'acqua; basta a tal uopo confrontare i miei valori di d con quelli noti per altra via; ad ogni modo un aumento della costante dielettrica coll'aumentare il numero delle alternative (come apparirebbe dal citato lavoro di Lecher) mi pare si possa escludere. Quanto poi alla relazione $n^2 = d$, si può confrontare la tabella che segue, nella quale n rappresenta l'indice di rifrazione del mezzo per i raggi elettrici, (n^2) la media dei quadrati dei vari valori di n , d il valore della costante dielettrica

secondo le mie esperienze: i nomi degli sperimentatori cui sono dovuti i vari valori di n sono nell'ultima colonna.

	n	(n^2)	d	
Petrolio . . .	1,40	1,96	2,01	Arons e Rubens
Alcool etilico	5,17 4,9	25,4	24,8	Yule-Ellinger
	8,38 8,53			
Acqua	8,9	72,6	71,3	Yule-Cohn-Ellinger

« 5. Ho anche voluto determinare per alcuni dei liquidi studiati l'influenza che ha sulla costante dielettrica una data quantità di un elettrolito disciolto. Perciò ho disciolto acido cloridrico gassoso e secco negli alcool etilico, metilico, isobutilico e nell'acqua, e ho determinata la costante dielettrica di ciascuna soluzione rispetto a quella del liquido puro; da questa si ottiene poi la costante rispetto all'aria.

	Al. is. 1 ^a	Al. is. 2 ^a	Al. et.	Al. met.	Acqua 1 ^a	Acqua 2 ^a	Acqua 3 ^a
Contenuto di HCl per 1000 in peso	1,32	13,2	0,02	0,02	0,006	0,02	0,04
d	31,2	39,2	26,3	32,5	73,5	75,6	79,9

« Come si vede dunque, anche in questo caso una quantità di acido cloridrico che innalza molto la conducibilità del liquido, fa variare di poco la costante dielettrica. A questo proposito si vedano i lavori di Bouty (1) e quelli già citati di Cohn e U. Yule che hanno pure riconosciuto come piccole quantità di un elettrolito disciolto nell'acqua (solfato di zinco, cloruro di sodio) aumentino di poco l'indice di rifrazione del liquido pei raggi elettrici.

« Però è ben manifesto che l'influenza dell'elettrolito disciolto è ben diversa da un solvente all'altro; senza voler fare osservazioni quantitative ricordiamo solo che secondo Kablukoff (2) la conducibilità dell'acido cloridrico nell'alcool isobutilico è circa trenta volte più piccola di quella nell'alcool metilico e qualche centinaio di volte minore di quella nell'acqua.

« A questo proposito si confrontino questi risultati colle idee espresse da Nernst (*Dielektricitätskonstante und chemische Gleichgewicht*) (3).

(1) Bouty, Ann. de Ch. et de Phys. 27, 1892.

(2) Kablukoff, Zeit. für phys. Chemie, 1889, IV.

(3) Nernst, Zeit. für phys. Chemie, 1894, XIII.

« In conclusione: 1°. Ho mostrato che col metodo adoperato si possono determinare facilmente costanti dielettriche anche per liquidi poco isolanti e per brevi durate di carica ⁽¹⁾.

« 2°. La relazione $n^2 = d$ può ritenersi completamente verificata, quando n e d siano calcolati in condizioni analoghe.

« 3°. Anche per oscillazioni rapide la costante dielettrica di un dato liquido varia poco, quando, coll'aggiunta di una sostanza disciolta si aumenti, anche notevolmente, la sua conducibilità ».

Fisica. — *Ulteriori esperienze sopra un nuovo tipo d'igrometro.* Nota di G. AGAMENNONE e F. BONETTI, presentata dal Socio BLASERNA.

« Nel Rendiconto del 18 settembre 1892 ⁽²⁾ fu inserita una nostra Nota, nella quale descrivemmo un nuovo igrometro destinato a campionare gli ordinari igrometri di uso meteorologico. Riportammo nella detta Nota parecchie esperienze fatte da noi sul nostro apparecchio, le quali provavano che l'esattezza dei risultati ottenuti era soddisfacente per lo scopo prefisso. Solamente notammo che in quelle poche esperienze, nelle quali a bella posta ottenevamo per una stessa massa d'aria la precipitazione del vapore a due temperature successivamente più basse, presentavasi una rimarchevole anomalia, consistente in ciò che l'umidità assoluta cercata sembrava dipendere dalla temperatura di raffreddamento, e precisamente diminuiva coll'abbassarsi di questa, invece di risultare presso a poco la medesima, come ci aspettavamo.

« Nel confronto dell'aria umida, da studiare, coll'aria secca del recipiente sinistro R_1 , si poteva temere che l'anomalia dipendesse dal non essere quest'aria perfettamente secca. Infatti, finchè la temperatura di raffreddamento è tale che il residuo di vapore in R_1 resta abbastanza lontano dal punto di saturazione, l'aria in esso contenuta si comporta, per quanto riguarda il modo di funzionare del nostro apparecchio, sensibilmente come se fosse perfettamente secca. Quando invece la temperatura si abbassi sotto il punto di saturazione, o vi si avvicini di troppo, si comprende facilmente che deve prodursi un'anomalia precisamente nel senso osservato. Questo sospetto veniva

⁽¹⁾ Il confronto di due capacità colle oscillazioni elettriche potrebbe farsi in molti altri modi; per esempio: in un punto qualunque si divida in due ciascuno dei fili del secondario: si avranno così quattro fili, dei quali quelli provenienti da lastre opposte potranno essere riuniti alle estremità. Fra due punti opposti dei fili dopo la divisione in due non esisterà alcuna differenza di potenziale, sia lasciando le cose come si è detto, sia quando fra le coppie opposte siano inserite capacità uguali ecc.

⁽²⁾ Rendic. della R. Accademia dei Lincei. Vol. I^o, 2^o sem. 1892, serie 5^a, fasc. 6^o, pag. 216.

però tolto dal riflettere che se l'anomalia fosse stata veramente prodotta dalla causa accennata, non avrebbe dovuto osservarsi nel metodo di controllo, in cui si misurava di nuovo l'umidità della stessa massa d'aria confrontandola non più coll'aria secca, ma coll'aria satura contenuta nel recipiente destro R_3 . Ora la suddetta anomalia si osservava di fatto su per giù in egual misura anche con questo metodo di controllo.

« Abbiamo perciò creduto opportuno intraprendere nel R. Istituto fisico di Roma una nuova serie di esperienze col nostro apparecchio allo scopo di gettare, se fosse possibile, un po' di luce su tal fatto, ed avere nel tempo stesso occasione di provare nuovamente la bontà dell'apparecchio.

* * *

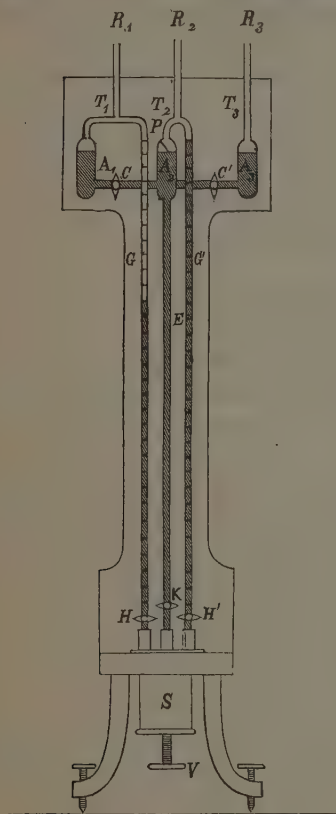
« Per questa nuova ricerca abbiamo sperimentato su masse d'aria sempre satura, e ciò tanto per poter fare il paragone tra i valori delle tensioni massime trovati da noi e quelli riportati nelle tavole d'uso, quanto perchè era da ritenersi che in questo caso il fenomeno da studiare sarebbe stato più accentuato. A questo scopo abbiamo saturata l'aria contenuta nei due recipienti sinistro e destro (R_1 , R_3) tenendovi dentro permanentemente una piccola quantità d'acqua. Invece il recipiente mediano R_2 nel corso di queste nuove esperienze è stato sempre tenuto pieno di aria secca ⁽¹⁾, e per maggior garanzia sempre in comunicazione coll'esterno attraverso un grosso recipiente con anidride fosforica ed un sistema di tubi essiccanti. Al contrario gli altri due recipienti R_1 ed R_3 stavano in comunicazione coll'esterno per mezzo di un recipiente con acqua.

« Con questa nuova disposizione dell'apparecchio il modo di sperimentare è il seguente. Al principio dell'esperienza il mercurio nel tubo graduato G ⁽²⁾ invece che allo zero, come per l'innanzi, si conduce ad un punto della graduazione più basso, tale che quando dopo il massimo raffreddamento si dovrà sollevare il mercurio per ristabilire l'affioramento alla punta, non abbia da oltrepassare lo zero. Il tubo G' si empie invece, come al solito, di mercurio fino allo zero della graduazione. Fatto questo, si chiudono i robinetti H ed H', e si aspetta che l'aria contenuta nei tre recipienti, e posta

(1) Nell'esperienze del 1892 era questo il recipiente destinato a racchiudere l'aria da studiare: ma in questa nuova serie d'esperienze non si poteva far lo stesso, perchè la forma speciale di detto recipiente, che si prolunga in basso con uno stretto tubo di comunicazione, non permetteva di lasciarvi dentro dell'acqua per assicurare la saturazione dell'aria.

(2) Queste lettere e le altre delle diverse parti del nostro apparecchio si riferiscono all'annessa figura, la medesima riportata nella Nota del 1892.

nel modo, che si è detto, in comunicazione coll'atmosfera, abbia raggiunto una temperatura costante, sia dovuta all'ambiente, sia prodotta artificialmente mediante un riscaldamento ⁽¹⁾. Si fa allora affiorare il mercurio alla punta P, e si chiude il robinetto K. Subito dopo si toglie la comunicazione



dei tre recipienti coll'aria esterna, e si chiude l'uno o l'altro dei robinetti C e C', secondo che si vuol far prima la misura confrontando il recipiente mediano o col destro o col sinistro.

« Quindi si ottiene un primo raffreddamento del bagno aggiungendovi acqua fredda; e dopo aver raggiunto per un tempo sufficiente la costanza della nuova temperatura, si procede col metodo, già indicato nella Nota precedente, alla misura della differenza di pressione tra l'aria secca del recipiente mediano e quella satura prima di uno, poi dell'altro dei due recipienti laterali. Si hanno così due distinte misure della tensione cercata del vapor acqueo, le quali si controllano a vicenda.

« Si passa in seguito a raffreddare ulteriormente il bagno, e dopo raggiunta una temperatura costante più bassa, si ripetono le misure come sopra.

« Siano :

V_1, V_2, V_3 le rispettive capacità a zero ⁽²⁾ dei recipienti R_1, R_2, R_3 .

⁽¹⁾ Questa temperatura vien misurata nel nostro apparecchio da tre termometri uguali che, attraversando il tappo di ciascun recipiente, penetrano nel suo interno, in modo che il bulbo viene a corrispondere a un dipresso al centro. Detti termometri sono a quinti di grado, ed hanno divisioni di tale lunghezza che il loro decimo può essere comodamente apprezzato: la scala va da -25° a $+30^\circ$. Furono confrontati al principio delle esperienze del 1892 con un buon termometro Tonnelot, di cui si aveva il campionamento recentemente fatto all'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure a Parigi, e prima di cominciare la nuova serie d'esperimenti ne fu riverificato lo zero. Tanto la temperatura iniziale del bagno, quanto quella dei successivi raffreddamenti, si è ottenuta prendendo la media delle letture sui tre termometri, che del resto sono andati sempre d'accordo fra loro entro pochi centesimi di grado.

⁽²⁾ S'intende che nell'assegnare il valore dei volumi V_1 e V_3 , si è tenuto conto di quella piccola quantità d'acqua che si è lasciata a bella posta nei due recipienti laterali per assicurare la saturazione dell'aria.

v_1, v_2, v_3 le rispettive capacità, pure a zero, dei piccoli spazi in cui l'aria rimane a temperatura ambiente tanto nei tubetti di comunicazione T_1, T_2, T_3 , quanto nella parte superiore dei tre rami A_1, A_2, A_3 , del manometro, al di sopra del mercurio. Nelle misure attuali il v_1 comprende anche il tratto di tubo graduato G dallo zero della graduazione, fino in giù alla divisione alla quale si arresta inizialmente il mercurio.

w', w'' i volumi totali delle divisioni di cui si alza o si abbassa rispettivamente il mercurio nei tubi G e G' .

T la temperatura iniziale dei recipienti al momento in cui si toglie la comunicazione coll'aria esterna.

t la temperatura dell'ambiente in questo stesso momento ⁽¹⁾.

t', t'' le temperature dell'ambiente nel momento in cui si fa la lettura rispettivamente nei tubi graduati G e G' .

θ', θ'' le temperature di raffreddamento quando si fa la misura col recipiente R_1 o coll'altro R_3 .

ψ', ψ'' le tensioni massime del vapore acqueo alle dette temperature θ', θ'' .

B la pressione barometrica ridotta a zero, corrispondente al momento in cui si toglie la comunicazione dei recipienti coll'atmosfera.

α il coefficiente di dilatazione dell'aria.

k il coefficiente di dilatazione cubica del vetro.

* La tensione del vapor acqueo, contenuto nell'aria dei due recipienti R_1 ed R_3 , sarà rispettivamente ⁽²⁾:

$$\begin{aligned}
 f' = B - B \frac{V_1 + \frac{v_1 - w'}{1 + k\theta'} \frac{1 + \alpha\theta'}{1 + \alpha t'}}{V_1 + \frac{v_1}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}} & \frac{V_2 + \frac{v_2}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}}{V_2 + \frac{v_2}{1 + k\theta'} \frac{1 + \alpha\theta'}{1 + \alpha t}} \\
 + \psi' \frac{V_1 + \frac{v_1 - w'}{1 + k\theta'} \frac{1 + \alpha\theta'}{1 + \alpha t'}}{V_1 + \frac{v_1}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}} & \frac{1 + k\theta'}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha\theta'} \\
 f'' = B - B \frac{V_3 + \frac{v_3}{1 + k\theta''} \frac{1 + \alpha\theta''}{1 + \alpha t''}}{V_3 + \frac{v_3}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}} & \frac{V_2 + \frac{v_2}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}}{V_2 + \frac{v_2 + w''}{1 + k\theta''} \frac{1 + \alpha\theta''}{1 + \alpha t''}} \\
 + \psi'' \frac{V_3 + \frac{v_3}{1 + k\theta''} \frac{1 + \alpha\theta''}{1 + \alpha t''}}{V_3 + \frac{v_3}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha t}} & \frac{1 + k\theta''}{1 + kT} \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha\theta''} .
 \end{aligned}$$

(1) Nella serie attuale d'esperienze la temperatura iniziale del bagno era il più delle volte superiore di parecchi gradi a quella dell'ambiente: quindi si è dovuto nelle formole tener conto di questa circostanza.

(2) Omettiamo per ristrettezza di spazi lo sviluppo di queste formole, d'altronde facili a stabilirsi, perchè modellate su quelle del termometro ad aria e simili.

« In queste formole ritenendo eguali all'unità alcuni fattori che nel risultato finale influirebbero appena sui centesimi di millimetro, si giunge alle seguenti:

$$f' = B - B \frac{V_1 + (v_1 - w') [1 + \alpha (\theta' - t')]}{V_1 + v_1 [1 + \alpha (T - t)]} \frac{V_2 + v_2 [1 + \alpha (T - t)]}{V_2 + v_2 [1 + \alpha (\theta' - t')]} \\ + \Psi' \frac{V_1 + (v_1 - w') [1 + \alpha (\theta' - t')]}{V_1 + v_1 [1 + \alpha (T - t)]} [1 + \alpha (T - \theta')]$$

$$f'' = B - B \frac{V_3 + v_3 [1 + \alpha (\theta'' - t'')]}{V_3 + v_3 [1 + \alpha (T - t)]} \frac{V_2 + v_2 [1 + \alpha (T - t)]}{V_2 + (v_2 + w'') [1 + \alpha (\theta'' - t'')]} \\ + \Psi'' \frac{V_3 + v_3 [1 + \alpha (\theta'' - t'')]}{V_3 + v_3 [1 + \alpha (T - t)]} [1 + \alpha (T - \theta'')].$$

« Ponendo in queste

$$p' = \frac{V_1 + (v_1 - w') [1 + \alpha (\theta' - t')]}{V_1 + v_1 [1 + \alpha (T - t)]} \quad q = V_2 + v_2 [1 + \alpha (T - t)]$$

$$p'' = \frac{V_3 + v_3 [1 + \alpha (\theta'' - t'')]}{V_3 + v_3 [1 + \alpha (T - t)]}$$

$$r' = V_2 + v_2 [1 + \alpha (\theta' - t')] \quad s' = 1 + \alpha (T - \theta')$$

$$r'' = V_2 + (v_2 + w'') [1 + \alpha (\theta'' - t'')] \quad s'' = 1 + \alpha (T - \theta''),$$

si ha

$$f' = B - \frac{B p' q}{r'} + \Psi' p' s'; \quad f'' = B - \frac{B p'' q}{r''} + \Psi'' p'' s''.$$

« Queste sono le formole di cui ci siamo serviti nei calcoli; ma facciamo notare che il termine p'' potrebbe anch'esso in pratica farsi eguale ad uno, beninteso quando la differenza fra T e θ'' non fosse eccessivamente grande.

« I risultati delle nostre esperienze sono contenuti nella tabella seguente, dove s' indica con Φ la tensione massima del vapor acqueo, corrispondente alla temperatura iniziale T , tratta dalle tavole di Landolt (1).

(1) Landolt e Börnstein, *Physikalisch-chemische Tabellen*. Berlin, 1883.

TABELLA I.

	T	T- $\theta^{(1)}$	$\Delta\theta$	f'	$\Delta f'$	f''	$\Delta f''$	$f''-f'$	$\Phi-f'$	$\Phi-f''$	$\Phi-\frac{f'+f''}{2}$
1893				mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
luglio 17	22.78	8.96	5.07	20.49	-0.48	20.44	-0.46	-0.05	+0.09	+0.14	+0.12
	"	14.03		20.01		19.98		-0.03	+0.57	+0.60	+0.58
7 dicem.	29.10	6.01	1.76	29.79	0.00	29.93	+0.15	+0.14	+0.13	-0.01	+0.06
	"	7.77		29.79		30.08		+0.29	+0.13	-0.16	-0.01
21 "	24.97	5.46	7.43	23.28	-0.15	23.04	+0.32	-0.24	+0.19	+0.43	+0.31
	"	12.89		23.13		23.36		+0.23	+0.34	+0.11	+0.22
1894											
11 genn.	19.63	4.92	4.15	16.74	0.00	16.90	0.00	+0.16	+0.20	+0.04	+0.12
	"	9.07		16.74		16.90		+0.16	+0.20	+0.04	+0.12
25 "	22.49	5.74	5.53	20.06		20.12		+0.06	+0.16	+0.10	+0.13
	"	11.27		19.99	-0.07	20.10	-0.02	+0.11	+0.23	+0.12	+0.17
3 febr.	19.72	8.44	11.23	16.83	-0.69	16.94	-0.75	+0.11	+0.23	+0.12	+0.17
	"	19.67		16.14		16.19		+0.05	+0.92	+0.87	+0.90
15 "	23.25	11.98	3.12	20.89	0.00	21.07	-0.09	+0.18	+0.28	+0.10	+0.19
	"	15.10		20.89		20.98		+0.09	+0.28	+0.19	+0.23
20 "	20.12	9.05	11.05	17.40	-0.27	17.50	-0.21	+0.10	+0.09	-0.01	+0.04
	"	20.10		17.13		17.29		+0.16	+0.36	+0.20	+0.28
15 marzo	19.81	8.77	11.03	17.06	-0.38	17.10	-0.38	+0.04	+0.10	+0.06	+0.08
	"	19.80		16.68		16.72		+0.04	+0.48	+0.44	+0.46
28 aprile	19.81	8.20	11.58	17.09	-0.76	17.17	-0.65	+0.08	+0.07	-0.01	+0.03
	"	19.78		16.33		16.52		+0.19	+0.83	+0.64	+0.74
						media		+0.09			

« Dalla precedente tabella apparisce in primo luogo come i valori di f' ed f'' siano molto ben concordanti fra loro, tenuto conto, s'intende, delle difficoltà inerenti in genere alle misure igrometriche. Il fatto però che i valori di f'' si mostrano quasi sempre di poco superiori a quelli di f' non sembra accidentale, e parrebbe dovuto a qualche causa di errore costante, sebbene assai piccolo, esistente nell'apparecchio. Ed infatti essendo i valori di f' ed f'' determinati con identico procedimento e calcolati con formole in cui le ψ' e ψ'' hanno sensibilmente lo stesso valore, non si può invocare qui la spiegazione

(1) In pratica tra i valori di θ' e θ'' non si è trovata differenza che da 1 a 3 centesimi di grado: quindi il θ che figura nella tabella è il valore medio dei due.

che si cercò di dare nelle esperienze del 1892 di una differenza analoga riscontrata fra le due serie di valori, ottenuti però con procedimenti e formole diverse.

« In secondo luogo risulta manifesto come in quell'esperienze, nelle quali da un primo raffreddamento si è passato ad un altro notevolmente maggiore, i valori della tensione cercata (tanto f' , quanto f''), invece di mantenersi sensibilmente costanti, risultano decisamente minori. Affine di porre meglio in evidenza questo fatto, trascriviamo qui sotto i valori di $\Delta f'$ e $\Delta f''$ tratti dalla precedente tabella, ordinati secondo i valori crescenti di $\Delta \theta$ e poi perequati affine di attenuare l'influenza degli errori accidentali.

TABELLA II.

$\Delta \theta$		$\Delta f'$	$\Delta f''$	$\frac{\Delta f' + \Delta f''}{2}$	
1.76	3.01	mm 0.00	mm +0.15	mm +0.07	mm +0.01
3.12		0.00	-0.09	-0.04	
4.15		0.00	0.00	0.00	
5.07	6.01	-0.48	-0.46	-0.47	-0.14
5.53		-0.07	-0.02	-0.04	
7.43		-0.15	+0.32	+0.08	
11.03	11.22	-0.38	-0.38	-0.38	-0.51
11.05		-0.27	-0.21	-0.24	
11.23		-0.69	-0.75	-0.72	
11.58		-0.76	-0.65	-0.70	

« Quindi le attuali esperienze confermano pienamente il fatto che, come si è detto in principio di questa Nota, fu già intraveduto nelle poche misure del 1892. Per togliere poi definitivamente il sospetto che ciò potesse dipendere dalla causa già indicata, vale a dire dall'influenza dell'umidità residua nel recipiente mediano, abbiamo rivolta speciale attenzione all'essiccamento del medesimo nella serie attuale di esperienze. Infatti, poco prima di ogni esperienza si rinnovava l'aria nel recipiente mediano aspirandola da un grosso serbatoio, dove aveva soggiornato da parecchi giorni in contatto coll'anidride fosforica ⁽¹⁾; di più, per andare fino allo scrupolo, fra un'esperienza e l'altra si è lasciato correre un lungo intervallo di tempo, allo scopo di potere nel frattempo reiteratamente essiccare l'aria ⁽²⁾.

(1) S'intende che l'aria era introdotta nel serbatoio, dopo averla già fatta passare attraverso una serie dei consueti tubi essiccanti.

(2) Per es. fra l'esperienza del 15 marzo e quella del 28 aprile 1894 si è essiccata l'aria per ben quindici volte, ad intervalli non minori mai di due giorni.

« Anche questo fatto si può connettere, a nostro parere, con quanto fu già detto nella prima Nota che cioè, secondo Regnault, *l'eccesso della tensione massima nel vuoto su quella dell'aria va crescendo sensibilmente colla temperatura*. Infatti il valore di f viene calcolato da noi in base ad una formola in cui entra la tensione massima ψ alla temperatura di raffreddamento, e questo valore di ψ è preso, come si è detto, dalle tavole, le quali ci danno le tensioni nel vuoto e non nell'aria, come si richiederebbe in igrometria. Ora il valore di ψ che s'introduce nella formola per il primo raffreddamento è superiore al vero: quindi anche il valore di f è troppo alto. Invece trattandosi del secondo raffreddamento, il valore di ψ , preso dalle tavole, è ancora superiore al vero ma in minor misura, secondo le osservazioni di Regnault, perchè si riferisce ad una temperatura più bassa; quindi in questo caso il valore di f , sebbene tuttora più alto del vero, gli si avvicina però di più in confronto del primo. Si capisce dunque che il valore di f , calcolato per il secondo raffreddamento, deve risultare minore, come realmente abbiamo trovato con le nostre misure.

« In questo senso va anche la differenza che abbiamo riscontrata tra i valori di f trovati da noi e i corrispondenti valori di Φ assegnati nelle tavole, come può vedersi dall'ultima colonna della tabella I^a. Notiamo però che i valori di f da noi calcolati sono già influenzati dalle tavole, in modo che se noi avessimo potuto introdurre nelle nostre formole le vere tensioni del vapor acqueo nell'aria, la differenza anzidetta si sarebbe accentuata ancora di più. Parrebbe dunque da tutto ciò che restasse confermata da queste recenti esperienze, anche più che dalle prime del 1892, l'anomalia intraveduta dal Regnault.

« Insistiamo pertanto sull'idea, già espressa da noi, che nelle misure igrometriche di precisione sarebbe desiderabile che si facesse uso delle tavole delle tensioni massime del vapor acqueo nell'aria, e non nel vuoto ».

Fisica terrestre. — *Intorno ad alcune obbiezioni relative alla velocità di propagazione delle onde sismiche.* Nota del dott. A. CANCANI, presentata dal Corrispondente TACCHINI.

« In una Nota presentata a questa R. Accademia nella seduta del 15 aprile scorso, il dott. Agamennone richiamando una mia pubblicazione ⁽¹⁾ in cui asserisco che da centri sismici lontani e profondi emanano due specie di ondulazioni di cui le une si propagano colla velocità di 2.2 a 2.5 km., le altre colla velocità di 4.5 a 5 km. a secondo, così si esprime: « Egli riporta « alcuni terremoti tra i più sicuri, nei quali riscontra la velocità propria

⁽¹⁾ *Sulle ondulazioni provenienti da centri sismici lontani*, Ann. dell'Uff. Cent. di Met. e Geod., serie 2^a, vol. XV, parte 1^a, 1893, Roma 1894.

« delle onde trasversali, quando si abbia a fare con distanze per lo meno
« al di sopra di 4 o 5 mila chilometri; mentre ottiene velocità notevolmente
« più grandi, per una minor lontananza. Stando a ciò, avremmo dovuto aspet-
« tarci un'alta velocità nei terremoti di Zante, sia perchè in essi la massima
« distanza considerata non ha ecceduto neppure due mila chilometri, sia perchè
« in qualche località, come Mineo e Catania, le onde sismiche si resero ve-
« ramente sensibili all'uomo. Ma la velocità di km. 2.4 risultata nei miei
« calcoli, parrebbe contraddire alle viste del Cancani, poichè essa corrisponde
« piuttosto a quella delle onde da lui chiamate trasversali. Ciò sembra com-
« provato anche dal fatto che le scosse furono indicate dal pendolo orizzon-
« tale di Nicolaiew e Strasburgo, strumento questo poco o nulla sensibile alle
« onde longitudinali ».

« Or bene, a me sembra che il risultato importante ottenuto dal mio collega nello studio della velocità di propagazione dei terremoti di Zante, studio che egli ha condotto colla più scrupolosa coscienza, non solo non contraddica alle mie viste, ma sia invece con esse in perfetta armonia. In fatti è vero che io ho dedotto la velocità di 2.5 km. per le onde trasversali provenienti da centri sismici lontani più di 4 o 5 mila chilometri, ma non ho mai asserito che queste onde trasversali e questa medesima velocità non possano aversi anche per distanze minori, anzi ho chiaramente ammesso che in tal caso si possano avere le une e l'altra; infatti a pag. 10 del lavoro citato così mi sono espresso: « Per gli altri cinque casi le distanze essendo state minori (di 3000 km.) sono giunte sugli apparecchi registratori *anche* le onde longitudinali, e non essendo stati capaci questi apparecchi a sceverare le une (trasversali) dalle altre (longitudinali) la velocità che se ne è ricavata non spetta nè alle onde trasversali nè alle onde longitudinali, ma è un valore intermedio. Negli ultimi quattro esempli della tabella, che si riferiscono al terremoto di Andalusia, e nei quali i dati orari sono eccellenti, si vede chiaramente come col diminuire la distanza, la velocità che si deduce va crescendo, appunto perchè col diminuire la distanza si fa *maggiormente* sentire sugli apparecchi l'effetto delle onde longitudinali ».

« Io ho dedotto la cifra di 2.5 km. dai soli casi di distanze estremamente grandi allo scopo di ottenere un risultato indiscutibile, per evitare cioè l'influenza degli errori nella determinazione del tempo, e per evitare la confusione dovuta alla sovrapposizione, nei diagrammi, delle due specie di onde, confusione che nei moderni apparecchi non ha più luogo.

« La velocità di 2.4 km. trovata dall'Agamennone spetta alle onde che io ho chiamato trasversali che hanno emanato da Zante e che si sono propagate fino nel cuore dell'Europa.

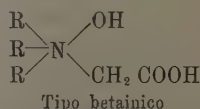
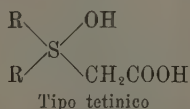
« Non fa punto meraviglia che in qualche località, come Mineo e Catania, le onde sismiche siano state avvertite dall'uomo. L'uomo ha avvertito le onde che io chiamo longitudinali, non quelle che io chiamo trasversali.

Le prime possono essere benissimo giunte alla distanza di 500 km. mentre le altre sono giunte alla distanza di più di 1700 km. Che la velocità di 2.4 km. calcolata dall'Agamennone corrisponda appunto alle onde che ho chiamato trasversali, è *comprovato anche dal fatto che le scosse furono indicate dal pendolo orizzontale di Nicolaiew e Strasburgo, strumento questo poco o nulla sensibile alle onde longitudinali*, ed i dati orari di queste stazioni furono appunto dall'Agamennone introdotti nel calcolo. Dunque il risultato importante ottenuto dal mio egregio collega non è in disaccordo colle mie viste, ma ne è la più splendida conferma ».

Chimica. — *Sulle Selenetine. Nuova serie di composti del Selenio.* Nota di G. CARRARA, presentata dal Corrispondente R. NASINI (1).

« Le analogie esistenti fra il selenio e lo zolfo si fanno palesi non solo nelle forme di combinazione, ma anche nelle proprietà dei composti che ne risultano e perciò riesce di notevole interesse l'osservare sino a qual punto si estenda questa analogia, per dedurne poi con metodi quantitativi quale influenza eserciti il carattere più negativo dell'uno in confronto di quello dell'altro elemento. Tale studio diviene adesso assai importante dopo la scoperta fatta recentemente da V. Meyer delle basi iodiche analoghe alle solfiniche ecc.

« Nelle combinazioni organiche lo zolfo ed il selenio vanno paralleli; solfuri, seleniuri; solfine, selenine, ecc. ecc.; i lavori di Rathke (2), Jackson (3), Pieperling (4) hanno messo ben in chiaro la cosa. Però mancava pel selenio un anello alla catena delle analogie, ed era appunto quello che per i confronti sopra accennati aveva la maggior importanza, cioè una combinazione del tipo delle betaine per l'azoto, delle tetine per lo zolfo



« L'importanza di questo tipo di combinazione era principalmente da considerarsi dal punto di vista del contrasto esistente tra la funzione positiva del gruppo $\left(-\text{Se} \begin{array}{c} \text{R} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{R} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{OH} \end{array} \right)$ e quella negativa del gruppo $(-\text{CH}_2-\text{COOH})$;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Padova.

(2) Liebig's Annalen, CLII, pag. 181.

(3) Liebig's Annalen, CLXXIX, pag. 1.

(4) Liebig's Annalen, 185, pag. 331.

per un confronto tra lo solfo ed il selenio interessa vedere se la sostituzione del selenio, elemento più elettropositivo, faccia assumere alla combinazione un carattere basico, mentre invece lo solfo gli dà un carattere neutro o leggermente acido.

« Nella presente Nota mi limito ad esporre gli studi fatti sul primo termine di questo tipo di combinazione, riservandomi in seguito di continuarne lo studio nell'indirizzo accennato.

« Feci reagire molecole eguali di seleniuro di etile e acido bromoacetico fuso; scaldando poi leggermente per pochi istanti, si inizia la reazione, la massa si addensa, e dopo un giorno incomincia a cristallizzare. Lavai i cristalli così avuti con etere, e li purificai sciogliendoli nell'alcool assoluto e precipitandoli con etere anidro e asciugandoli nel vuoto sull'acido solforico. Ebbi così la nuova sostanza sotto forma di cristalli prismatici appuntiti deliquescenti, fusibili a 74°; solubili in acqua e in alcool, insolubili in etere. La soluzione acquosa è nettamente acida quantunque non contenga affatto acido bromoacetico libero, il quale è solubilissimo in etere.

« Asciutto nel vuoto sull'acido solforico all'analisi fornisce i seguenti risultati:

I gr. 0.2564 di sostanza diedero gr. 0.1708 di bromuro d'argento.

II gr. 0.2292 di sostanza diedero gr. 0.1546 di bromuro d'argento.

« Le determinazioni di bromo vennero fatte precipitando direttamente la sostanza come un bromuro inorganico, senza usare il metodo di Carius.

III gr. 0.3594 di sostanza diedero gr. 0.3710 di CO₂ e gr. 0.1626 di acqua.

IV gr. 0.2266 di sostanza diedero gr. 0.0588 di selenio.

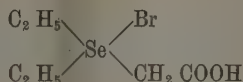
V gr. 0.3186 di sostanza diedero gr. 0.0850 di selenio.

« Per 100 dunque si ha

			trovato			calcolato per C ₆ H ₁₃ O ₂ SeBr
	I	II	III	IV	V	
C	—	—	26.42	—	—	26.08
H	—	—	4.86	—	—	4.71
Br	28.31	28.70	—	—	—	28.98
(¹) Se	—	—	—	25.95	26.67	28.62

(¹) Nei lavori di Rathke e di Jackson già citati si accenna alle difficoltà di avere risultati esatti nella determinazione del selenio nelle sostanze organiche per mancanza di un metodo soddisfacente. Jackson nel lavoro già citato non dà per questa ragione alcuna determinazione di selenio. Rathke poi dopo aver sperimentato con vari metodi trova numeri sempre discosti assai dal calcolato anche più dei miei sopra esposti. Paal (Berichte, 18, pag. 2255) nella determinazione del selenoxene non fa che il riconoscimento qualitativo; così pure Hofmann nel suo lavoro sui Selenociano-e Selenazol-composti (Liebig's Annalen, CCL, pag. 294). Io ho seguito il metodo accennato dal Pieverling (Liebig's Annalen, CLXXXV, pag. 334), cioè trattamento in tubo chiuso con acido nitrico, quindi scomposizione a bagno maria dell'acido nitrico con l'acido cloridrico e evaporazione sino quasi a secco, indi precipitazione con anidride solforosa.

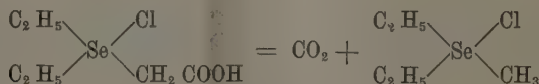
« Questa sostanza è dunque il bromuro di un radicale, che per analogia col nome dato ai corrispondenti composti dello solfo chiamerò dietilselenetina; il bromuro avrebbe la seguente costituzione



« Come le corrispondenti combinazioni solforate; anche questo può dare un cloroplatinato ben cristallizzato. Trattando la soluzione di bromuro di dietilselenetina con eccesso di cloruro d'argento fino a totale eliminazione del bromo, indi concentrando a bagno maria la soluzione così avuta riprendendola con alcool e precipitandola con soluzione alcoolico-eterica di cloruro di platino, si ha sotto forma di una sostanza oleosa densa, di color giallo rossastro che rapprende in breve in una massa cristallina costituita da grossi prismi. Questi, lavati con alcool ripetute volte e asciugati nel vuoto, e meglio previa ricristallizzazione dall'acqua mostrano all'analisi di essere di cloroplatinato di dietilselenetina. Dai liquidi alcoolici eterici per aggiunta ulteriore d'etere si depone una seconda porzione di cloroplatinato sotto forma di piccoli aghetti gialloaranciati.

« Le due porzioni prima di essere ricristallizzate dall'acqua fondono decomponendosi a temperatura un po' diversa, una decina di gradi; ma poi dopo ricristallizzazione dall'acqua fondono entrambe a 150°-151° decomponendosi.

« Questo fatto è probabilmente dovuto alla trasformazione in cloroplatinato di selenina durante l'evaporazione della soluzione acquosa del cloruro. Avverrebbe anche qui come per il caso delle tetine, accennato in un mio precedente lavoro (1), secondo l'equazione seguente



« Ecco i risultati dell'analisi.

« Prima porzione

I gr. 0.2606 di sostanza diedero gr. 0.0624 di platino.

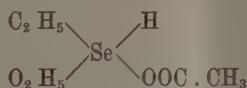
II gr. 0.2376 di sostanza diedero gr. 0,0570 di platino.

« La stessa ricristallizzata dall'acqua.

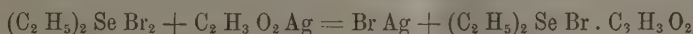
« Ho tentato di ottenere un isomero di questa sostanza, il quale per lo

(1) *Su alcune tetine isomere. Gazzetta Italiana, vol. XXIII, pag. 493.*

studio della basicità o acidità dell'aggruppamento avrebbe avuto una grande importanza la cui costituzione avrebbe dovuto essere



« A questo scopo feci reagire sopra il seleniuro d'etile bibromurato, ottenuto sia per azione dell'acido bromidrico sopra il nitrato corrispondente sia per azione del bromo direttamente sul seleniuro, l'acetato d'argento in quantità tale da eliminare un solo atomo di bromo



Evaporata la soluzione acquosa in gran parte a b. m. e poscia nel vuoto sull'acido solforico, rimase una massa cristallina e delle gocce oleose di odore ributtante. Trattai tutto con etere, nel quale l'olio si sciolse, la massa cristallina rimasta la disciolsi in alcool assoluto e la precipitai con etere anidro. Ebbi così, dopo un giorno, dei bellissimi aghetti bianchi deliquescenti.

« Trasformai in cloruro col cloruro d'argento e precipitai in soluzione alcoolico-eterea con cloruro di platino; ebbi, dopo cristallizzazione dell'acqua, un bellissimo cloroplatinato costituito da piccoli cristallini prismatici, con la estremità come di romboedro a faccia terminale piana. Simili a quelli descritti da Pieverling, come cloroplatinato di trietilsolfina (¹). Infatti, anche all'analisi risultarono identici. Gr. 0.0466 di cloroplatinato diedero gr. 0.0122 di platino.

« Per 100 dunque si ha:

trovato	calcolato per $(\text{Se}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl})_2\text{PtCl}_4$
26.18	26.25

« Avendo avuto a mia disposizione una piccola quantità di cloroplatinato, mi poteva forse restar dubbio che invece della trietilselenina si fosse formata la dietilmetil, quantunque ciò sia già escluso dalla forma cristallina e dal percentuale di platino, che per quest'ultimo richiederebbe 27.28 per 100; pure, essendo questo un fatto assai importante per le conseguenze che se ne possono tirare sull'andamento della reazione, ho creduto di risolvere rapidamente la questione preparando il cloroplatinato di dietilmetilselenina che descriverò qui brevemente non essendo stato descritto fino ad ora, e confrontandolo con quello da me sopra descritto. Lo preparai dal seleniuro d'etile e ioduro di metile, e per le solite trasformazioni in cloruro e in cloroplatinato lo ebbi cristallizzato dall'acqua sotto forma di laminette prismatiche triangolari, affatto diverse da quelle di trietilselenina già sopra accennato.

(¹) Memoria citata, pag. 337.

« All'analisi fornì i seguenti risultati:

« Da gr. 0.3486 di cloroplatinato ebbi gr. 0.0942 di platino.

« Dunque per 100 si ha:

	trovato	calcolato per $(\text{Se}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{CH}_2\text{Cl})_2\text{PtCl}_4$
Pt	27.41	27.28

III gr. 0.0930 di sostanza diedero gr. 0.0226 di platino.

« Seconda porzione

IV gr. 0.2570 di sostanza diedero gr. 0.0630 di platino.

V gr. 0.2786 di sostanza diedero gr. 0.0696 di platino.

« Per 100 si ha

	trovato					calcolato per $(\text{C}_6\text{H}_{13}\text{O}_2\text{ClSe})_2\text{PtCl}_4$
	I	II	III	IV	V	
Pt =	23.90	23.99	24.28	24.51	24.98	24.28

« Il bromuro di dietilselenetina venne trasformato nell'idrato corrispondente trattandolo con ossido d'argento sospeso in acqua e di recente precipitato. La soluzione acquosa viene evaporata in parte a bagno maria e poscia nel vuoto sull'acido solforico dove dopo tre o quattro giorni si rapprende in una massa solida cristallina. Però esisteva ancora una piccola quantità di ossido d'argento, per allontanare il quale dovetti ripetutamente trattare con alcool assoluto filtrare, evaporarlo nel vuoto, e in ultimo precipitare la soluzione alcoolica con etere anidro; ebbi così l'idrato sotto forma di un olio incolore, denso, che cristallizzò dopo tre giorni nel vuoto dall'acido solforico. È una sostanza deliquescente la cui soluzione acquosa ha reazione acida al tornasole.

« Asciugato nel vuoto sull'acido solforico fino a costanza di peso diede all'analisi i seguenti risultati:

I gr. 0.3096 di sostanza danno gr. 0.3798 di anidride carbonica e gr. 0.1616 di acqua.

II gr. 0.3968 di sostanza danno gr. 0.4872 di anidride carbonica e gr. 0.1922 di acqua.

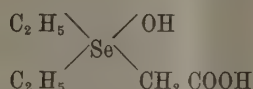
« Per 100 dunque si ha

	trovato		calcolato per $\text{C}_6\text{H}_{14}\text{O}_2\text{Se}$
	I	II	
C	33.45	33.48	33.80
H	5.97	5.38	6.57

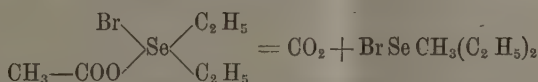
« Evidentemente la sostanza qui è allo stato di idrato e non di anidride quale si ha nei corrispondenti composti solforati. Le differenze che si riscontrano fra il calcolato e il trovato specialmente per l'idrogeno si deb-

bono attribuire a qualche traccia di argento che malgrado tutte le cure non mi riuscì di eliminare.

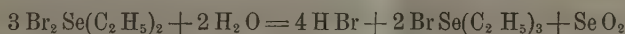
« Questo composto dunque sarebbe l'idrato della dietilselenetina e avrebbe la costituzione



« Dall'aspetto e da tutti i caratteri, apparve diverso dal cloroplatinato sopra descritto. È dunque indubbiamente la trietilselenina che si forma. Questo fatto è assai importante, perchè se si fosse formata la dietilmetil, si avrebbe avuto indizio che l'isomero cercato si era realmente formato, ma che poi si era scomposto durante la trasformazione in cloroplatinato secondo l'equazione



mentre con la formazione della trietilselenina si può difficilmente ammettere che detta formazione sia avvenuta, e riesce più credibile concludere che in causa della poca stabilità del seleniuro d'etile bibromurato in soluzione acquosa, questo si sia trasformato nel composto più stabile, cioè nella trietilselenina secondo l'equazione seguente:



« Quest'ultimo modo di vedere sarebbe anche confermato dal fatto che dall'olio che accompagna la massa cristallina si separa dopo qualche tempo del selenio.

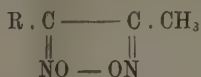
« Mi riserbo di ritentare la preparazione di questo isomero delle selenetine, e di estendere le ricerche anche ai composti solforati ».

Chimica. — *Sopra la configurazione di alcune gliossime.* Nota di A. ANGELI e G. MALAGNINI, presentata dal Socio CIAMICIAN.

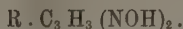
« La natura delle interessanti isomerie che presentano le ossime è stata oggetto in questi ultimi anni di viva discussione fra molti chimici eminenti, e l'ipotesi che oramai meglio di ogni altra la spiega è quella di Hantzsch e Werner, secondo cui tali isomerie dipendono dalla differente configurazione del residuo ossimico.

« I prodotti che si ottengono per azione dell'acido nitroso sopra alcuni composti non saturi stanno in stretta relazione con le gliossime, ed il loro studio tocca molto da vicino il problema che riguarda le isomerie che queste possono presentare.

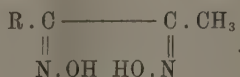
« In alcune precedenti comunicazioni ⁽¹⁾ uno di noi ha dimostrato come impiegando un nuovo metodo di riduzione, dai perossidi



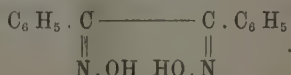
in cui R rappresenta un residuo aromatico, si possa passare direttamente alle diossime



« Basandosi sopra questa trasformazione si è ammesso che alle glossime che in tal modo si formano, secondo la teoria di Hantzsch e Werner, spetti la configurazione



« Questa supposizione è avvalorata dal fatto che il perossido della benzildiossima, sottoposto allo stesso processo di riduzione, dà origine alla γ -benzildiossima, cui Hantzsch e Werner, in base ai fatti scoperti da Victor Meyer, hanno attribuita la struttura

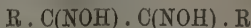


« Secondo questo modo di vedere gli atomi di ossigeno, nelle diossime che dai perossidi in tal modo si formano, conservano la stessa posizione reciproca che avevano nel perossido primitivo:



« Il passaggio dai perossidi alle glossime è stato effettuato in un grandissimo numero di casi e le esperienze eseguite in questo proposito si trovano descritte in una serie di Memorie pubblicate in questi ultimi anni nella Gazzetta chimica.

« Le diossime che si ottengono dai perossidi si trasformano per riscaldamento in composti isomeri e che sono sempre diossime. È noto che la teoria di Hantzsch e Werner per le diossime

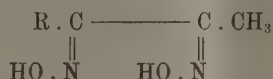


fa prevedere l'esistenza di tre isomeri che in alcuni casi si sono anche potuti preparare, come p. e. le tre benzildiossime. Dalle ricerche di Hantzsch e dei suoi allievi, si sa che la natura del radicale R esercita una influenza notevole di attrazione o di ripulsione sopra i due ossidrili ossimici, e che fra tutti

(¹) Gazzetta Chimica XXII, 2, pag. 450 e seg.

i radicali, il metile CH_3 , esercita la maggior azione ripulsiva sopra questo ossidrile.

« In base a questi risultati, uno di noi ha attribuita la struttura

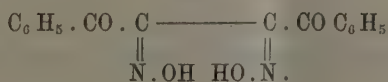


alle diossime isomere (β) che dalle prime (α) si ottengono per azione del calore. Questa supposizione trova un appoggio nel fatto che i derivati acetilici delle α -diossime, con tutta facilità, perdono una molecola d'acqua per dare le anidridi (azossazoli):



mentre i derivati acetilici delle β -diossime, sottoposti ad analogo trattamento rigenerano le diossime primitive.

« Tale comportamento dimostra che nelle β -diossime la tendenza ad anidrificarsi è di gran lunga minore, e perciò è giusto ammettere che in questo caso sia maggiore la distanza fra i due ossidrili. Che alle diossime le quali si ottengono per riduzione dei perossidi, spetti la accennata configurazione, è stato confermato in seguito da un'altra reazione scoperta da uno di noi. Riducendo il perossido della dibenzoilgliossima, si perviene ad una diossima in cui la tendenza ad anidrificarsi è maggiore ancora. Basta infatti bollirla con alcool, trattarla a temperatura ordinaria con anidride acetica, oppure semplicemente fonderla, perchè perda una molecola d'acqua e si trasformi nel dibenzoilazossazolo. Anche a questa diossima spetterà quindi la configurazione

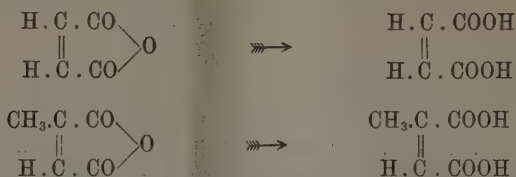


« Questo sta in buona armonia coi fatti trovati da Hantzsch, per cui il benzoile esercita sull'ossidrile ossimico un'azione ripulsiva maggiore di quella del fenile.

« Il processo di riduzione, per il quale dai perossidi si passa alle gliossime, presenta quindi una certa analogia con la trasformazione delle anidridi di alcuni acidi non saturi negli acidi corrispondenti



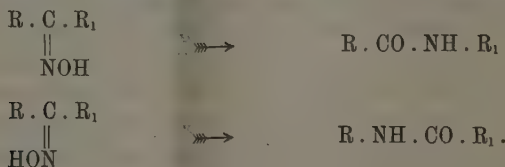
« Così p. e. dalle anidridi maleica e citraconica si passa agli acidi maleico e citraconico



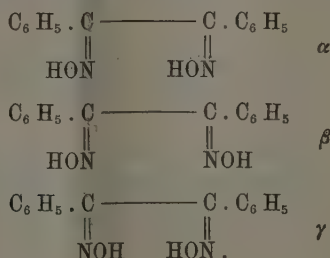
e non già agli acidi fumarico e mesaconico. E reciprocamente, come dalle differenti glossime isomere si ottiene sempre lo stesso perossido, così anche negli acidi accennati i due diversi isomeri danno origine ad una sola anidride.

« Questi erano i fatti da noi trovati e che stanno in buona armonia con la teoria di Hantzsch e Werner, allorchè comparve una Memoria di Beckmann e Köster⁽¹⁾ sulle benzilossime, in cui questi autori arrivarono a risultati, che apparentemente stanno in disaccordo con le vedute ora esposte.

« Beckmann si basa principalmente sopra i prodotti che egli ottiene per mezzo delle due sue interessanti trasformazioni, operate dai composti alogenati del fosforo e dall'acido solforico. È noto che diverse forme isomere delle ossime si possono trasformare per azione di questi reattivi, in composti amidati, quali possono essere diversi a seconda dell'ossima da cui derivano, e che queste metamorfosi possono servire a determinare la loro configurazione:

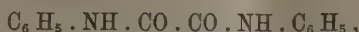


« Basandosi sopra le esperienze di Victor Meyer, Hantzsch e Werner hanno attribuito alle tre diossime del benzile la configurazione:

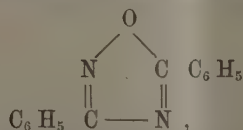


(1) Liebig's Annalen 274, 1.

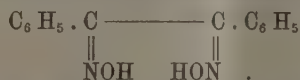
« Dalla β -benzildiossima, Beckmann e Köster col loro processo di trasformazione ottennero ossanilide



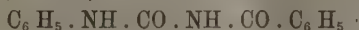
e questo risultato è in buona armonia con le vedute di Hantzsch e Werner. Dalla α -benzildiossima Beckmann ottenne la dibenzenilazossima,



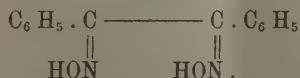
per spiegare la formazione della quale egli attribuisce all' α -diossima la formola:



« Per analogo trattamento dalla γ -benzildiossima Beckmann ottenne del pari dibenzenilazossima. Operando però invece che a -20° , alla temperatura d'ebollizione dell'etere, dalla γ -diossima ottenne la fenilbenzoiurea

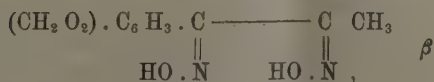
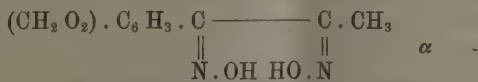


« Beckmann interpreta la formazione di questa sostanza ammettendo che alla γ -diossima spetti la configurazione:



« A noi sembra che dalle esperienze di Beckmann, malgrado la loro eleganza, non si possano trarre le conclusioni a cui pervenne questo chiaro autore, perchè sta il fatto che partendo da due ossime diverse la α e la γ del benzile si ottiene la stessa sostanza, la dibenzenilazossima.

« Per questo motivo abbiamo ritenuto opportuno di estendere le esperienze di Beckmann alle due diossime:

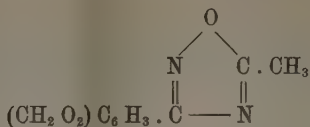


che uno di noi ha descritto due anni or sono.

« Queste diossime corrispondono rispettivamente alla γ -diossima ed alla α -diossima del benzile.

« Noi abbiamo operato con pentacloruro di fosforo, in soluzione eterea, raffreddando con ghiaccio e sale.

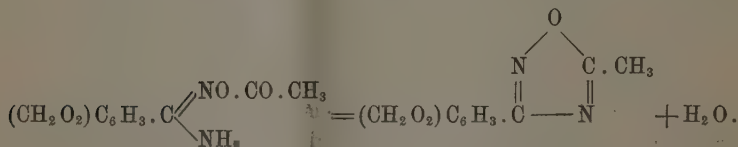
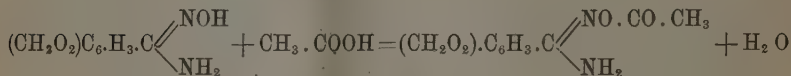
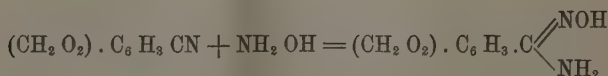
« Dall' α -diossima ottenemmo due sostanze cui con tutta probabilità spetta la struttura



e



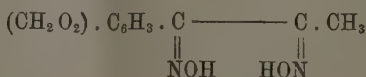
« La prima abbiamo potuto anche prepararla sinteticamente, seguendo il metodo di Tiemann, per successiva azione dell'idrossilammina e dell'anidride acetica sopra il nitrile piperonilico:



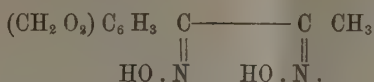
« Per analogo trattamento, dalla nostra β -diossima ottenemmo soltanto l'azossima sopra accennata. In entrambe le reazioni si nota sempre anche la formazione di piccole quantità di nitrile piperonilico.

« Anche in questo caso, dalle due differenti ossime si arriva ad una stessa sostanza, tranne per la β -diossima, dove assieme all'azossima si forma l'acetilpiperilurea.

« Questo risultato, se dimostra ancora un'altra volta la stretta analogia che passa fra le γ - ed α -diossime del benzile con quelle da noi studiate, non ci permette di stabilire in modo sicuro la configurazione di queste ultime. Entrambe, per identico trattamento, danno l'azossima, e perciò la formazione di questa sostanza non si può utilizzare per il nostro scopo. Volendo poi spiegare come dalla nostra α -diossima



possa formarsi l'acetilpiperilurea, secondo le vedute del Beckmann bisognerebbe attribuirle la configurazione:

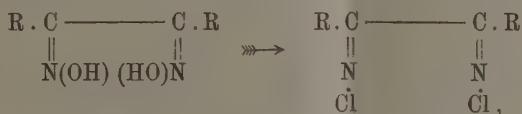


Le due reazioni adunque, quella di Beckmann e la nostra, in questo caso conducono a risultati opposti.

« Noi però diamo la preferenza ai risultati delle nostre reazioni, e su questo insistiamo principalmente per due motivi.

« In primo luogo, perchè non è da ammettersi che nelle diossime che dai perossidi si ottengono mediante un processo di riduzione che avviene a bassa temperatura ed in modo netto e quantitativo, possa effettuarsi un notevole mutamento nella posizione reciproca dei due atomi di ossigeno.

« Secondariamente poi, perchè nelle trasformazioni di Beckmann, in una prima fase i gruppi ossidrilici vengono rimpiazzati da due atomi di cloro



talchè i prodotti finali che si ottengono, piuttosto che dalle ossime, derivano dalle cloroimmidi che prima si formano e la configurazione delle quali potrebbe essere anche diversa delle ossime primitive. Su questo secondo punto pare convenga anche lo stesso Beckmann, giacchè in una Memoria ultimamente comparsa ⁽¹⁾ non esclude la possibilità che nelle sue trasformazioni, in una prima fase, possa avvenire, talvolta il passaggio più o meno completo di un'ossima nell'altra.

« Diremo infine che riguardo al processo di anidificazione delle benzil-diossime, Beckmann fa notare che l'anidride finora non è stata ottenuta direttamente nè dalla γ -diossima nè dall' α -diossima libere, e che entrambe prima di perdere una molecola d'acqua passano nella β -diossima, in cui la distanza fra gli ossidrilici è massima. Questo, nel caso nostro, non si può ammettere, giacchè non ci è stato possibile di preparare l'ossima



corrispondente alla β -diossima del benzile. L'esistenza di tale ossima, per quanto abbiamo detto prima, è molto improbabile ».

(¹) Berl. Berichte XXVII, 312.

CONCORSI A PREMIO

Elenco dei lavori presentati al Concorso *Santoro*

(scaduto il 30 Giugno 1894).

1. GATTI MARIO — *Soluzione del problema delle rotative, del problema della motrice ad aria compressa calda, invenzione applicabile alla filatura, alla tessitura ecc. (ms.)*.

2. NOTARI PIETRO — *Filatura meccanica ed automatica della lana di legno (ms.)*.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia danese di scienze e lettere di Kobenhau; la Società di scienze naturali di Emden; la Società geologica di Manchester; la Scuola politecnica di Delft; il R. Osservatorio di Edimburgo.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Museo Teyler di Harlem; l'Università di Kasan.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 4 giugno al 1° luglio 1894.

Arnoux G. — *Arithmétique graphique.* — Les espèces arithmétiques hypermagiques. Paris, 1894. 8°.

Boccardo E. — *Trattato elementare completo di geometria pratica.* Disp. 37. Torino, 1894. 8°.

Boldi M. A. — *Per la sistemazione di Piazza Colonna in Roma.* Roma, 1894. 8°.

Busiri-Vici A. — *La musica dei colori.* Roma, 1894. 4°.

Casanova E. — *Carta nautica del Reinel di proprietà del Barone Giovanni Ricasoli Firidolfi.* Roma, 1894. 8°.

Cerboni G. — *La ragioneria scientifica e le sue relazioni con le discipline amministrative e sociali.* Vol. II. Il metodo. Roma, 1894. 8°.

Guide des thermes et bains d'Italie. Turin, 1894. 8°.

- Helmholtz H. v.* — Handbuch der physiologischen Optik. VIII. Lief. Leipzig, 1894. 8°.
- Legislation (La) et l'administration sanitaire en Italie et les Institutions scientifiques annexées à la Direction de la Santé publique.* Rome, 1894. 8°.
- Martini E.* — Di alcuni fenomeni di elettrolisi e di polarizzazione. Venezia, 1894. 8°.
- Meli R.* — Sulla presenza dell'*Iberus Signatus* Fer. nei Monti Ernici e nei dintorni di Terracina. Siena, 1894. 8°.
- Noriega Ruiz E.* — Bateria electrica universal. Mexico, 1889. 8°.
- Id.* — Caja telefonica automatica. Mexico, s. a. 4°.
- Id.* — El microfono y el microtelefono. Mexico, s. a. 4°.
- Id.* — Manual pratico de la preparacion e hilado de Algodon. Mexico, 1889. 8°.
- Id.* — Reformas introducidas en el sistema de telefonos. Mexico, s. a. 4°.
- Id.* — Reformas o perfeccionamientos introducidos en el sistema de microfornos. Mexico, s. a. 4°.
- Observations faites au Cap Thorsden, Spitzberg par l'expédition Suédoise.* T. I, II. Stockholm, 1894. 4°.
- Pagliani L.* — Relazione intorno all'epidemia di Colera in Italia nel 1893. Roma, 1894. 8°.
- Piette Ed.* — L'époque éburnéenne et les races humaines de la période glyptique. Saint-Quentin, 1894. 8°.
- Poincaré H.* — Les oscillations électriques. Paris, 1894. 8°.
- Ricotti G.* — La pazzia e la sua influenza nel secolo XIX. Chieti, 1894. 4°.
- Scheeles C. W.* — Bref och Anteckningar. Stockholm, 1892. 8°.
- Sclavo A.* — Della cultura del *Diplococco* di Fränkel, nelle uova. Roma, 1894. 8°.
- Sirena S. e Scagliosi E.* — Analogie e differenze dei vibrioni colerigeni isolati nell'ultima epidemia 1893. Napoli, 1894. 8°.
- Id. id.* — Durata in vita del bacillo del Carbonchio nel terreno, nell'acqua potabile, in quella di mare e nel materiale di fogna. Napoli, 1894. 8°.
- Thomopoulos J.* — La présence d'infusoires dans le sang des palustres. Athènes, 1894. 8°.
- Veronese G.* — Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt. Ueb. von A. Schepp. Leipzig, 1894. 8°.
- Id.* — Osservazioni sui principi della geometria. Padova, 1894. 8°.
- Wilde G.* — Sur l'origine des corps simples et sur l'existence de relations nouvelles entre leurs poids atomiques. London, 1892. 4°.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 15 luglio 1894.

Meccanica. — *Sui corpi di massima attrazione.* Nota di ALFONSO SELLA, presentata dal Socio BLASERNA.

« Prima di venire all'argomento della presente ricerca premetterò alcuni teoremi, che legano tra di loro attrazioni di solidi con attrazioni di superficie materiali.

« I. L'attrazione di un cono qualsiasi (e quindi anche di una piramide) sul vertice, è eguale all'attrazione della base, su cui sia uniformemente distribuita una massa tripla della massa del cono.

« Di questa proprietà nota si dà una dimostrazione semplicissima, osservando che il cono può venire decomposto in piani materiali paralleli alla base, ciascuno dei quali esercita sul vertice la medesima attrazione. Se quindi α indica l'attrazione della base, sulla quale sia uniformemente distribuita la massa uno, l'attrazione A del cono sul vertice varrà αh , se h è l'altezza del cono, e la massa M del cono varrà $h/3$, da cui segue:

$$A = 3M\alpha.$$

« II. L'attrazione di un poliedro circoscritto ad una sfera sopra il centro della sfera, è eguale all'attrazione di una massa tripla della massa del poliedro uniformemente

distribuita sulla superficie del poliedro. Questo teorema segue immediatamente dal precedente, giacchè le masse di ciascuna delle piramidi parziali, aventi il vertice nel centro della sfera, in cui può venire decomposto il poliedro, sono proporzionali alle basi.

« L'attrazione di un cilindro circolare retto sul centro di una base, è eguale all'attrazione di una massa tripla della massa del cilindro uniformemente distribuita sul mantello e sulla base opposta, se l'altezza ed il raggio del cerchio base sono eguali. Infatti in questo caso unendo a questo cilindro un altro identico e in posizione coassiale, dall'altra parte del punto attratto si cade nel caso di un poliedro circoscritto ad una sfera con punto attratto nel centro; all'attrazione del poliedro si sostituisce l'attrazione di una distribuzione uniforme sulla superficie e poi si staccano i due cilindri, con che si ha la proprietà enunciata.

« III. L'attrazione di un cono qualsiasi avente per base una superficie sferica con centro nel vertice, su questo vertice è eguale all'attrazione di una massa tripla di quella del cono uniformemente distribuita sulla superficie sferica base. Questo teorema puossi derivare dal teorema I o da II, o dimostrare direttamente in modo del tutto analogo a quello tenuto in I.

« IV. L'attrazione di un anello cilindroconico, ossia del solido compreso fra un cilindro circolare ed un cono avente per vertice il centro di una base e per base la base opposta del cilindro, sul vertice di questo cono è eguale all'attrazione di una massa tripla di quella dell'anello uniformemente distribuita sul mantello del cilindro. Questo risulta decomponendo l'anello in piramidi elementari per mezzo di piani passanti per il vertice e per le generatrici del cilindro. Se il vertice del cono non fosse nel centro di una base, allora la distribuzione non sarebbe più uniforme, ma lungo ogni generatrice la densità superficiale dovrebbe essere proporzionale alla distanza di essa dal punto attratto, ossia dovrebbe venire conservata la similitudine rispetto al punto attratto.

« I risultati sin qui esposti possono venire dedotti da un unico principio, che segue subito dal teorema I ⁽¹⁾: Dato un solido ed un punto attratto si può sostituire al solido una distribuzione superficiale di materia, uniforme su ciascuna delle porzioni piane (finite od infinitesime) della superficie del solido e proporzionale dall'una all'altra alle altezze delle piramidi che le proiettano dal punto attratto; e considerando come positive quelle piramidi che racchiudono una parte del corpo, negative invece quelle interamente vuote.

« V. L'attrazione di un cono qualsiasi avente per base una superficie di attrazione costante lungo una data dire-

⁽¹⁾ Confronta F. Keller, *Ricerche sull'attrazione delle montagne*. Roma, Loescher, 1872. Parte prima, pag. 4-5.

zione, sul vertice e lungo questa direzione è eguale all'attrazione di una massa tripla di quella del cono uniformemente distribuita sulla base. Infatti decomponendo il cono in coni elementari e portando sulle basi una massa tripla di quella di ciascuno dei coni elementari, si avrebbe da prima una distribuzione superficiale non uniforme, che può immediatamente venire resa tale dal momento che la superficie è di attrazione costante. In questo caso la distribuzione della massa tripla del cono sulla base è del resto assolutamente arbitraria.

« Veniamo ora al problema dei corpi di massima attrazione che si può formulare così: Data una certa massa, determinare quale forma si debba dare a questa massa, affinchè l'attrazione di essa su di un dato punto e lungo una data direzione sia massima. Se i punti attratti sono due, dovrà essere massima la somma delle attrazioni su di essi. La forma potrà non essere ovvero essere soggetta a condizioni ristrettive, come sarebbe l'assegnazione di un dato tipo di forma.

« Supposta costante la densità, il problema si riduce a rendere massima l'attrazione A di un certo corpo, essendo costante il suo volume V . Ora le dimensioni di un'attrazione e di un volume sono date da:

$$[A] = [L], \quad [V] = [L^3],$$

quindi sarà necessariamente

$$A = \lambda V^{\frac{1}{3}},$$

in cui λ è una funzione *numerica* dei parametri (lunghezze) che definiscono il corpo. Il nostro problema si riduce allora a rendere massima la funzione $\lambda = A/V^{1/3}$. Dunque dovrà essere $\delta\lambda = 0$ ossia:

$$\frac{\delta A}{\delta V} = \frac{A}{3V}. \quad (1)$$

Questa relazione, come condizione del massimo, è affatto generale. Se ci limitiamo a corpi, la cui forma dipende da *due* parametri, come sarebbero certe due lunghezze l_1 ed l_2 , avremo:

$$\lambda = f\left(\frac{l_1}{l_2}\right),$$

dovendo λ avere dimensione nulla. Quindi λ acquisterà tutti i valori possibili tenendo fisso un parametro e facendo variare l'altro. Allora i valori di δA e di δV , che compaiono nella formola (1), potranno essere riferiti alle variazioni dell'attrazione e del volume prodotte dalle variazioni di *un solo* parametro.

Corpo di massima attrazione a due punti.

« Si tratta di rendere massima la somma delle attrazioni di una massa su due punti lungo la retta che li congiunge; questa retta sarà asse di rivoluzione del corpo. La superficie del corpo sarà tale che la somma delle attrazioni di un punto materiale posto su di essa sui due punti attratti sia costante, perchè altrimenti converrebbe deformarla per portare della massa da luoghi in cui la somma delle attrazioni è minore, in luoghi in cui essa è maggiore. Ora la distanza dei due punti non è data ed abbiamo così un parametro; per il secondo possiamo prendere il valore μ di quella somma costante di attrazioni di un punto materiale alla superficie, in cui sia concentrata l'unità di massa.

« Tengo ora fisso, secondo il principio svolto sopra, il primo parametro, ossia la distanza di due punti e suppongo variabile μ . Allora a causa della costanza di μ per tutti i punti della superficie avrò:

$$\delta A = \mu \delta V.$$

Sostituendo questa relazione nella condizione del massimo data dalla formula (1) avremo:

$$A = 3\mu V.$$

« Dunque tra le infinite superficie, per cui è costante la somma delle attrazioni di un punto su due punti dati, *corrisponde ad un massimo di attrazione quella determinata dal valore $\mu = A/3V$* . Il problema è così interamente risolto, giacchè la distanza dei due punti, ovvero le dimensioni del corpo, sono date dalla massa disponibile. Abbiamo così ritrovato in modo semplicissimo un risultato già noto per una via laboriosa e poco trasparente (1).

Corpi di dato tipo di forma.

« 1. Sia un cilindro retto con base qualsiasi ed il punto attratto si trovi in un punto della base. Il problema di rendere massima l'attrazione del cilindro su questo punto dipenderà da due soli parametri, se io stabilisco che la base debba mantenersi simile e similmente posta rispetto al punto attratto; ed i due parametri saranno una linea della base e l'altezza del cilindro. Suppongo fissa la base e variabile quest'ultima; allora δA e δV saranno pure le variazioni dell'attrazione A_1 e del volume V_1 della piramide, che proietta la base opposta dal punto attratto. Ora dal teorema I segue:

$$\frac{\delta A_1}{\delta V_1} = \frac{A_1}{3V_1}$$

(1) Vedi A. Sella, *Ancora sulla forma del corpo attraente nella misura della densità media della terra e sul corpo di massima attrazione di due punti*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. III, 1° sem., p. 439, 1894.

e quindi la condizione del massimo (1) fornirà:

$$\frac{A}{V} = \frac{A_1}{V_1}, \quad (2)$$

ossia l'attrazione sarà massima quando le attrazioni ed i volumi del cilindro e del cono sulla base opposta saranno proporzionali. (Allo stesso risultato si arriverebbe, e nello stesso modo, coll'aiuto del teorema IV supponendo variabile la base invece che l'altezza).

« Questo teorema trovato dal Keller per altra via, viene ora posto sotto una luce che ne permette un'ampia generalizzazione. Per il ragionamento di sopra non è affatto necessario che il cilindro sia retto, nè che le due faccie piane limitanti il cilindro sieno parallele. Quindi la condizione di massimo (2) varrà pure per il seguente problema: Dato un angolo solido qualsiasi, porre una data massa entro quest'angolo limitata da due piani di inclinazione determinata, in modo che sia massima l'attrazione su di un punto situato su una di queste basi e su di una data retta passante per il vertice dell'angolo.

« La condizione (2) presuppone solo che la forma del corpo dipenda da due parametri e che la variazione di un parametro produca una variazione di attrazione di un cono sul suo vertice, ottenuta distribuendo della massa in modo uniforme sulla sua base. Dunque la stessa relazione varrà anche per la calotta sferica ⁽¹⁾ o paraboloidica con punto attratto nel vertice; così la curva meridiana potrà essere anche un'ellisse di eccentricità data od un'altra curva dipendente da un solo parametro; ed il punto attratto non dovrà nemmeno stare necessariamente sul vertice. Così in tutti questi casi si potrà sostituire al piano opposto al punto attratto una superficie sferica avente centro nel punto attratto, ovvero, se si tratta di massimo di attrazione lungo una determinata direzione, una superficie di attrazione costante lungo questa direzione.

« Si ha a questo modo la condizione del massimo di attrazione espresso dalla (2) per un grande numero di forme diverse; purchè la forma dipenda da due parametri e che la variazione di uno dei parametri permetta l'applicazione di uno dei nostri teoremi preliminari.

(1) Se h e q sono altezza e raggio del cerchio base avremo:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \left(h - \frac{2}{3} \frac{h^3}{\sqrt{h^2 + q^2}} \right), & V &= \frac{\pi}{2.3} h (h^2 + 3q^2), \\ A_1 &= 2\pi \left(h - \frac{h^3}{\sqrt{h^2 + q^2}} \right), & V_1 &= \frac{\pi q^2 h}{3}, \end{aligned}$$

onde la condizione (2) mi fornirà immediatamente:

$$3(h^3 + q^2)^{3/2} - 3h^3 - 5hq^2 = 0;$$

relazione che coincide con quella trovata nella Nota sopracitata col solito metodo dei massimi. Lo stesso potrebbe farsi colla calotta paraboloidica.

« 2. Passiamo ora a trattare col nostro metodo un'altra classe di corpi che ci condurrà a considerare delle attrazioni di linee materiali.

« Cominciamo colla piramide retta avente per base un poligono regolare con punto attratto nel vertice. In questo caso i parametri sono ancora due, cioè p. e., altezza della piramide e raggio del cerchio circoscritto al poligono base. Tengo fissa l'altezza h e suppongo variabile il raggio ϱ del cerchio circoscritto. Allora δA e δV rappresentano la somma delle attrazioni di n piramidi elementari ottenute proiettando dal vertice l'anello poligonale compreso fra il poligono corrispondente a ϱ ed il poligono corrispondente a $\varrho + \delta\varrho$. Ora l'attrazione, lungo l'asse della piramide principale, di ciascuna di queste piramidi parziali è la stessa come se tre volte il volume di essa fosse uniformemente distribuita sul corrispondente lato del poligono; quindi, per la simmetria del corpo, se μ è l'attrazione della massa uno uniformemente distribuita sul perimetro del poligono, sarà:

$$\delta A = 3\mu\delta V$$

e sostituendo nella (1) troveremo

$$A = 9\mu V. \quad (3)$$

Siamo così giunti al risultato semplicissimo: L'attrazione di una piramide a base regolare sul suo vertice sarà massima, quando sarà eguale all'attrazione di una massa 9 volte quella della piramide uniformemente distribuita sul perimetro del poligono base (1).

« E si vede che la stessa condizione vale pel cono pel settore sferico (2) e per l'anello cilindroconico. Non insisterò sulla generalizzazione di

(1) Se h è l'altezza, l lo spigolo che parte dal vertice ed a la distanza del lato del poligono dal vertice sarà:

$$\mu = \frac{h}{a^2 l}$$

ovvero introducendo il raggio ϱ del cerchio circoscritto e l'angolo $\varphi = \pi/n$, essendo n il numero dei lati del poligono:

$$\mu = \frac{h}{\varrho^2 \cos^2 \varphi + h^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2 + \varrho^2}}.$$

Ora si ha:

$$A = 2\pi h \left(\pi - n \arctg \frac{h \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{h^2 + \varrho^2}} \right), \quad V = \frac{1}{3} n h \varrho^2 \sin \varphi \cos \varphi;$$

dunque la condizione (3) mi fornirà:

$$2\pi - 2n \arctg \frac{h \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{h^2 + \varrho^2}} - 3n \frac{h \varrho}{\varrho^2 \cos^2 \varphi + h^2} \cdot \frac{\varrho \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{h^2 + \varrho^2}} = 0,$$

ossia la condizione trovata dal dott. Pierpaoli operando col metodo ordinario (Rend. dell'Acc. dei Lincei, vol. II, 1° sem., p. 136, 1893).

(2) Traducendo in formole nei rispettivi casi la (3), si cade immediatamente nelle formole date da Playfair Lampe pel cono e dal Keller pel settore sferico.

cui sono suscettibili questi tipi di corpi; l'essenziale è solo che la loro forma dipenda da due parametri e che la variazione di un parametro conduca all'attrazione di una massa distribuita lungo un certo contorno.

« L'applicazione della formola (1) ci ha condotto così ad una quantità di risultati suscettibili di una interpretazione molto semplice, e la sua fecondità nello studio dei corpi di massima attrazione ci pare dimostrata ».

Fisica terrestre. — Origine del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio. Nota del dott. GIUSEPPE FOLGHERAITER, presentata dal Socio BLASERNA.

« Le ricerche fatte specialmente negli ultimi tempi sopra il magnetismo delle rocce hanno una grande importanza sotto il punto di vista, che mostrano quanta influenza esso possa avere sui risultati delle misure magnetotelluriche, e quanto esso sia estesamente sviluppato nelle rocce, tanto che in molte contrade è più facile il trovare una roccia più o meno magnetica, che una la quale non lo sia affatto.

« Alcuni studiosi hanno anche cercato di investigare, quale sia stata la forza magnetizzante delle rocce, e fra le varie ipotesi emesse in questo riguardo ha dell'attendibilità quella del Melloni⁽¹⁾, quantunque anch'essa sia insufficiente talvolta a spiegare l'attuale orientazione del magnetismo in alcune rocce. Secondo il Melloni, il magnetismo delle lave del Vesuvio è dovuto all'azione induttrice della Terra durante il periodo del loro consolidamento e raffreddamento: tale ipotesi fu stabilita in base all'orientazione del magnetismo nei pezzi di lava staccati dal masso vivo, e sul fatto che quando tali pezzi comunque disposti venivano smagnetizzati coll'arroventarli, essi si calamitavano nel raffreddarsi corrispondentemente all'azione induttrice del magnetismo terrestre.

« I risultati delle esperienze di Melloni furono confermati dal Förstermann⁽²⁾, che ha operato sopra rocce non vulcaniche; ed i sigg. Oddone e Franchi⁽³⁾ ed O. E. Meyer⁽⁴⁾ hanno trovato che la distribuzione del magnetismo di monte è come se fosse prodotta dall'induzione della Terra.

⁽¹⁾ *Ricerche intorno al magnetismo delle rocce.* Due Memorie. R. Acc. delle Scienze di Napoli, vol. I, 1853, pag. 121 e 141.

⁽²⁾ Pogg. Ann. vol. 106, 1859, pag. 106.

⁽³⁾ Annali dell'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, vol. XII, parte 1^a, 1890.

⁽⁴⁾ Jahresber. d. Schles. Ges. 1888, pag. 10; Sitzungsber. d. Münch. Akad. vol. 19, 1889, pag. 167, e Wied. Ann. vol. 40, 1890, pag. 489.

« Anche J. Locke ⁽¹⁾ che ha fatto numerose osservazioni e misure sul magnetismo terrestre nell'America del Nord dal 1838 al 1843, ha spiegato le anomalie trovate presso le famose colonne dioritiche dell'Hudson coll'ammettere, che esse erano divenute calamite per l'azione induttrice della Terra.

« L'ipotesi di Melloni però è insufficiente a spiegare la magnetizzazione delle rocce, quando si considerino i così detti *punti distinti*, che furono trovati con tanta frequenza dal prof. Keller ⁽²⁾ nella lava basaltina del Lazio, e dai dott. Oddone e Sella ⁽³⁾ nelle rocce magnetiche delle Alpi centrali e da molti altri autori in altre località.

« Le rocce con *punti distinti* hanno il loro magnetismo orientato colla massima irregolarità e capriccio. Ora in esse si trovano due punti fortemente magnetici, con polarità opposte, la cui posizione relativa non segue mai alcuna legge; ora i due punti hanno la stessa polarità: talvolta si ritrova un punto distinto solo, e attorno ad esso la roccia sembra quasi inerte sopra l'ago calamitato. In molti casi i punti distinti sono alla superficie e nella parte superiore della roccia, ma talvolta, sebbene raramente, trovansi anche nell'interno della massa rocciosa, e sono venuti alla luce soltanto, perchè a caso l'uomo per i propri bisogni ha levato la roccia soprastante.

« Da osservazioni sopra centinaia di punti distinti i dott. Oddone e Sella hanno tirato la conclusione, che la distribuzione del magnetismo non è mai in relazione alcuna colla direzione del campo terrestre: non è quindi la stessa causa che ha prodotto la magnetizzazione delle lave del Vesuvio ed i punti distinti.

« In simil guisa se si esaminano i risultati ottenuti dai varî autori e specialmente dal Keller ⁽⁴⁾ desunti da numerose osservazioni fatte sul magnetismo delle rocce vulcaniche del Lazio, non si scorge, anche omettendo i punti distinti, che esista una causa unica alla quale si possa attribuire tutto quel magnetismo agente in vario senso e con diversa intensità anche in luoghi relativamente vicini: è però da notare, che le ricerche del Keller non hanno avuto l'obbiettivo di cercare la forza magnetizzante, ma solo la presenza del magnetismo e la sua intensità nelle varie specie di rocce.

« Da tutto ciò si rimane incerti se l'ipotesi di Melloni sia applicabile solo al caso isolato delle lave del Vesuvio, oppure se essa valga anche per

⁽¹⁾ Transact. Am. Phil. Soc. Philadelphia, vol. 9, 1846, pag. 233; *Smithson Contributions*, vol. III, 1852, pag. 1.

⁽²⁾ *Sulle rocce magnetiche di Rocca di Papa*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. II, 1886, pag. 428, e *Guida itineraria delle principali rocce magnetiche del Lazio*, id., vol. VI, 1890, pag. 17.

⁽³⁾ *Contributo allo studio delle rocce magnetiche nelle Alpi centrali*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. VII, 1° sem., 1891, pag. 100 e 145.

⁽⁴⁾ *Contributo allo studio delle rocce magnetiche dei dintorni di Roma*. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. IV, 1° sem., 1888, pag. 38 e 325; e vol. V, 1° sem., 1889, pag. 519.

altre rocce che hanno avuto una origine analoga, o se essa sia generale; mi sono proposto di studiare la distribuzione del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio, appunto sotto il punto di vista di potere decidere se anche in questo caso sia stata l'induzione della Terra la causa magnetizzante di esse. Prima però di accingermi a determinare l'orientazione del magnetismo direttamente sui giacimenti di rocce vulcaniche, ho cercato di conoscere l'influenza, che su tali ricerche esercitano le cause, che possono mascherare o lasciare qualche incertezza sul vero stato magnetico di quelli. È noto in fatti che la forza colla quale una sostanza magnetica attira o respinge un ago calamitato è sempre la risultante delle tre seguenti azioni:

- « 1° di quella dovuta al magnetismo permanente della sostanza;
- « 2° di quella dovuta al magnetismo indotto dalla Terra;
- « 3° di quella dovuta alla reciproca induzione tra l'ago calamitato e la sostanza.

« Ora nell'esame del magnetismo delle rocce dobbiamo considerare unicamente l'effetto dovuto alla risultante delle due prime specie di magnetismo (perchè non ci è possibile dividere l'azione del magnetismo permanente da quello indottovi dalla Terra, fino a che le rocce stanno al loro posto), ma dobbiamo assolutamente togliere o diminuire il più che sia possibile l'effetto prodotto dalla reciproca induzione tra l'ago e la roccia, perchè il magnetismo così prodotto non è inerente nella roccia, ma vi si sviluppa solo per la presenza dell'ago calamitato, e la sua intensità dipende dalle dimensioni e dall'intensità magnetica di questo, dalla distanza alla quale esso è posto dalla roccia da esaminare, e forse anche dall'intensità magnetica e dalla forza coercitiva della roccia stessa. L'azione di questo magnetismo indotto è sempre attrattiva, ed è noto che talvolta può essere così forte da mascherare completamente il vero stato magnetico della roccia.

« Per procedere con ordine, ho diviso le mie indagini in 3 parti distinte. In questa Nota espongo i risultati ottenuti dall'esame dell'influenza prodotta dalla reciproca induzione tra ago e roccia: in Note successive esporrò la distribuzione del magnetismo nelle rocce, ed esaminerò se nelle rocce esista magnetismo permanente, in quale misura e come esso sia orientato.

Intensità del magnetismo indotto nelle rocce dall'ago dell'istrumento di misura.

« Su questo interessante argomento il Melloni ⁽¹⁾ ha fatto molte e svariate esperienze dalle quali risulta, che il magnetismo indotto dall'ago su campioni di rocce non distrugge il magnetismo permanente di queste, ma si so-

(1) Memoria II citata e *Du magnétisme des roches*, lettre à M. Regnault, C. R. vol. XXXVII, 1853, pag. 966.

vrappone, precisamente come succede nelle calamite artificiali, e cessa al cessare dell'azione induttrice, e che in alcuni casi può esercitare tanta influenza, che mentre una roccia respinge per il magnetismo proprio un ago calamitato liberamente sospeso, essa per effetto del magnetismo indotto dalla presenza dell'ago, lo può attirare quando sia avvicinata a piccolissima distanza.

« È chiaro da ciò che si deve essere assai guardinghi nello stabilire la polarità magnetica delle rocce, per non trarre da misure mal fatte conseguenze contrarie alla realtà delle cose: faccio subito osservare però, che nelle condizioni nelle quali io era obbligato a sperimentare, era ben lungi dall'ottenere effetti così marcati come ebbe il Melloni; il centro dell'ago del mio istrumento si trovava sempre a circa 30 cm. dalla roccia: il Melloni invece per ottenere il rovesciamento dell'azione magnetica doveva avvicinare i suoi campioni a 5 o 6 mm. dall'ago del suo apparecchio, mentre già a 30 mm. la prevalenza del magnetismo indotto era quasi sempre cessata.

« Il metodo sperimentale da me seguito per determinare l'intensità del magnetismo indotto dall'ago sulla roccia è il seguente: aveva a mia disposizione due aghi di momento magnetico assai diverso, che si potevano adattare alla stessa bussola di declinazione. Questa veniva collocata in vicinanza ad un giacimento di roccia magnetica (punto A). Si puntava il cannocchiale su d'una mira lontana, e si faceva la lettura della posizione dell'ago calamitato sul cerchio graduato. Si cambiava ago, avendo cura di non spostare l'istrumento (ciò che si otteneva colla massima facilità fissandolo con mezzi meccanici sulla sua cassetta che serviva da montante) e si faceva nuovamente la lettura. Si trasportava la bussola a qualche diecina di metri dalla roccia (punto B) sull'allineamento A — mira, e si ripetevano qui le stesse operazioni di prima.

« È chiaro che l'induzione dei due aghi sulla roccia, e quindi anche la reazione di questa, deve essere diversa; il fatto che la roccia possiede del magnetismo dimostra da per sé che essa ha subito un'induzione; perchè dunque non dovrebbe subire l'induzione più o meno forte dei due aghi? Perciò l'ago che ha maggior momento magnetico deve subire per effetto del magnetismo da esso indotto nella roccia un'attrazione maggiore di quello di minor momento magnetico, indipendentemente dall'azione attrattiva o ripulsiva, che ha luogo tra la roccia e l'ago per il loro magnetismo proprio. Se dunque l'azione della roccia sull'ago è ripulsiva, si avrà una ripulsione minore per l'ago di maggior momento magnetico; se l'azione è attrattiva, l'ago di maggior momento magnetico subirà un'attrazione maggiore che l'altro.

« Le differenze d'azimut determinate nelle due stazioni A e B per ciascuno dei due aghi saranno in generale diverse, e la loro differenza rappresenta l'effetto dovuto alla diversità di azione induttrice dei due aghi sulla roccia; per conoscere però completamente l'effetto prodotto dall'induzione di un ago, si dovrebbe scegliere il secondo tanto piccolo e debole da potere ri-

tenere eguale a zero, o almeno trascurabile, il magnetismo che esso induce nella roccia. Sperimentalmente ciò non è possibile, e del resto non torna neppure conto a rendere il magnetismo di quest'ago assai debole, perchè diminuendo la forza direttrice, cresce l'errore prodotto dall'attrito sul perno, e le indicazioni della bussola verrebbero affette da un errore forse più forte di quello prodotto dal magnetismo indotto dall'ago nella roccia.

« Per rendere più sensibile la differenza di attrazione che subiscono i due aghi, ho scelto rocce orientate in modo che gli aghi non avessero a disporsi nè parallelamente nè normalmente ad esse, ma in un azimut intermedio. E ne è chiara la ragione: nel 1° caso l'induzione dei due poli sulla roccia sarebbe eguale, e non produrrebbe per conto suo alcuna perturbazione; nel 2° caso il campo magnetico potrebbe avere la stessa direzione dell'azione perturbatrice provocata nella roccia dall'ago, e la declinazione magnetica non ne sentirebbe alcun effetto: scegliendo invece una roccia orientata in modo che l'ago acquisti una direzione rispetto ad essa intermedia tra la parallela e la normale, il polo più vicino esercita un'azione induttrice più forte che l'altro, e la perturbazione in tal modo prodotta non è mascherata dalla direzione del campo.

« L'istrumento adoperato nelle misure è una bussola di declinazione, munita di cannocchiale, di eccellente costruzione, appartenente all'Istituto fisico dell'Università romana. L'ago calamitato pesa gr. 16.09, è lungo cm. 16.29, ed il suo momento magnetico è 538.1 unità C. G. S. A ciascuna estremità è fissata una punta corta e finissima di ottone, la quale si muove sopra le divisioni del cerchio graduato. Il cappelletto è di agata e poggia sopra un perno acutissimo di acciaio temperato, che si può colla massima facilità togliere e cambiare. La gradazione in terzi di grado molto fine è fatta su d'uno specchio per potere evitare l'errore di paralasse, e le letture fatte coll'aiuto di un microscopio semplice sono esatte a 2'. L'ago di ricambio è lungo solo cm. 6.0 e pesa gr. 9.417; ma ai suoi estremi sono aggiunte due solide appendici di alluminio, che lo rendono dello stesso peso, forma e lunghezza del primo; il suo momento magnetico è 94.2 un. C. G. S., ed è quindi 5.71 volte minore di quello dell'ago normale della bussola.

« Per stabilire il grado di fiducia che meritano le misure, ho determinato l'errore proveniente dall'attrito dell'ago sulla punta, in conseguenza del quale esso non ritorna esattamente alla sua posizione d'equilibrio, quando venga spostato. A tale scopo adattai all'ago un piccolo specchietto, e lo collocai sul suo perno entro una scatola a pareti di vetro. Le posizioni d'equilibrio prese dall'ago dopo essere stato smosso venivano determinate coll'aiuto di cannocchiale e scala. Essa era posta a tale distanza dallo specchio, che un millimetro rappresentasse uno spostamento angolare di 1'. È inutile dire che gli spostamenti ottenuti venivano corretti per le variazioni della decli-

nazione, sicchè essi rappresentano esclusivamente l'errore di accomodamento sul perno.

« Le varie serie di misure fatte mostrano un rilevante accordo tra le successive posizioni d'equilibrio prese dall'ago, qualora si abbia cura volta per volta di dare alla cassetta dei leggerissimi urti, prima che l'ago si fermi definitivamente: quando non si usi tale precauzione, si possono avere fra una lettura e la successiva delle differenze, che salgono anche sopra i 4'.

« Riporto nella seguente tabella gli scartamenti dal medio aritmetico ottenuti in tre serie di confronti in condizioni diverse: la 1^a colonna dà gli scartamenti (espressi in minuti primi) dal medio quando l'ago era posto sopra una punta di acciaio e la cassetta non veniva scossa; la 2^a colonna dà gli scartamenti ottenuti quando l'ago era posto sulla stessa punta, ma la cassetta veniva assai leggermente scossa; la 3^a colonna dà gli scartamenti ottenuti quando l'ago era posto sopra una punta di platino-iridio e la cassetta veniva scossa.

TABELLA I.

I	II	III
— 0'.71	+ 0'.24	+ 0'.07
+ 0.39	+ .34	+ .23
— 2.01	+ .04	— .43
+ 0.19	— .06	+ .63
— 2.41	+ .14	— .13
+ 1.69	— .16	+ .13
+ 0.49	— .06	— .07
+ 1.79	— .06	+ .03
+ 0.59	— .16	— .27
—	— .26	— .17

« Gli errori medi di una osservazione sono nei tre diversi casi rispettivamente

$$\pm 1'.46 \quad \pm 0'.17 \quad \pm 0'.29$$

« Si scorge quindi, che quando si ha la precauzione di dare dei leggerissimi urti alla bussola, l'errore che si commette per l'accomodamento dell'ago sul perno è affatto trascurabile, siano i perni d'acciaio o di platino-iridio. Del resto ad un risultato quasi eguale sono arrivati Schmidt ⁽¹⁾ e Breithaupt ⁽²⁾

⁽¹⁾ *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, vol. VIII, 1888, p. 311 e vol. IX, 1889, p. 71.

⁽²⁾ *Idem.* vol. VIII, p. 358.

che hanno misurato l'effetto nocivo dell'attrito di aghi sopra perni di vari metalli. Hellmann (1) ha invece ottenuto delle differenze molto più marcate.

« Conosciuto così il metodo seguito nelle misure e la sensibilità dell'istrumento adoperato, riassumo nella Tabella II i risultati ottenuti in varie località sulla differenza di azione dei due aghi su rocce di diversa natura e forza magnetica. La 1^a colonna contiene il nome della località, la 2^a colonna dà la natura della roccia esplorata, la 3^a colonna l'azione (attrazione o ripulsione) della roccia sul polo dell'ago calamitato vicino ad essa, la 4^a e 5^a colonna contengono rispettivamente le differenze di azimut avute per l'ago grande e per il piccolo, la 6^a colonna dà le differenze tra i valori della 4^a e 5^a colonna: esse rappresentano la differenza tra la perturbazione dovuta all'induzione dell'ago di maggior momento magnetico e quella dovuta al secondo ago.

TABELLA II.

I	II	III	IV	V	VI
Ponte Nomentano	tufo litoide	Attraz.	0° 17'.2	0° 16'.1	+ 1'.1
Valle di Pietralata	"	"	4 25.0	4 26.1	— 1.1
Valle d'Egeria	"	Ripuls.	6 22.4	6 22.7	+ 0.3
"	"	"	6 29.4	6 30.2	+ 0.8
Valle della Caffarella	pozzolana	Attraz.	7 4.5	7 4.9	— 0.4
III Kilom. dell'Ardeatina	"	"	7 0.0	6 59.8	+ 0.2
Arco di Nerola (Poli)	tufo	"	7 28.5	7 27.5	+ 1.0
Valle di Pietralata	"	"	7 55.7	7 45.7	+ 10.0
Ponte della Foce	pozzolana	"	9 34.3	9 21.0	+ 13.3
Ponte Buttero	lava basalt.	"	43 41.9	42 58.5	+ 43.4

« Dall'esame di questa tabella risulta, che le differenze di azimut trovate per i due aghi, sono press'a poco eguali fino a che la perturbazione prodotta dalla presenza della roccia non supera 7°; ma al disopra di questo limite i due aghi subiscono evidentemente una sensibile differenza di azione magnetica: l'attrazione esercitata dalla roccia sull'ago di maggior momento magnetico è più grande di quella esercitata sull'ago piccolo. E tale differenza di azione è tanto più marcata, quanto maggiore è la perturbazione dovuta alla roccia, ossia quanto maggiore è l'intensità magnetica di questa. Faccio notare che in tutte le diverse località la bussola veniva sempre collocata a circa 30 cm. dalla roccia, e che quindi le differenze trovate non dipendono

(1) Carl, *Repertorium*, vol. XVI, 1880, p. 188.

da variazione della distanza. Quindi la maggior attrazione subita dall'ago di maggior momento magnetico non dipende unicamente dal magnetismo da esso indotto nella roccia, ma anche dalle condizioni magnetiche della roccia e del terreno circostante.

« Un esempio assai caratteristico, che due aghi di diverso momento magnetico sotto l'azione attrattiva o ripulsiva di una roccia risentono in diversa misura l'effetto dovuto alla reciproca induzione fra ago e roccia, è dato da misure che feci presso il blocco di lava basaltina con punto distinto nella vicinanza di Ponte Buttero, descritto dal prof. Keller nella sua *Guida itineraria delle principali roccie magnetiche del Lazio*. Collocai la bussola a varie distanze dal blocco, determinando sempre in ogni stazione col solito metodo dei tre punti la differenza d'azimut per ciascuno dei due aghi. Il polo sud di essi era spiccatamente più vicino di quello nord e veniva attratto.

« Nella seguente tabella sono riassunti i risultati avuti: la 1^a colonna contiene le varie distanze del blocco dal centro d'oscillazione degli aghi nelle varie stazioni. La 2^a e 3^a colonna contengono le differenze d'azimut trovate nelle varie stazioni rispettivamente per l'ago grande, e per quello piccolo; la 4^a colonna contiene in fine le differenze tra la perturbazione prodotta nelle varie stazioni dal magnetismo indotto dall'ago grande, e quella prodotta dal piccolo e sono eguali alle differenze tra i valori della 2^a e 3^a colonna.

TABELLA III.

I	II	III	IV
m. 0.36	43° 41'.9	42° 58'.5	+ 0° 43'.4
„ 0.55	33 1.4	32 23.8	+ 37.6
„ 0.76	24 26.2	24 1.5	+ 24.7
„ 1.065	14 9.9	13 55.5	+ 14.4
„ 1.50	7 15.7	7 15.8	— 0.1

« Anche dall'esame di questa tabella risulta che l'ago grande subisce un'attrazione molto maggiore del piccolo, ma questa differenza di attrazione va successivamente diminuendo colla distanza fino ad annullarsi quando la perturbazione prodotta dal blocco è di 7°15'.

« *Conclusione.* — Da quanto di sopra ho esposto risulta che nelle ricerche sul magnetismo delle roccie il magnetismo indotto dall'ago dell'istrumento di misura, quale si adopera comunemente, non influisce sensibilmente sulle misure, fino a che l'azione perturbatrice delle roccie non è molto grande, ma oltrepassato un certo limite l'effetto dell'induzione tra l'ago e la roccia non è più trascurabile e con aghi di diverso momento magnetico si hanno deviazioni diverse.

« Nel caso particolare delle rocce vulcaniche del Lazio, se si ommettono i punti distinti, si può essere in generale certi, che i valori ottenuti, collocando l'istrumento di misura a distanza sufficiente ma presso a poco sempre eguale, rappresentano effettivamente il magnetismo proprio delle rocce, non essendo molto frequenti i punti in cui la perturbazione superi 7°. Perciò nelle mie ricerche successive non terrò di regola conto del magnetismo indotto dall'ago, ma ogni qualvolta però mi sarà possibile, esaminerò rocce orientate in modo che l'induzione tra ago e roccia sia minima ».

Fisica terrestre. — *Sulle indicazioni strumentali del terremoto giapponese del 22 marzo 1894.* Nota di GIULIO GRABLOVITZ, presentata dal Corrispondente TACCHINI.

« Dall'anno 1886, cioè da quando le ricerche geodinamiche, sotto il nuovo indirizzo dato dal Governo agli studi sismici, vennero dirette in modo speciale all'analisi dettagliata dei vari movimenti del suolo che costituiscono il terremoto ⁽¹⁾, la sismologia andò acquistando nuove cognizioni e conquistando nuovi orizzonti, cui invano aspiravano i mezzi primitivi od i metodi non appropriati del tempo addietro.

« Vero si è peraltro che non mancano osservazioni anteriori in cui l'odierno sismologo deve apprezzare l'oculatezza di singoli osservatori che, inconsci delle nuove teorie e dei metodi moderni, diedero tuttavia importanza a fatti misteriosi, attribuendoli già allora a disturbi d'indole tellurica; e così dicendo voglio alludere ad oscillazioni relativamente ampie sorprese in pendoli di varia lunghezza (da cui sorse il tromometro), nelle livelle astronomiche ecc. senza palese perturbazione della quiete del suolo.

« Ciononpertanto i mezzi d'osservazione in oggi esistenti sono ancora ben lungi dal dare il giusto peso a qualsiasi forma di movimento del suolo; gli strumenti esistenti hanno semplicemente apportato nuova luce nell'argomento, ed ora conviene aspettare da future ricerche la soluzione del problema meccanico, il quale è senza dubbio complesso.

« In oggi infatti è accertata la produzione di oscillazioni di svariatisimi periodi ed ampiezze. Da quelle rapidissime e minute, ma rovinosissime, che costituiscono i terremoti vibratorii nell'epicentro, a quelle lentissime ed ampie che passano inavvertite ai nostri sensi, ma sono le più grandiose e son dovute alla propagazione da centri lontani, il divario è tanto grande che invano si aspetterebbe da uno solo degli strumenti esistenti la registrazione di ogni qualità di moti.

(1) Veggansi gli Annali 1886 dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica: *Prefazione* del prof. P. Tacchini, *Relazione* dello scrivente e *Memoria* del meccanico Brassart.

« Il principio della massa stazionaria certo costituisce in oggi il cardine dell'analisi dei moti del suolo; ma allorchè le oscillazioni sismiche sono di una certa lentezza (specialmente da un minuto secondo in più), non abbiamo strumento in cui la massa raggiunga in pratica la stazionarietà effettiva, la quale viene turbata dalle condizioni strumentali e principalmente dalla tendenza alla posizione di riposo, da resistenze e da attriti impossibili a togliersi completamente. Quando, all'opposto, i moti sono minutissimi e rapidissimi, in guisa da dare l'impressione d'un suono (rombo) la necessità della amplificazione meccanica per la registrazione viene contrariata dall'inerzia delle leve impiegate a tale scopo, le quali certamente non possono seguire nella sua immensa rapidità il moto che dovrebbero registrare amplificato.

« Per tali motivi la massa stazionaria non è valsa finora a registrare soddisfacentemente che le oscillazioni avvicinandosi con la frequenza di 2, 3 o 4 per secondo o poco al di fuori di questi limiti.

« Soddisfacenti risultati si hanno in oggi dai pendoli lunghi (da 5 a 10 metri) con masse di parecchi miriagrammi e perfino d'un quintale, mediante i quali si ottiene la registrazione di oscillazioni aventi periodi completi di 10, 20 e più minuti secondi. Ma giova considerare che dessi non fungono più quali masse stazionarie, ma quali gravi pendolari che mantengono la verticale alla presenza di vere ondulazioni della superficie terrestre; si tratta insomma, non più di movimenti *lineari*, ma di movimenti *angolari*.

« E che tali movimenti sieno angolari non v'ha alcun dubbio; vero si è che a stretto rigore anche questa qualità di moto si può scindere nelle tre componenti lineari, ma nello stato presente dei mezzi di osservazione non si può ancora aspirare alla diretta registrazione di tali componenti, perchè per ottenerla converrebbe avere il modo di librare la massa in modo da renderla perfettamente astatica in qualunque senso, od almeno tanto vicina all'astaticità, che la durata delle sue oscillazioni in qualunque direzione dello spazio corrispondesse almeno al triplo delle più lunghe onde sismiche; la risoluzione di tale problema in pratica è resa oltremodo difficile dalla necessità di ridurre gli attriti e le resistenze al di là di quanto siasi finora ottenuto nei più delicati apparecchi d'altro genere, perchè in caso diverso la massa seguirebbe senz'altro i lentissimi movimenti dell'ambiente, anzichè mantenersi inerte.

« I sistemi meccanici che in oggi ci forniscono la prova della realtà di queste grandi onde, si possono concretare in due generi, cioè nei pendoli e nelle livelle; i pendoli si possono suddividere in tre specie, cioè:

« 1) Pendoli lunghi (da 5 a 10 metri) con oscillazioni complete di cinque secondi in più;

« 2) Pendoli comuni (di un metro, come nei sismometrografi o di m. 1,50 come nei tromometri) che battono il secondo o poco più;

« 3) Pendoli orizzontali o conici, e pendoli astatici di varie forme, il

cui periodo oscillatorio può venire regolato a piacimento entro limiti larghissimi.

« Nei pendoli lunghi il movimento angolare si traduce in un movimento lineare, che amplificato coi sistemi registratori ordinari è abbastanza apprezzabile; senonchè il loro periodo d'oscillazione è già tanto lungo da equivalere in qualche caso a quello del suolo, talchè i moti sono suscettibili all'amplificazione derivante dal sincronismo. È certo peraltro che al passaggio di onde alquanto più lunghe, essi si dispongono sulla verticale senz'acquistare oscillazioni proprie, se non in grado trascurabile.

« I pendoli che battono il secondo all'incirca hanno il vantaggio di disporsi sulla verticale quasi immediatamente al passaggio di onde di lunga durata, ma il moto angolare si traduce in un moto lineare troppo piccolo per riuscire registrabile nelle attuali condizioni dei registratori meccanici.

« I pendoli orizzontali ed astatici, avendo in generale le proprietà dei pendoli lunghi, hanno per la piccola dimensione il vantaggio d'andare esenti da perturbazioni inevitabili nei pendoli lunghi, ma in cambio l'analisi dei loro moti (specialmente nei pendoli orizzontali con lieve inclinazione) riesce molto complessa, senza considerare che un movimento alquanto ampio potrebbe anche invertire meccanicamente le condizioni della loro posizione di quiete.

« In tutti i sistemi pendolari poi, l'inerzia delle masse è causa di movimenti strumentali più o meno pregiudizievole alla fedeltà delle registrazioni.

« La livella al contrario è pressochè completamente scevra d'inerzia; del resto ha la proprietà del pendolo di lunghezza pari al suo raggio di curvatura assiale, talchè quando la durata dell'oscillazione del suolo è alquanto minore dell'oscillazione strumentale, la bolla non giunge ad acquistare la sua nuova posizione d'equilibrio durante l'intervallo stesso; perciò l'angolo dato dalla livella può essere inferiore al vero, e l'osservatore può trarre un criterio di tale inferiorità dal periodo delle ondulazioni.

« Da tutto ciò si comprende che la sismografia ha ancora un ideale da raggiungere, cioè quello della massa assolutamente stazionaria, altrimenti detta punto fermo o neutro; ma intanto conviene trarre profitto dai mezzi esistenti.

« Il servizio nell'isola d'Ischia essendo stato fondato col concetto di studiare le manifestazioni locali, io ebbi nella scelta e nell'impianto degli strumenti questa e non altra mira nei primordi; perciò anche nei sismometrografi a tre componenti mantenni il principio di tollerare lievi attriti, condizione convenientissima per lo studio dei movimenti bruschi del suolo, allo scopo di smorzare i moti residui dipendenti dall'inerzia ed altri moti strumentali capaci talvolta di disordinare le registrazioni in modo da renderle indecifrabili.

« Tuttavia essendo utilissima pure l'osservazione di terremoti lontani, eliminai per quanto possibile gli attriti nel sismometrografo a registrazione continua, ed ora mi occupo pure dell'impianto d'un pendolo di 4 metri con una massa di 90 chilogrammi. Ho inoltre impiantato una coppia di pendoli

conici destinati, per le ragioni anzidette, a dare il solo allarme mediante il contatto elettrico, talchè al primo giungere d'una ondulazione lontana l'osservatore può ispezionare tosto le livelle, che a mio giudizio costituiscono il mezzo più adatto a tal genere d'osservazione. E di ciò mi convinsi viemmaggiormente in occasione del terremoto del 22 marzo a. c.

« Come ebbi a comunicare al sig. direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, il mio assistente, incaricato di osservare le livelle quanto più spesso è possibile, le sorprese alle 12^h 22^m di quel giorno in ampia oscillazione. Tali livelle, impiantate nell'osservatorio della Grande Sentinella in Casamicciola, mi furono fornite dall'Istituto ottico meccanico Salmoiraghi di Milano; la scala è divisa in 90 parti equidistanti di 3 mm.; nella livella situata nel senso del meridiano una parte corrisponde ad 1" 52; in quella situata nel senso del parallelo una parte equivale ad 1" 55. Tutte e due sono solidamente fissate al pilastro sismico ed ora, dopo un periodo di adattamento, si mantengono pressochè immobili o subiscono lente e piccole variazioni, talvolta in coincidenza con fenomeni sismici lontani.

« All'ora indicata del 22 marzo la bolla della livella Sud-Nord oscillava di 4 parti (corrispondenti a 6" 08) e quella Ovest-Est oscillava di 2 in 3 divisioni (3" 10 a 4" 65 = in media 3" 875); ogni oscillazione completa durava circa 6 minuti secondi; le oscillazioni verso Nord della prima coincidevano con quelle verso Est della seconda, talchè ne risulta la direzione di N. 32° 30' 39" E. a S. 32° 30' 39" W. e l'ampiezza di 7" 21, certamente inferiore alla vera per le ragioni anzidette. L'estremità meridionale della bolla Nord-Sud che in istato di quiete prima e poi segnava 13' 9, nelle sue escursioni verso Sud toccava appena 13, mentre in quelle verso Nord arriva a 17; da questa circostanza che non ammetteva incertezza, mi parve poter dedurre che, a somiglianza delle onde liquide, la maggiore inclinazione ne accusasse la provenienza, nel qual caso il radiante si sarebbe trovato dal lato di N.-E.

« Avvisato del fenomeno mi recai sul posto con la speranza di sorprendere l'arrivo dell'onda dalla parte opposta, ma in tre ore d'attenta osservazione nulla più avvenne.

« Calcolato il circolo massimo terrestre coincidente con la direzione osservata (trascurando lo schiacciamento), ne ottengo i seguenti elementi:

Longitudine del nodo ascendente coll'equatore	= 22° 35' W. Casamicciola
	ossia 9° 0' W. Greenwich
Inclinazione sull'equatore	= 65° 58'

« Questo circolo massimo, da Casamicciola verso N-E, dopo la nostra penisola incontra l'Ungheria, la Russia e la Siberia e passando al Nord del Giappone prosegue in pieno Oceano Pacifico. Esclusi i paesi vicini stante la lunga durata delle ondulazioni, non mi parve dover ricercare l'epicentro nella Russia o nella Siberia, regioni di poca o niuna attività sismica, ma mi sof-

fermai al Giappone, ed ecco alcune coordinate corrispondenti in quei paraggi al circolo massimo indicato, con le distanze da Casamicciola, da cui si scorge che la linea calcolata passa pel Nord dell'isola Yeso, cioè:

Longitudine Est Greenwich	Latitudine Nord	Distanza da Casamicciola
135°	52° 49'	Km. 8185
140°	49° 7'	" 8725
145°	44° 30'	" 9362

« L'apprezzamento della distanza dell'epicentro, pure quando si faccia a base matematica, anzichè sui concetti qui sopra esposti, è sempre vago, essendo variabile il cardine principale a ciò necessario, vale a dire la velocità di propagazione. Questa può essere costante tra un centro sismico ed una determinata stazione, perchè in tal caso i terreni attraversati sono sempre gli stessi, ma l'osservazione ci rivela che la velocità di propagazione varia a seconda del mezzo.

« L'istante del primo urto dell'epicentro, ancorchè non se ne conosca la posizione, può venire fornito con grande approssimazione dal ritardo in cui vediamo giungere le onde trasversali rispetto alle longitudinali, perchè sappiamo che la velocità delle prime è la metà di quella delle seconde; occorre peraltro che le une e le altre arrivino, e con insufficiente intervallo, nel nostro punto d'osservazione, mentre quando l'epicentro è vicino facilmente si sovrappongono e confondono, e quando esso è molto distante possono arrivare le onde trasversali e non le longitudinali. Quest'ultimo caso è forse il più frequente nell'isola d'Ischia che in base a qualche fatto credo essere poco sensibile alle scosse longitudinali di centri esteriori; talvolta le scosse del continente arrivano estremamente indebolite fino alla parte orientale dell'isola senza estendersi.

« Nel terremoto del 22 marzo non vi fu traccia di onde longitudinali in questi strumenti, ma questa non è ancora una prova assolutamente negativa. A stabilirla varrà l'impianto, che sto facendo, d'un pendolo lungo, destinato appunto allo studio dei terremoti lontani, mentre per eventuali fenomeni locali è opportuno mantenere nelle loro presenti condizioni gli strumenti già impiantati.

« Pertanto, a calcolare la probabile distanza dell'epicentro mi valgo dei dati del supplemento geodinamico N. 103 del R. Ufficio Centrale, secondo cui il primo urto arrivò a Rocca di Papa, a Siena ed a Roma ad 11^h 37^m istante che senza dubbio si riferisce alle onde longitudinali. A 12^h 8^m appaiono a Rocca di Papa le lunghe oscillazioni ed a ciò s'accordano le altre relazioni; a Casamicciola le livelle trovate ancora in quiete *poco prima* dei confronti cronometrici che si fanno al mezzodì vero (12^h 11^m 18^s t. m. MEC) vengono

sorprese nella massima agitazione a $12^h 22^m$, talchè nulla contraddice quella esplicita indicazione delle $12^h 8^m$. Ritenuta la velocità di propagazione delle onde longitudinali = 300 chilometri al minuto primo e quelle delle trasversali = 150 km., l'istante t del terremoto all'epicentro e la distanza di questo d , si ricavano dalle seguenti equazioni:

$$t + 300 d = 11^h 37^m = 697^m$$

$$t + 150 d = 12^h 8^m = 728^m$$

da cui:

$$t = 666^m = 11^h 6^m; \quad d = 9300 \text{ km.}$$

Questi risultati erano già stati da me ottenuti e comunicati senza pretesa ad altri studiosi; quando venni a conoscenza del terremoto avvenuto nella parte settentrionale del Giappone a $7^h 28^m$ pom. di tempo medio locale, pari ad $11^h 8^m$ MEC del 22 marzo.

« A dissipare i dubbi che ancora si muovono sulla realtà della forma geometrica sottintesa dall'espressione di *onda trasversale*, credo che bastino le osservazioni alle livelle ed ai pendoli lunghi, non potendosi immaginare altra forma verosimile che giustifichi completamente quegli spostamenti evidentemente *angolari* a periodo così lento. Per ottenerne una prova più diretta converrebbe fissare due cannocchiali ad angolo retto fra di loro, rivolti verso due punti bene individuati, allo scopo d'osservare le oscillazioni non appena gli strumenti sismici dessero l'allarme. In base a calcoli eseguiti posso asserire che la massima escursione angolare della mira si otterrebbe qualora la distanza tra questa ed il cannocchiale fosse = $0' 65$ della lunghezza dell'onda completa; questa peraltro è variabile; pure se la lunghezza delle grandi onde si aggira intorno a 50 chilometri, la distanza più conveniente delle mire dal cannocchiale sarebbe di circa 30 km.

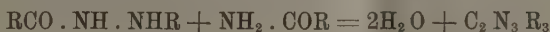
« Questo mezzo peraltro è sempre subordinato alla visibilità della mira ed alla fermezza e chiarezza dell'immagine, per cui resta a desiderarsi l'invenzione della massa astatica per la componente verticale che nel moto ondoso è la più ampia. Il poter conquistare direttamente questa componente con mezzi meccanici, fornirebbe la prova più sicura della sua realtà ed a ciò tendono in oggi le mie esperienze ».

Chimica. — *Nuova sintesi del triazolo e dei suoi derivati* ⁽¹⁾.

Nota di GUIDO PELLIZZARI, presentata dal Socio PATERNÒ.

« Dopo le ricerche di Bladin sulla dicianfenilidrazina ⁽²⁾ che condussero alla scoperta dei composti triazolici e dopo gli studi di Andreocci sui derivati del pirrodiazolo ⁽³⁾ che portarono un largo contributo alla conoscenza di questa serie di sostanze, pochi altri lavori furono fatti su questo argomento. Soltanto nell'ultimo anno Bamberger e Guyter ⁽⁴⁾; Widman ⁽⁵⁾; E. Fischer e Müller ⁽⁶⁾ ottennero con nuove reazioni dei composti triazolici. Io ⁽⁷⁾ ho ottenuto i guanazoli, e in collaborazione col dott. Cuneo ⁽⁸⁾, l'urazolo; sostanze che devono considerarsi come derivati del triazolo. Fra tutte le reazioni studiate nessuna ha però fin qui condotto direttamente alla sintesi del triazolo o dei suoi derivati alchilici, e, se alcuni di essi furono preparati, non fu che in seguito a molteplici reazioni sopra i prodotti ottenuti coi diversi citati procedimenti.

« Un metodo diretto di sintesi del triazolo e dei suoi derivati e nello stesso tempo facile e speditivo, è dato dalla reazione che espongo in questa Nota e che consiste nell'azione delle idrazidi sopra le amidi

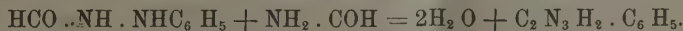


« Per ora non l'ho applicato che alla sintesi del *triazolo* e dell'*1-fenil-triazolo*; ma questi due esempi mi sembrano sufficienti per prevedere la estensione del metodo e per discutere il modo col quale la reazione si compie.

« Il triazolo si ottiene per azione della monoformilidrazide sulla formamide



e il feniltriazolo per l'azione della formilfenilidrazina sulla formamide



(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Ber. 1885, p. 1549 e 2907; 1886, p. 2598 e seguenti annate.

(3) Ricerche eseguite nell'Istituto chimico di Roma nell'anno 1891-1892.

(4) Ber. 1893, p. 2385.

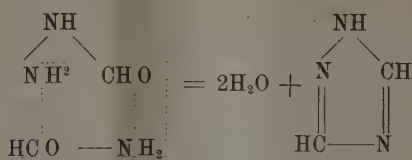
(5) Ber. 1893, p. 2612.

(6) Ber. 1894, p. 185.

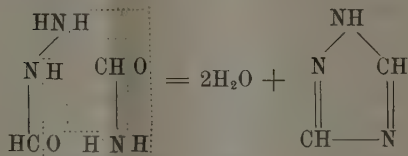
(7) Gazz. chim. it. 1891, p. 141 e 1894, fasc. VI.

(8) Annali di Chim. e Farmacologia 1894, fascicolo di maggio.

« La formazione del triazolo in questa reazione può essere interpretata secondo i due seguenti schemi:

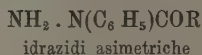
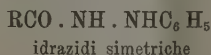


oppure

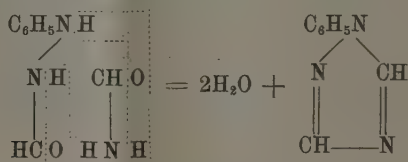


« La formazione dei C derivati, che spero si otterranno colle idrazidi e colle amidi derivanti dagli omologhi dell'acido formico, non potrebbe servire a risolvere la questione, ma quella degli N derivati per mezzo delle idrazine primarie, può subito far conoscere quale è l'andamento della reazione.

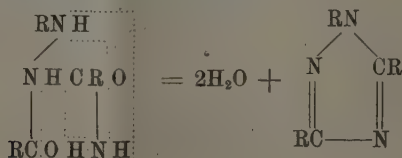
« Infatti le idrazine primarie, ad esempio la fenilidrazina, danno due specie di derivati coi radicali acidi



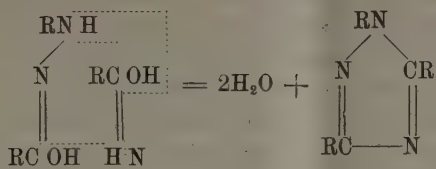
« Le prime che sono quelle ordinarie e che si ottengono cogli stessi metodi coi quali si formano le anilidi, possono reagire soltanto nel modo indicato nel secondo schema, mentre le asimetriche, che si ottengono dai cloruri dei radicali acidi sopra la sodio fenilidrazina, potrebbero solo reagire secondo il primo schema. La formazione quindi dell'1-feniltriazolo colla formilfenilidrazina ordinaria non può interpretarsi che in questo modo:



e perciò la reazione generale viene espressa così:



« Se per le amidi e per le idrazidi si vuole ammettere che possano agire anche secondo la forma tautomera ossidrilica, allora la reazione potrà esprimersi così



Azione della formilidrazide sulla formamide.

« La monoformilidrazide fu preparata secondo quelle brevi indicazioni date dal prof. Curtius ⁽¹⁾ e che riassumono diversi lavori eseguiti dai suoi allievi sopra l'idrazina. La formilidrazide fu preparata dal sig. Schöfer e fonde a 54°. Ho aggiunto quindi a piccole porzioni, ed evitando il riscaldamento, l'etere formico alla quantità equimolecolare di idrato d'idrazina, e lasciata la miscela in riposo per un giorno, fu poi concentrata nel vuoto sull'acido solforico. Si ebbe così il prodotto in cristalli bianchi fusibili a 54° e per meglio assicurarmi che veramente era monoformilidrazide, fu fatto il seguente dosamento d'azoto.

gr. 0,1006 di sostanza fornirono 40,1 cc. d'Azoto a 21° e 750^{mm} corrispondenti a gr. 0,0467 di Azoto

	trovato per cento	calcolato per HCONH.NH ₂
N	46,69	46,60

« Quantità equimolecolari di formilidrazide e formamide, poste in un palloncino a distillazione frazionata, furono scaldate a bagno di rena. A leggero calore la sostanza solida si scioglie completamente e si ottiene un liquido omogeneo leggermente paglierino. Ben presto comincia a reagire e si ha sviluppo di vapor d'acqua e di ammoniac.

« Non aumentando la temperatura, la reazione procede regolarmente e il termometro immerso nei vapori si mantiene verso 100°. Dopo una mezz'ora circa si aumenta la temperatura e la distillazione si compie, mentre il termometro segna temperature più elevate ed arriva a 260°. Allora si raccoglie separatamente il triazolo quasi puro che distilla, e bisogna anzi riscaldare il tubetto del matraccio, altrimenti solidificandosi l'ostruisce e si va incontro ad una rottura. Per ovviare a ciò si può fare la reazione in una stortina, ma allora le indicazioni del termometro non sono così giuste come con un palloncino. Durante la distillazione il liquido bollente acquista una tinta sempre più scura, e alla fine si separa un po' di sostanza solida color marrone che rimane nel matraccio e produce qualche sussulto. Il liquido che distilla avanti 260°

(1) Ber. 1893, p. 403.

ha dapprima reazione alcalina per l'ammoniaca che si forma, poi acquista reazione acida, probabilmente per un po' di acido formico, e quindi nuovamente ritorna alcalina per nuova quantità d'ammoniaca, contiene anche una certa quantità di triazolo che si può in parte recuperare con una seconda distillazione. Da 15 grammi di formilidrazide ottenni gr. 8, 7 di triazolo, che corrisponde al 50 % della quantità teoretica. Esso è quasi puro e per sublimazione si può avere purissimo. Così l'ottenni in lunghi aghi bianchi fs. a 120-121°. La sua identificazione risulta dal punto di fusione, dal punto di ebullizione, dalla proprietà di sublimarsi a bassa temperatura, dalla grande solubilità nell'acqua e nell'alcool da cui però cristallizza in lunghi aghi; anche dall'acqua si può ottenere in grossi prismi lunghi circa un centimetro.

« La soluzione acquosa dà i noti precipitati col nitrato d'argento, col cloruro mercurico e col solfato di rame:

gr. 0,930 di sostanza dettero 49,4 cc. d'Azoto a 25°,5 e 750^{mm} corrispondenti a gr. 0,0568 d'Azoto
e su 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_2N_2H_2$
N	61,07	60,87

« In questa azione della formilidrazide sulla formamide avvengono certamente delle reazioni secondarie, e a ciò è dovuta la produzione di ammoniaca che si nota fin da principio della reazione. Già per se stessa ciascuna di queste due sostanze scaldata si decompone; ma è ancora probabile che possano reagire in un altro senso, e cioè dare diformilidrazide eliminando appunto ammoniaca. Ho tralasciato di fare delle ricerche in proposito per non entrare nel campo di studio del prof. Curtius e dei suoi allievi. Benchè il rendimento ottenuto sia molto soddisfacente, ho speranza che possa aumentare modificando le condizioni dello esperimento. Stabilita così la reazione s'intende come si ottenga del triazolo anche partendo da altre sostanze, che reagendo fra loro si trasformino in formilidrazide e formamide. Così ad esempio l'ho ottenuto coll'idrato o col monocloridrato di idrazina e formamide (2 mol.), oppure col formiato ammonico (2 mol.). Si ottiene anche col monocloridrato di idrazina (1 mol.), cloruro ammonico (1 mol.) e formiato sodico (2 mol.).

« Però in tali modi le reazioni secondarie hanno un più ampio sviluppo e quindi il rendimento del triazolo è minore.

Azione della formilfenilidrazide sulla formamide.

« La formilfenilidrazide fu ottenuta la prima volta da me per azione della fenilidrazina sulla formamide (1), ma dovendone preparare una certa quantità, ho preferito di fare agire l'etere formico sulla fenilidrazina, giacchè si ha subito un prodotto puro ben cristallizzato fusibile a 145°.

« Per la preparazione del feniltriangolo è utile prendere un eccesso di for-

(1) Gazz. chim. it. 1886, pag. 200.

mamide, giacchè poi si separa facilmente e il rendimento del prodotto è maggiore che colle quantità calcolate.

« Parti eguali di formilfenilidrazide e formamide furono scaldate a bagno di rena in un palloncino a distillazione frazionata.

« A leggero calore si forma un liquido omogeneo un po' colorato in rosastro che presto entra in reazione sviluppando vapor d'acqua e ammoniac. Si lascia compiere la reazione in modo che essa non sia troppo vivace, ed il termometro immerso nel vapore si mantiene così a 100° per circa mezz'ora, poi si aumenta la temperatura e si completa la distillazione, mentre nel palloncino non rimane che un po' di materia pastosa e scura. Benchè si possa subito separare fra 260 a 270° una gran parte di feniltriazolo, ho trovato più conveniente non tener conto delle varie porzioni che distillano alle diverse temperature, ma raccogliere invece tutto insieme il distillato e quindi in un imbuto a rubinetto sbatterlo con acqua ed etere. Si separa il liquido acquoso che contiene ammoniac, formiato ammonico e formamide, e nell'etere rimane il feniltriazolo e un po' d'anilina. Si dissecca la soluzione eterea con qualche pezzetto di cloruro di calcio, e quindi si distilla in un palloncino a distillazione frazionata.

« Dopo che l'etere è passato il termometro, si arresta per un po' di tempo fra 180-190° ed allora distilla l'anilina; quindi sale a 266° circa ed allora passa il feniltriazolo puro che dopo poco si rapprende in una massa cristallina. La porzione che distilla avanti 266° si rettifica un'altra volta, e così si ricava un altro poco di prodotto. Da 20 grammi di formilfenilidrazina ottenni 14 grammi di feniltriazolo ossia circa il 70 per %. Una certa quantità di feniltriazolo però passa sempre coi vapori di anilina e quindi il rendimento è certamente superiore a quello surriferito.

« Il feniltriazolo ottenuto mostra tutte le caratteristiche descritte dall'Andreocci. Fonde a 47°, distilla col vapor d'acqua, è solubilissimo nei comuni solventi fuori che nell'acqua. Sciolto nell'acido cloridrico dà col cloruro di platino un cloroplatinato che ha le proprietà già conosciute.

« *Cloroplatinato di feniltriazolo* $(C_8H_7N_3HCl)_2PtCl_4$ cristallizzato dall'acido cloridrico concentrato e fumante si ottenne in aghi color rosso-arancio contenenti due molecole di acqua di cristallizzazione che perde a 100°.

Tenuto a 180° fino a peso costante si trasforma in una polvere gialla e la perdita di peso corrisponde a 2 molecole di acido cloridrico.

gr. 0,5319 di cloroplatinato seccato all'aria persero a 100° gr. 0,0259 di acqua

e a 180° la perdita di peso fu di gr. 0,0787. Calcinato dette gr. 0,1400

di Platino:

trovato per cento	calcolato
	per $(C_8H_7N_3 \cdot HCl)_2PtCl_4, 2H_2O$
$2H_2O = 4,86$	4,90
$2H_2O + 2HCl = 14,79$	14,80
Pt = 27,66	27,85

« Questo cloroplatinato bollito per poco tempo coll'acqua, come già descrisse l'Andreocci, si trasforma in una polvere gialla voluminosa insolubile, la quale corrisponde alla formula $(C_8 H_7 N_3)_2 Pt Cl_4$ e nel liquido acquoso fu riscontrato l'acido cloridrico col nitrato d'argento.

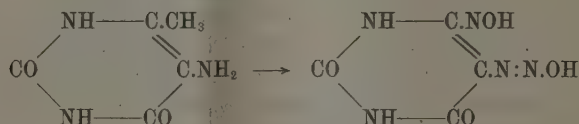
gr. 0,3064 di sostanza seccata a 100° dettero gr. 0,095 di Platino

	trovato	calcolato per $(C_8 H_7 N_3)_2 Pt Cl_4$
Pt	31,00	31,07

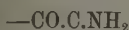
« Intendo proseguire lo studio dell'azione delle idrazidi sulle amidi onde ottenere altri derivati del triazolo, ed ho anche intraprese delle reazioni fra le idrazidi per ottenere in un modo analogo dei composti tetrazinici ».

Chimica. — *Azione dell'acido nitroso sopra l'amminouracile e sopra l'amminoacetone.* Nota di ANGELO ANGELI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

« In un lavoro pubblicato lo scorso anno ⁽¹⁾ ha accennato al fatto scoperto da Behrend ⁽²⁾ che l'amminometiluracile, per azione dell'acido nitroso dà un composto diazoico



ed ho fatto rilevare come probabilmente questo comportamento del gruppo amminico dipenda dalla presenza della catena



contenuta nella molecola di questa sostanza ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Gazzetta chimica, 23 II, 345.

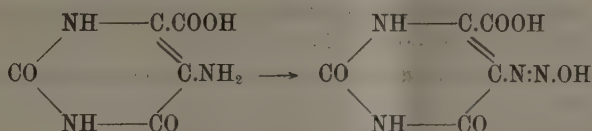
⁽²⁾ Liebig's Annalen, 245, 218.

⁽³⁾ Recentemente Philipps (Chem. Zeit. 1894, 642) e Markwald (Ber. Berichte 27, 1317) hanno studiata l'azione dell'acido nitroso sopra alcune amminopiridine da essi preparate.

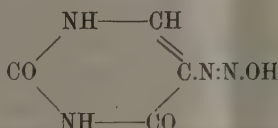
Dai risultati delle sue ricerche Philipps conclude che « le amminopiridine ed i derivati delle stesse, al pari delle ammine della serie alifatica, non sono in grado di dare diazocomposti stabili ».

Questo fatto interessante porta un nuovo appoggio alle mie vedute; il residuo piridico infatti è sprovvisto di carattere negativo.

« Anche l'acido amminouracilcarbonico si comporta in modo analogo, e per azione dell'acido nitroso dà il corrispondente diazocomposto

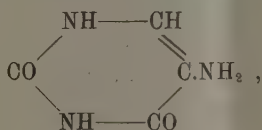


Questo acido, nelle opportune condizioni, può perdere una molecola di anidride carbonica per dare il diazouracile ⁽¹⁾



Siccome però nell'acido amminouracilcarbonico c'è la presenza di un carbossile e dal metilamminouracile si ottiene l'ossima di un diazo composto, così la trasformazione in questi casi non è netta e diretta, e la reazione si potrebbe interpretare in vario modo.

« Era quindi da vedersi se la mia ipotesi era vera, se anche l'*amminouracile* stesso, per il solito trattamento, potesse venir trasformato nel derivato diazoico corrispondente. Anche questo composto contiene infatti il gruppo caratteristico $\text{---CO} \cdot \overset{\text{I}}{\text{C}} \cdot \text{NH}_2 \text{---}$:



e perciò era da aspettarsi che da questa sostanza si dovesse ottenere lo stesso diazocomposto che si può avere dall'acido diazouracilcarbonico, per eliminazione di anidride carbonica.

« Io sono partito, secondo le indicazioni date da Behrend, dall'etere uramidocrotonico, che si ottiene condensando l'urea con l'etere acetacetico. Questo etere venne trasformato nel metiluracile dal quale, per trattamento con acido nitrico e solforico concentrati, ebbi il nitrouracile. Il nitroderivato venne in seguito trasformato nell'amminoderivato per riduzione con stagno ed acido cloridrico.

« L'amminouracile in tal modo ottenuto venne disciolto nella voluta quantità di acido cloridrico diluito, e la soluzione neutra venne trattata con soluzione acquosa e concentrata di nitrito sodico, avendo cura di raffreddare.

(¹) Liebig's Annalen, 258, 358

Dopo qualche istante si separa un precipitato rossastro cristallino, che viene purificato ricristallizzandolo con precauzione dall'acqua bollente.

« Il composto in tal modo ottenuto presenta tutti i caratteri del diazouracile preparato da Behrend ed Ernert ⁽¹⁾ dall'acido amminouracilcarbonico.

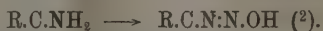
« La sua identità viene inoltre confermata dalla seguente determinazione di azoto.

gr. 0,1770 diedero c. c. 53 di azoto a 15° e 760^{mm}.

« In 100 parti :

	trovato	calcolato per C ₄ H ₄ N ₂ O.
N	35,64	35,89.

« Questo risultato prova perciò in modo non dubbio che la presenza del gruppo carbonilico, anche in questo caso, è sufficiente ad imprimere al residuo amminico la facoltà di trasformarsi nel residuo diazoico. Questo esempio presenta inoltre uno speciale interesse, giacchè dimostra che nel caso in cui il carbonio, cui è unito al gruppo amminico, sia sprovvisto di atomi d'idrogeno, il gruppo diazoico esiste a catena aperta

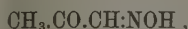


Per dare alle mie vedute un carattere di maggior generalità ho intrapreso lo studio del comportamento di altre chetoammine rispetto all'azione dell'acido nitroso. Sebbene queste ricerche sieno appena incominciate, tuttavia accennerò brevemente ad alcuni risultati i quali non lasciano dubbio veruno sulla natura dei prodotti da me ottenuti.

« Una chetoammina semplice ed interessante è l'*amminoacetone*



che io ho preparato per riduzione dell'isonitrosoacetone



(¹) Liebig's Annalen, 258, 358,

(²) Si comprende però facilmente che si potranno ottenere diazocomposti a catena aperta anche da taluni amminoderivati della forma



Per gli amminoderivati della prima forma, ancora non sono conosciuti esempi di questo genere. È noto però, dalle belle ricerche di Thiele, che l'amminoguanidina $\begin{smallmatrix} NH_2 \\ \diagup \\ C.NH.NH_2 \end{smallmatrix}$ per azione dell'acido nitroso, in soluzione nitrica, dà il nitrato di diazoguanidina $\begin{smallmatrix} NH_2 \\ \diagup \\ C.NH.N:N.NO_3 \end{smallmatrix}$, in cui il gruppo diazoico è a catena aperta. Ma quando si tratta il nitrato di diazoguanidina con i sali di acidi deboli (carbonati o acetati), oppure con soda, allora la catena si chiude per formare composti anidrici (acido azotidrico ed acido aminotetrazotico). Lo stesso vale probabilmente per tutti quei derivati diazoici (a catena aperta) che conservano ancora sufficienti proprietà basiche per poter venir salificati dagli acidi forti. Questo comportamento si potrebbe anche spiegare in altro modo. Ricordando

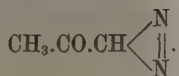
seguendo il metodo da me proposto lo scorso anno. Il cloridrato in tal modo ottenuto è identico a quello descritto da Gabriel e Pinkus (1).

« Il cloridrato dell'amminoacetone venne lasciato per molto tempo nel vuoto sopra la calce, affine di eliminare quasi completamente l'eccesso di acido cloridrico, che esso perde con grande lentezza in causa della sua forma sciropposa. La straordinaria igroscopicità infatti di questa sostanza e la difficoltà, o per meglio dire la quasi impossibilità di averla pura (finora non si è potuta analizzare) rendono difficile lo studio di queste reazioni.

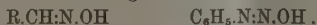
« Alla soluzione del cloridrato dell'amminoacetone nella minor possibile quantità d'acqua, in un imbuto a chiavetta, venne aggiunto etere ed alcuni pezzetti di ghiaccio e quindi trattata con soluzione concentrata di nitrito sodico. Si agita allora sollecitamente dopo aver aggiunto qualche goccia di acido solforico diluito. L'etere viene quindi lavato con carbonato sodico, e quindi, dopo averlo seccato, si evapora nel vuoto.

« Rimane un olio giallo, dotato di odore speciale, e che per azione dell'acido cloridrico si decompone con viva effervescenza. Per azione dell'acido bromidrico si decompone del pari con sviluppo d'azoto, cessato il quale si nota l'odore pungente e caratteristico del bromoacetone.

« In causa della piccola quantità di sostanza di cui io potevo disporre, non ho potuto studiare ulteriormente queste reazioni nè i prodotti che in tal modo si formano. Tale comportamento però dimostra che con tutta probabilità anche in questo caso si ottiene un composto diazoico, che altro non potrà essere che il *diazacetilmetano* (monochetazometilgliossal):



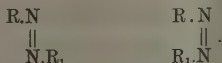
il parallelismo, da me rilevato l'anno scorso, fra i derivati dell'acido nitroso e quelli del diazobenzolo, è chiaro che la stessa analogia sussiste anche fra le ossime ed il diazobenzolo:



E siccome le ossime possono esistere nelle due forme stereoisomere



si potrebbe ammettere che lo stesso valga anche per i derivati dei diazocomposti:

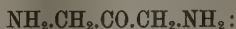


Nei composti diazoici della seconda forma dovrebbe essere maggiore la tendenza di anidrificarsi fra il gruppo R ed il residuo R₁.

Sopra queste considerazioni ritornerò a suo tempo.

(1) Berl. Berichte, 27, 2197.

Come era prevedibile, la reazione procede diversamente quando si sottoponga ad analogo trattamento il cloridrato del *diamminoacetone*



Questa sostanza è stata preparata la prima volta da Rügheimer; io però l'ho ottenuta seguendo le indicazioni di Gabriel e Posner per riduzione del diisonitrosoacetone.

« Trattando il cloridrato del diamminoacetone con nitrito sodico e quindi acidificando con una goccia di acido acetico diluito, improvvisamente avviene un copiosissimo sviluppo di azoto. In questo caso, finora, non mi è stato possibile di avere un composto diazoico. Questo fatto, come ho accennato, si poteva prevedere. Nel diamminoacetone infatti vi sono due gruppi amminici, disposti simmetricamente rispetto al carbonile. L'azione positiva dell'uno compensa il carattere negativo del gruppo carbonilico, e perciò questa sostanza si comporta rispetto all'acido nitroso come le ammine a residui positivi od indifferenti.

« In un'altra comunicazione descriverò dettagliatamente i prodotti che si ottengono dall'amminoacetone ».

ELEZIONI DI SOCI

Colle norme stabilite dallo Statuto e dal Regolamento, si procedette alle elezioni di Soci e Corrispondenti dell'Accademia. Le elezioni dettero i risultati seguenti per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Fu eletto Socio nazionale:

Nella Categoria I, per l'*Astronomia*: TACCHINI PIETRO.

Fu eletto Corrispondente:

Nella Categoria II, per la *Chimica*: PICCINI AUGUSTO.

Furono inoltre eletti Soci stranieri:

Nella Categoria II, per la *Fisica*: ROWLAND ENRICO; per la *Chimica*: VON BAEYER ADOLFO.

Nella Categoria III, per la *Geologia e Paleontologia*: PRESTWICH GIUSEPPE e HALL GIACOMO.

L'esito delle votazioni venne proclamato dal Presidente con Circolare del 17 luglio 1894; le nomine del Socio nazionale e dei Soci stranieri furono sottoposte all'approvazione di S. M. il Re.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 5 agosto 1894.

Matematica. — *Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

« Il sig. Guichard in una Nota inserita nel T. CXVI, pag. 483 dei Comptes Rendus de l'Académie des sciences di Parigi (1893) ha studiato le superficie i cui due piani principali (cioè i piani condotti per la normale tangenzialmente alle linee di curvatura) sono equidistanti da un punto fisso. Ora queste superficie, come le più generali indicate nel titolo della presente Nota, non sono che un caso particolare delle superficie considerate alla fine della mia Memoria nel T. XVIII, serie 4^a (1890) degli Annali di matematica e caratterizzate dalla proprietà che: il doppio sistema di traiettorie isogonali sotto un certo angolo costante delle linee di curvatura, le divide in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

« Nel caso particolare di Guichard, il detto angolo è di 45°, cioè il sistema di curve bisettrici delle linee di curvatura divide la superficie in rettangoli equivalenti.

§ 1.

« Indichiamo per abbreviare con Φ le superficie dotate della proprietà enunciata nel titolo ed occupiamoci della loro determinazione in coordinate tangenziali.

« Facciamo della superficie supposta Φ l'immagine di Gauss sulla sfera di raggio $= 1$ col centro nel punto fisso O e sia

$$(1) \quad ds^2 = e du^2 + g dv^2$$

l'elemento lineare sferico riferito alle immagini u, v delle linee di curvatura di Φ . Se con W indichiamo la distanza (algebrica) del piano tangente a Φ dall'origine O , per le formole di Weingarten relative alle coordinate tangenziali ⁽¹⁾, dovrà essere W una soluzione dell'equazione di Laplace

$$(2) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v}$$

e le coordinate x, y, z del punto di Φ corrispondente al punto (X, Y, Z) della sfera rappresentativa saranno date da

$$(3) \quad \begin{cases} x = WX + \frac{1}{e} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{g} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial v} \\ y = WY + \frac{1}{e} \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{g} \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial v} \\ z = WZ + \frac{1}{e} \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{g} \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial v} \end{cases}$$

« Indichiamo poi con W_1, W_2 le distanze del punto fisso O dai due piani principali di Φ ; avremo:

$$W_1 = \Sigma x \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad W_2 = \Sigma x \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial X}{\partial v},$$

cioè per le (3)

$$(4) \quad W_1 = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial W}{\partial u}, \quad W_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial W}{\partial v}.$$

« Dalla (2) seguono quindi le formole

$$(5) \quad \frac{\partial W_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_1, \quad \frac{\partial W_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_2.$$

« Ma si ha per ipotesi

$$W_2 = kW_1$$

⁽¹⁾ Vedi il Cap. V. delle mie *Lezioni di Geometria differenziale* (Pisa-Spoerri 1894).

con k costante e però

$$(5^*) \quad \frac{\partial W_1}{\partial u} = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} W_1, \quad \frac{\partial W_1}{\partial v} = k \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} W_1,$$

onde la relazione

$$(6) \quad \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = k \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right).$$

« Ponendo

$$k = \cot \left(\frac{\sigma}{2} \right),$$

la (6), ovvero l'altra

$$(6^*) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = \cot \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right),$$

esprime che il doppio sistema di traiettorie sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ delle linee v divide la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. E infatti, riproducendo le considerazioni della mia Memoria citata, abbiamo che le equazioni differenziali di queste traiettorie sono rispettivamente:

$$(7) \quad \sqrt{e} \operatorname{sen} \left(\frac{\sigma}{2} \right) du + \sqrt{g} \cos \left(\frac{\sigma}{2} \right) dv = 0$$

$$(7^*) \quad \sqrt{e} \operatorname{sen} \left(\frac{\sigma}{2} \right) du - \sqrt{g} \cos \left(\frac{\sigma}{2} \right) dv = 0.$$

« Ora, posto

$$\tau = \int \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} du + \cot \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} dv \right\},$$

i primi membri delle (7), (7*) ammettono i rispettivi fattori integranti e^τ , $e^{-\tau}$; se si pone:

$$\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \int e^\tau \left\{ \sqrt{e} \operatorname{sen} \left(\frac{\sigma}{2} \right) du + \sqrt{g} \cos \left(\frac{\sigma}{2} \right) dv \right\}$$

$$\beta = \frac{1}{\operatorname{sen} \sigma} \int e^{-\tau} \left\{ \sqrt{e} \operatorname{sen} \left(\frac{\sigma}{2} \right) du - \sqrt{g} \cos \left(\frac{\sigma}{2} \right) dv \right\},$$

per l'elemento lineare sferico, espresso in coordinate α, β si ha la formola

$$ds'^2 = e^{-2\tau} d\alpha^2 + 2 \cos \sigma d\alpha d\beta + e^{2\tau} d\beta^2,$$

che dimostra appunto la proprietà enunciata.

§ 2.

« Se l'elemento lineare sferico (1) soddisfa alla condizione (6*), ogni superficie che abbia per immagini delle linee di curvatura le linee u, v godrà di una proprietà affatto analoga, cioè il doppio sistema di traiettorie sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ delle linee di curvatura v dividerà la superficie in parallelogrammi infinitesimi equivalenti. E infatti se

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

è l'elemento lineare della superficie e r_1, r_2 ne sono i raggi principali di curvatura si ha

$$\sqrt{E} = \sqrt{e} \cdot r_2 \quad \sqrt{G} = \sqrt{g} \cdot r_1.$$

« Le note formole (*Lezioni* pag. 132)

$$\frac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2) \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial u} = (r_2 - r_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}$$

dimostrano che si ha

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}$$

e però la (6*) è perfettamente equivalente all'altra

$$(8) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = \cot \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right),$$

onde segue la proprietà sopra enunciata.

« In particolare vediamo che le superficie Φ indicate nel titolo apparterranno alla classe di superficie studiate al § 7 della mia Memoria citata.

« Supponiamo dapprima noto il sistema sferico (u, v) e vediamo come si determineranno le corrispondenti superficie Φ . Basterà per ciò determinare W_1 dalle (5), indi W dalle (4), cioè che si fa con due quadrature mediante le formole

$$(9) \quad \log W_1 = \int \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} du + \cot \left(\frac{\sigma}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} dv \right\}$$

$$(10) \quad W = \int W_1 \left\{ \sqrt{e} du + \cot \left(\frac{\sigma}{2} \right) \sqrt{g} dv \right\},$$

dopo di che la (2) risulta identica. Osserviamo che la superficie Φ così ottenuta è determinata a meno di un'omotetia (dipendente dalla costante mol-

tiplicativa in W_1) e di una trasformazione parallela (dipendente dalla costante additiva in W). Ma, poichè la (6*) non muta cangiando σ in $-\sigma$, ne risulta: Ad ogni sistema ortogonale sferico (u, v) , che soddisfi la (6*), appartengono due superficie Φ essenzialmente distinte, determinate ciascuna a meno di un'omotetia e di una trasformazione parallela, che si ottengono con quadrature.

§ 3.

« Resta ora che determiniamo i sistemi sferici ortogonali (u, v) pei quali la (6*) è soddisfatta. Questo problema trovasi già risoluto nella mia Memoria citata, ma qui ne darò una risoluzione più diretta procedendo nel modo seguente (1). Combinando l'equazione (6*) coll'altra :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = -\sqrt{eg},$$

la quale esprime che l'elemento lineare (1) appartiene alla sfera, ricaviamo :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right) = -\sqrt{eg} \sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right) = -\sqrt{eg} \cos^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right), \end{cases}$$

onde seguono le altre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right)^2 + g \sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right)^2 + e \cos^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

e però integrando

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} \right)^2 + g \sin^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right) &= V \\ \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} \right)^2 + e \cos^2 \left(\frac{\sigma}{2} \right) &= U, \end{aligned}$$

dove V è funzione di v soltanto ed U di u .

« Ma, cangiando convenientemente i parametri u, v , possiamo fare

$$U = 1 \quad V = 1$$

(1) Lo stesso metodo conduce a determinare i sistemi analoghi (u, v) sulla *pseudosfera*.

e quindi, indicando con φ, ψ due angoli ausiliarii, potremo porre

$$\sqrt{e} \cdot \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \sin \varphi, \quad \sqrt{g} \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \sin \psi$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v} = \cos \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = \cos \psi.$$

« Dopo di ciò gli angoli φ, ψ risulteranno legati dalle relazioni

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \cot\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sin \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} = \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right) \sin \varphi. \end{cases}$$

« Viceversa, se φ, ψ soddisfano queste due equazioni, l'elemento lineare

$$ds'^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)} du^2 + \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)} dv^2$$

appartiene alla sfera di raggio $= 1$ e soddisfa alla (6*).

« Le (11) possono interpretarsi geometricamente, ricorrendo alla teoria delle congruenze pseudosferiche (v. *Lezioni* pag. 426 ss.). E infatti, ove si ponga

$$\varphi = \omega_1 + \omega, \quad \psi = \omega_1 - \omega,$$

esse si mutano nelle formole per la trasformazione di Bäcklund. Tenendo conto delle formole date al luogo citato, si vede facilmente che la dipendenza geometrica dei sistemi sferici cercati (u, v) dalle congruenze pseudosferiche è data dal seguente teorema:

« Si consideri una qualunque congruenza pseudosferica e se ne faccia l'immagine sferica; alle assintotiche u, v delle due falde pseudosferiche della superficie focale corrisponderà sulla sfera un sistema ortogonale (u, v) della specie richiesta (1).

§ 4.

« Prendiamo ora una qualunque superficie Φ i cui piani principali abbiano costante il rapporto delle distanze del punto fisso O . Col centro in O descriviamo una sfera S di raggio arbitrario e costruiamo il sistema ∞^2 di cerchi ortogonali contemporaneamente alla sfera S ed alla superficie Φ . Questi

(1) Cf. la mia Memoria citata nel t. XVIII degli Annali (1890). Qui enuncierò ancora il teorema: Perchè nella immagine sferica di una congruenza W alle linee assintotiche delle due falde focali corrisponda un sistema ortogonale sulla sfera, è necessario e sufficiente che le due falde abbiano in punti corrispondenti eguale curvatura. (Cf. *Lezioni* pag. 313 s. s.).

circoli ammettono una serie ∞^1 di superficie ortogonali (*Lezioni* pag. 325), le quali tutte, come ora dimostreremo, appartengono alla classe di Φ . E infatti i piani di questi circoli passano per il centro O della sfera e, per la proprietà supposta a Φ , hanno quindi inclinazione costante sui piani principali di Φ . Per le proprietà generali dei sistemi tripli ortogonali ne segue che i piani stessi hanno la medesima inclinazione costante sopra i piani principali di una qualunque superficie Φ' ortogonale ai circoli (¹).

« Ne risulta che, nota una superficie Φ , possiamo dedurne infinite altre nuove e propriamente una doppia infinità colla costruzione seguente:

« Col centro in O si descriva una sfera S di raggio arbitrario e si conducano i circoli normali contemporaneamente alla sfera S ed alla superficie Φ . Tutte le superficie Φ' ortogonali ai circoli appartengono alla classe stessa di Φ .

« Conformemente ai teoremi generali sui sistemi ciclici, queste nuove superficie Φ' si ottengono senza alcun calcolo d'integrazione, giacchè una di esse, la superficie Φ , è già nota e la sfera S è doppiamente normale ai circoli. Si può anche osservare che trasformando per raggi vettori reciproci la Φ rispetto alla sfera S si ottiene una superficie Φ' dalla serie e però:

« Ogni superficie Φ per un'inversione di centro O si cambia in una superficie della classe stessa.

« Pel caso particolare $\sigma = \frac{\pi}{2}$ quest'ultimo teorema è dato anche da Guichard (l. c.). In fine è da notarsi che possiamo ridurre la sfera S al suo centro O, nel qual caso i circoli considerati sono condotti pel punto fisso O normalmente alla superficie Φ .

§ 5.

« Le semplici formole date al § 1 si prestano ad altre applicazioni, e noi qui ci proponiamo di risolvere con esse un problema analogo a quello trattato superiormente e cioè: Trovare le superficie per le quali un punto fisso O dello spazio ha costante il rapporto delle distanze dal piano tangente e da uno dei piani principali.

« Supponiamo p. e. nelle formole del § 1

$$W_1 = kW \quad (k \text{ costante}),$$

e però

$$(12) \quad \frac{\partial W}{\partial u} = k \sqrt{e} W.$$

(¹) Ciò risulta subito dalle formole a pag. 461 delle *Lezioni*. E infatti, essendo le traiettorie ortogonali delle superficie Φ' ($q_3 = \text{cost}^{\text{te}}$) curve piane, si ha

$$\frac{1}{T} = 0$$

quindi ω_3 è indipendente da q_3 e però una costante assoluta, tale essendo pel particolare valore di q_3 che corrisponde alla Φ .

« Introducendo questo valore di $\frac{\partial W}{\partial u}$ nella (2), troviamo subito

$$(13) \quad \frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u} = k;$$

questa esprime che la curvatura geodetica delle linee sferiche u è costante, cioè che queste linee sono cerchi minori di egual raggio. Ne segue che le superficie cercate hanno le linee di curvatura u piane e i loro piani tagliano sotto il medesimo angolo la superficie.

« Inversamente, preso sulla sfera un sistema ortogonale (u, v) di cui le u siano cerchi minori di egual raggio, basterà secondo le (12), (13) porre

$$W = V \sqrt{g},$$

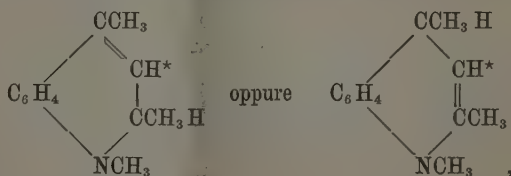
dove V è funzione arbitraria di v , e la superficie così definita in coordinate tangenziali godrà della proprietà richiesta.

« Le superficie ora considerate stanno in una notevole relazione colle superficie Φ e si presentano insieme ad esse nella teoria dei sistemi tripli ortogonali. Presa infatti una superficie Φ , se si fa uscire da un suo punto P , normalmente a Φ , una curva C nel piano condotto per O e per la normale in P alla superficie, ne risulta individuato un sistema triplo ortogonale in cui le superficie di una serie sono altrettante superficie Φ aventi per traiettorie ortogonali delle curve piane, i cui piani passano pel punto fisso O ⁽¹⁾.

« Le superficie delle altre due serie appartengono allora alla classe considerata nel presente paragrafo ».

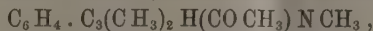
Chimica. — *Sulla costituzione delle idrochinoline, considerazioni ed esperienze intorno alla struttura dei nuclei azotati.* Nota del Socio G. CIAMICIAN e di G. BOERIS.

« Le ricerche eseguite in questi ultimi anni dal dott. Ferratini hanno dimostrato in modo non dubbio, che la base ottenuta da E. Fischer nella metilazione degli indoli è realmente una diidrochinolina trimetilata. Il Ferratini ha provato inoltre, che questo interessante composto, cui spetta una delle due seguenti formole:

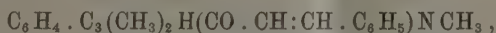


(1) Cf. *Lezioni* pag. 477.

in virtù dell'atomo d'idrogeno indicato coll'asterisco, possiede ancora proprietà indoliche, perchè dà alcune delle reazioni che E. Fischer ha eseguito col α -metilindolo. Queste analogie di comportamento si manifestano chiaramente quando si fa agire sulla diidrotrimetilchinolina il cloruro di diazobenzolo, l'aldeide benzoica e soprattutto l'anidride acetica. In quest'ultimo caso si produce un derivato acetilico, che non può avere altra costituzione che la seguente



il quale corrisponde per modo di formazione e caratteri ai chetoni provenienti dagli indoli e dai pirroli. Coll'idrossilammia veramente e colla fenilidrazina non reagisce, ma dà però il prodotto di condensazione coll'aldeide benzoica, una *cinnamildiidrotrimetilchinolina*:



ciò che ugualmente prova la sua natura chetonica (1).

« Per ottenere questo corpo è necessario impiegare potassa molto concentrata. Noi abbiamo bollito per circa un'ora 2 gr. del derivato acetilico con 2 gr. di aldeide benzoica e 25 c. c. di potassa della densità 1,27. L'olio giallo bruno, che galleggia sul liquido alcalino durante la ebollizione, si solidifica col raffreddamento e costituisce il prodotto cercato. Per purificarlo lo si fa cristallizzare prima dall'alcool e poi dall'acetone. Così s'ottengono bellissime tavole quadrangolari, d'un colore giallo ranciato, che si rammolliscono verso i 150° e fondono a 152-153°. All'analisi si ebbero numeri conformi alla suindicata formola.

gr. 0,2160 di sostanza dettero gr. 0,6572 di CO₂ e gr. 0,1406 di H₂O.

« In 100 parti:

	trovato	calcolato per C ₂₁ H ₂₁ NO
C	82,98	83,17
H	7,23	6,93

« La cinnamildiidrotrimetilchinolina è solubile nell'alcool e nell'acetone, solubilissima nell'etere acetico e nel benzolo, nell'etere si scioglie meno facilmente ed è pochissimo solubile nell'etere petrolico.

« Prima di passare alla discussione sui caratteri delle diidrochinoline, che, come si vedrà, presentano un notevole interesse dal punto di vista di alcune questioni, che oggi si agitano in chimica organica, diremo di un'esperienza, che abbiamo eseguito col *jodidrato della diidrotrimetilchinolina*.

« È noto che i jodidrati delle basi terziarie della forma ad es.

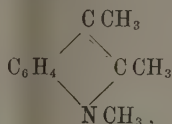


(1) Il dott. Adolfo Ferratini, che con tanto buon successo s'era occupato fin'ora di questi studi, ha dovuto in quest'anno, nell'interesse della sua carriera, abbandonare il mio laboratorio. Perciò ho ripreso, assieme al dott. Boeris, il lavoro lasciato interrotto dal Ferratini.

G. CIAMICIAN.

(2) Ved. Herzig e Meyer, Berichte, 27, 319.

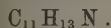
perdono col riscaldamento joduro metilico e diventano secondarie. Se si riscalda il jodidrato suindicato oltre al suo punto di fusione, si elimina del pari joduro di metile, ma non si ottiene, come si avrebbe potuto credere, la diidrodimetilchinolina secondaria, ma bensì il *trimetilindolo*;



di Degen (1).

« L'esperienza venne eseguita nel seguente modo: 50 gr. del jodidrato vennero distillati a bagno di lega in porzioni di 10 gr. per volta in un palloncino in una corrente di anidride carbonica. Da principio passa il joduro metilico e poi un olio giallo, denso, che all'aria arrossa; da questo si deposita poi, in quantità non molto rilevante, una materia cristallina priva di colore, che si ritrova pure sulle pareti del collettore. Trattando tutto con acqua i cristalli si sciolgono, e distillando in corrente di vapore acqueo, passa il joduro metilico; l'olio è troppo poco volatile e rimane perciò indietro. Per separarlo dall'acqua si estrae con etere, si secca la soluzione con potassa deacquificata e si distilla. Passa fra 275° e 290°, ma la maggior parte (13 gr.) distilla fra 275° e 283°. Questa frazione ridistillata, dette il punto di ebollizione fra 278°-279°, che corrisponde a quello indicato dai citati autori.

« L'analisi dette numeri concordanti colla formola del trimetilindolo:



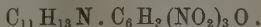
gr. 0,1976 di sostanza dettero gr. 0,6010 di CO_2 e gr. 0,1488 di H_2O .

« In 100 parti:

	trovato	calcolato
C	82,95	83,02
H	8,37	8,18

« Per stabilire con maggior sicurezza l'identità del composto da noi ottenuto, col trimetilindolo, abbiamo preparato anche il *picrato*, trattandolo con una soluzione benzolica satura a caldo di acido picrico. Del liquido intensamente colorato in rosso bruno, si separano aghi d'un rosso granata, che ricristallizzati ripetutamente dal benzolo, fondevano a 150°, conformemente al punto di fusione indicato dal Degen.

« Una determinazione d'azoto ne confermò la formola:



gr. 0,2030 di materia svolsero c. c. 25,6 d'azoto, misurati a 23°,4 ed a 754 mm.

(1) Liebig's, Annalen 236, 160.

« In 100 parti:

	trovato	calcolato
N	14,18	14,44

« Restava ancora a determinare la natura della sostanza cristallina, che si forma assieme al trimetilindolo. Essa rimane sciolta nel liquido acquoso. da cui quest'ultimo venne estratto con etere. Trattando la soluzione con potassa e distillando con vapore passa un'olio, che ha la proprietà della diidro-trimetilchinolina. Tutto quindi faceva supporre che i detti cristalli non fossero altro che il jodidrato inalterato di questa base e realmente le ulteriori ricerche confermarono in fine questa supposizione. Però c'è un fatto che da principio la rendeva inverosimile e faceva credere, che la base così riottenuta fosse diversa dalla ordinaria: mentre la base preparata direttamente dagli indoli arrossa all'aria colla massima facilità, quella riottenuta nel modo indicato, anche stando esposta a lungo all'aria non arrossa sensibilmente. Noi l'abbiamo trasformata nuovamente nel jodidrato, ma questo, cristallizzato dall'alcool, mostrò il punto di fusione 253° e la composizione dell'ordinario jodidrato di diidrotrimetilchinolina.

gr. 0,1878 di materia dettero gr. 0,3266 di CO_2 e gr. 0,0962 di H_2O .

« In 100 parti:

	trovato	calcolato per $\text{C}_{12}\text{H}_{13}\text{N} \cdot \text{HI}$
C	47,43	47,84
H	5,69	5,31

« Anche il picrato aveva il punto di fusione 148° ed i caratteri di quello della base ordinaria.

« In fine per eliminare ogni dubbio sull'identità dei due prodotti abbiamo pregato il prof. G. B. Negri di Genova a voler comparare la forma cristallina dei rispettivi jodidrati, che egli trovò essere anche cristallograficamente identici. Sembra dunque che la diidrotrimetilchinolina possa perdere la proprietà di arrossare all'aria, oppure che l'arrossamento sia alle volte impedito dalla presenza di qualche sostanza, che a noi potrebbe essere sfuggita.

« Ecco i risultati delle misure, che il prof. Negri gentilmente ci ha comunicato: Pel jodidrato della diidrotrimetilchinolina, riottenuto nella distillazione egli trovò:

sistema cristallino: trimetrico

$$a : b : c = 1,3558 : 1 : 0,5984$$

« Forme osservate: (210), (110), (101), (111), (121).

« Combinazioni: (210), (111)

(210), (110), (111)

(210), (110), (111), (121), (101):

angoli	limiti		misurati		calcolati	n
			medie			
210:210	68°,10'	— 68°,21'	68°,16'	*		6
111:111	73, 7	— 73, 21	73, 16	*		4
210:111	55, 38	— 55, 51	55, 44	55°,46'		3
210:111	88, 36	— 88, 44	88, 40	88, 38		3
111:111			57, 22	57, 24		1
111:111			41, 28	41, 29		1
110:111			53, 22	53, 22		1
210:110	19, 15	— 19, 43	19, 33	19, 27		6
110:110			72, 44	72, 49		1
121:111			40, 56	41, 08		1
121:210			49, 45	50, 14		1
121:111			18, 31	18, 54		1

« I cristalli ottenuti da soluzioni alcooliche mostrano costantemente la prima combinazione di frequente con abito prismatico e con le faccie di (111) di estensione assai variabile anche nello stesso cristallo. Talvolta sono laminari secondo una faccia di (210). I cristalli avuti da soluzioni acquose, allungati secondo [001], e laminari per la predominanza di 2 faccie parallele di (210), presentano frequente il prisma (110) e rarissime volte le forme (121), (101) subordinate. L'ultima forma fu determinata dalla zona [111:111] e da misure approssimate con (111). In generale le faccie sono lisce, piane, di rado poliedriche e riflettono al goniometro immagini perfette.

« I cristalli sono trasparenti brillanti. Sfaldatura quasi perfetta secondo (100).

« Il piano degli assi ottici e parallelo a (001); la bisettrice acuta negativa parallela a [100], quindi la formula ottica è: a e b ; dispersione energetica $\varrho < \nu$. — Con una lamina di sfaldatura (100) determinai:

$$2\Sigma_a = 57^\circ, 16' \text{ (rosso)} \quad ; \quad 2\Sigma_a = 64^\circ, 12' \text{ (verde)}$$

« In un cristallo col prisma 210:210 = 68°,22', misurai:

$$\delta_\beta = 67^\circ, 18' \text{ (rosso)} \quad ; \quad \delta_\gamma = 68^\circ, 02' \text{ (rosso)}$$

dai quali dati si calcola:

$$\beta = 1,6483 \quad ; \quad \gamma = 1,6526$$

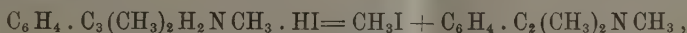
Dai valori di β e di $2\Sigma_a$ si ha: $2V_a = 33^\circ, 48'$ (rosso).

La temperatura durante le osservazioni si mantenne fra 20 e 22°.

« Il jodidrato della base ottenuta direttamente dal metilchetolo dette i seguenti valori, da cui risulta evidente l'identità dei due prodotti:

angoli	limiti	misurati medie	calcolati ⁽¹⁾	n
[210:210]:[210:111]	125°,43' — 126°,42'	126°,20'	126°,37'	4
[210:110]:[210:111]	103, 30 — 104, 52	103, 50	103, 54	8
210:111		55, 29	55, 46	1

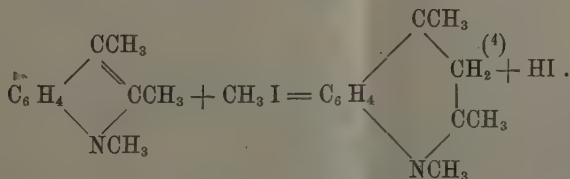
« La reazione che avviene riscaldando il jodidrato di diidrotrimetilchinolina è dunque inversa a quella per cui questa base prende origine dagli indoli:



ed è senza dubbio lo stesso atomo di carbonio, che era entrato nel nucleo pirrolico per trasformarlo in piridico, quello che, nel processo di scissione, esce nuovamente allo stato di joduro di metile.

« Questa reazione presenta un certo interesse, perchè in nessun caso s'era osservato fin'ora una così completa trasformazione di un derivato della chinolina in un composto indolico. Il rendimento di trimetilindolo è così soddisfacente, che questo è forse il miglior mezzo per prepararlo. Dobbiamo però osservare che il prodotto, sebbene abbia l'esatto punto di ebollizione, arrossa intensamente il fuscello d'abete intriso d'acido cloridrico. Siccome il trimetilindolo sintetico ⁽²⁾ non dà questa reazione, è probabile che essa derivi dalla presenza di qualche altro derivato indolico, che si formerebbe in piccolissima quantità.

« Il trimetilindolo si combina, naturalmente, col joduro di metile per rigenerare il jodidrato di diidrotrimetilchinolina. Fischer e Meyer ⁽³⁾ hanno dimostrato, che questa base si origina ugualmente, partendo dai diversi indoli monometilati e bimetilati; nel caso presente la trasformazione chinolinica si manifesta nella sua maggiore semplicità, tanto che essa simula perfettamente l'ordinario passaggio di un'ammina terziaria al corrispondente jodometilato:



(1) In funzione delle costanti suindicate.

(2) Liebig's. Annalen 236, 161.

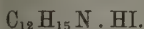
(3) Berichte, XXIII, 2628.

(4) Essendo ancora incerta la posizione del doppio legame, in questa formola s'è lasciato il gruppo CH₂, invece di mettere =CH—CHCH₃—.

Si può anzi ammettere, che il joduro metilico si unisca al trimetilindolo salficandolo, ma che poi, per la speciale natura del residuo pirrolico, avvenga subito la trasformazione in diidrochinolina. — Il senso in cui la reazione si compie dipende unicamente dalla temperatura, in modo che si potrebbe parlare anche qui di un processo di dissociazione analogo a quello dei jodometilati delle basi terziarie. Anzi a questo proposito giova notare, che se si riscalda il jodidrato di diidrotrimetilchinolina in tubo chiuso, impedendo così la eliminazione del joduro metilico, non si forma il trimetilindolo.

« Per seguire sperimentalmente la rigenerazione del jodidrato di diidrotrimetilchinolina, abbiamo chiuso in un tubo 2 gr. di trimetilindolo con un eccesso di joduro di metile. A freddo la reazione avviene a stento però sembra incominciare, del tutto non si compie che a 100°. Dopo alcune ore di riscaldamento si trova nel tubo un ammasso di minuti cristalli, che liberati dal joduro di metile e purificati dall'alcool ed etere, fondevano a 253°.

« All'analisi dettero i numeri richiesti della formula:



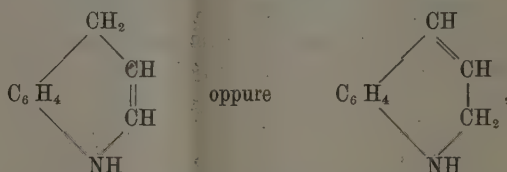
0,2090 gr. di sostanza dettero 0,3684 gr. di CO_2 e 0,1065 gr. di H_2O .

« In 100 parti:

	trovato	calcolato
C	48,07	47,84
H	5,66	5,31

« La base messa in libertà arrossava all'aria normalmente.

« Se si chiede quale sia la ragione del rimarchevole comportamento chimico delle diidrochinoline, le quali, benchè di costituzione chinolinica, hanno caratteri comuni agli indoli, la risposta, secondo noi, può essere semplicemente questa: le diidrochinoline della forma (1):



sono da considerarsi quali *omologhi nel nucleo* dell'indolo e perciò possiedono in parte le proprietà di quest'ultimo.

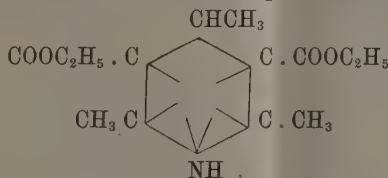
« Il concetto di *omologia del nucleo* venne, per quanto è a nostra conoscenza, sviluppato per la prima volta da uno di noi nel 1885 (2), per definire le relazioni, allora scoperte, che passano fra la pirrolidina e la piperi-

(1) Le diidrochinoline fondamentali non sono note, si conosce soltanto un polimero di costituzione ancora dubbia.

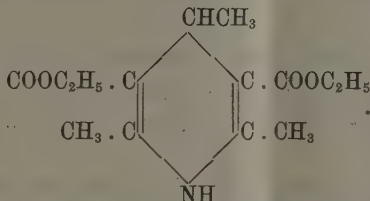
(2) Gazzetta chimica 15, pag. 253.

dina; la stessa idea fu poi, molto più tardi, espressa col nome di *omologia aliciclica* dal Bamberger ⁽¹⁾, per indicare relazioni, perfettamente analoghe, ch'egli dimostrò esistere fra i diidroindoli e le tetraidrochinoline.

« L'omologia nel nucleo può, fino ad un certo punto, essere, come s'è detto, invocata anche per spiegare le proprietà indoliche della diidrotrimetilchinolina e già nella citata memoria del 1885, uno di noi, suppose, che le diidropiridine potessero avere caratteri simili a quelli del pirrolo. L'identico concetto è, a nostro avviso, contenuto, senza esprimerlo con un nome, nella osservazione del Bamberger, secondo cui l'*etere diidrocolidindicarbonico* di Hantzsch sarebbe da considerarsi come un composto di indole pirrolica. Bamberger ⁽²⁾ trae partito di questo ravvicinamento per mettere in rilievo i vantaggi delle sue formole centriche coll'azoto pentavalente:

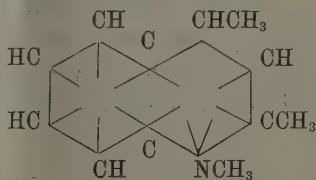
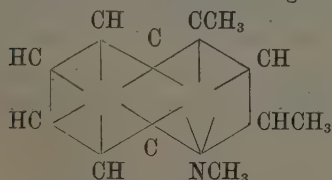


noi crediamo invece, che le proprietà di questo corpo, quale omologo nel nucleo d'un derivato pirrolico, trovino sufficiente spiegazione anche nella formula ordinaria:



« Considerando le diidrochinoline quali omologhi nel nucleo degli indoli e, per restare al caso speciale da noi esaminato, considerando segnatamente le proprietà della diidrotrimetilchinolina, sorgono nuovi argomenti atti a combattere l'ipotesi di Bamberger sulla pentavalenza dell'azoto nei nuclei pirrolici ed indolici.

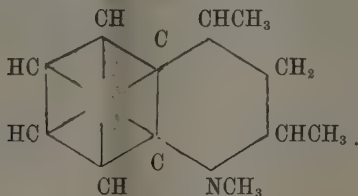
« Secondo questa ipotesi la diidrotrimetilchinolina sarebbe da rappresentarsi con una delle due seguenti formole:



(1) Berichte, 24. 1897.

(2) Berichte, 24, 1763.

le quali rendono conto delle proprietà indoliche del composto, ma stanno in aperta contraddizione col suo carattere *decisamente basico*, perchè qui non si tratta, come nei pirroli e negli indoli, di una funzione debolmente alcalina, che si manifesta a stento, ma di un'alcaloide vero e proprio come qualunque altro. È ciò non è tutto: la grande differenza di alcalinità, che si riscontra fra pirrolo e pirrolina ed indolo e diidroindolo, alla quale il Bamberger (1) attribuisce tanta importanza da considerarla, come sembra, quale fatto principale in sostegno delle sue vedute, non si ritrova più fra la diidrotimetilchinolina ed il suo derivato biidrogenato:



« La tetraidrotimetilchinolina proveniente dagli indoli, che ha tutti i caratteri delle chinoline tetraidrogenate, sarà certamente base più energica del composto biidrogenato, ma non c'è nessun salto nel grado della alcalinità, mentre le formole centriche, coll'immino tetravalente, lo farebbero supporre uguale a quello che si osserva fra gli indoli ed i loro derivati biidrogenati. A nostro avviso, l'alcalinità pronunciata della diidrotimetilchinolina, rispetto a quella debolissima degli indoli, dipende dalla presenza del radicale $\text{—CHCH}_3\text{—}$, il quale compensa in gran parte il carattere negativo del nucleo indolico.

« Con le precedenti considerazioni io (Ciamician) credo di avere risposto anche all'ultima obiezione sostenuta dal Bamberger contro di me, in appoggio della sua ipotesi, perchè egli stesso ammette, che la difficoltà di ottenere sali coi derivati del pirrolo e dell'indolo non è un'argomento decisivo in suo favore (2). Molto meno lo è, naturalmente, quello che si riferisce al contegno di questi corpi coi joduri alcoolici (3). Le esperienze descritte in questa Nota danno la necessaria spiegazione in proposito.

« Io credo del resto, che non era mestieri di nuove esperienze per togliere alla tesi sostenuta dal Bamberger ogni ragione d'esistenza. Il fatto che nel pirrolo si accresce, e dico s'accresce e non comparisce, l'alcalinità colla idrogenazione è perfettamente parallelo a quelli che generalmente si osservano nell'idrogenazione dei nuclei aromatici. Fra l'anilina ed una ammina ali-

(1) Berichte, 26, pag. 1946.

(2) Ibid.

(3) Liebig's, Annalen, 273, pg. 377-378.

fatica c'è una differenza di caratteri, che nessuna formola di struttura può spiegare; sarebbe veramente tempo, che i chimici si persuadessero, che con le sole formole di struttura non si può dare ragione della funzione chimica dei composti, perchè da esse non si deve pretendere di più di quello che possono dare. Io accetto perciò assai volentieri le vedute di W. Marckwald ⁽¹⁾, il quale con buon successo si adopera a combattere le formole centriche e diagonali, che non hanno fatto progredire d'un passo la questione intorno all'intima struttura del benzolo e dei composti fenociclici in genere. Anche dalle recenti pubblicazioni di Brühl ⁽²⁾ risulta, che la formola di Kekulé è quella che meno artificiosamente rende ragione dei fatti: è necessario però persuadersi una volta per sempre, che i doppi legami possono avere in differenti composti caratteri diversi ».

Geometria. — *Della equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie, che appartengono ad un sistema triplo ortogonale.* Nota del prof. G. RICCI, presentata dal Corrispondente E. PADOVA.

« Il signor Lilienthal, nel fascicolo 4°, ultimamente pubblicato del volume 44° dei *Mathematische Annalen*, partendo dalla teoria generale delle congruenze di linee, ha dato sotto nuova forma la equazione, che esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di superficie di parametro dato ϱ faccia parte di un sistema triplo ortogonale. Come quella data dal sig. Weingarten nel volume LXXXIII del *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, questa nuova forma ha il vantaggio che per essa scompare dalla equazione, di cui si tratta, la irrazionalità, che si presenta naturalmente quando la equazione stessa non è che la espressione diretta della condizione necessaria e sufficiente perchè uno dei due sistemi di linee di curvatura delle superficie ϱ risulti delle traiettorie ortogonali di un altro sistema di superficie.

« La ricordata pubblicazione del sig. Lilienthal mi induce a far conoscere alcuni risultati, a cui sono giunto da molto tempo proseguendo, pel caso speciale di tre variabili, le ricerche generali, che formano l'oggetto della Memoria da me inserita nel Tomo XII della Serie 2ª degli *Annali di Matematica pura ed applicata*.

« Questi risultati non sono che l'estensione di quello citato, dovuto al sig. Weingarten, al problema degli integrali ortogonali di una equazione li-

(1) Liebig's Annalen 274, pag. 331 e 279, pag. 1.

(2) Berichte, 27, pag. 1065.

neare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine associata ad una forma fondamentale ternaria qualunque. Essi comprendono quindi come caso speciale la trasformazione in coordinate generali della equazione del geometra tedesco: della quale però darò anche una dimostrazione diretta semplicissima fondata sui metodi di calcolo differenziale assoluto. Le convenzioni e notazioni, di cui qui farò uso, sono quelle da me stabilite nel Riassunto di alcuni miei lavori pubblicato nel fascicolo del gigno 1892 del *Bulletin des sciences mathématiques*. Di più ricorderò la convenzione, di cui mi sono valso altre volte e secondo la quale si considerano come identici due indici, che differiscono per un multiplo di tre.

“ 1. Se q è una funzione qualunque delle coordinate cartesiane ortogonali x_1, x_2, x_3 dello spazio e si pone

$$1) \quad \frac{1}{H^2} = \sum_s^3 \left(\frac{dq}{dx_s} \right)^2$$

$$2) \quad X_r = H \frac{dq}{dx_r}$$

$$3) \quad u_s = \sum_r^3 \frac{dH}{dx_r} \frac{dX_r}{dx_s},$$

la equazione

$$W) \quad \sum_s \frac{dq}{dx_s} \left(\frac{du_{s+2}}{dx_{s+1}} - \frac{du_{s+1}}{dx_{s+2}} \right) = 0$$

è quella che esprime, sotto la forma data dal sig. Weingarten, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di superficie di parametro q appartenga ad un sistema triplo ortogonale.

“ Se in vece si considerano $x_1 x_2 x_3$ come coordinate generali dei punti dello spazio ed, assunta come forma fondamentale la espressione corrispondente

$$q = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s = d_s^2$$

del quadrato dell'elemento lineare dello spazio, si pone

$$1') \quad H = \frac{1}{A_1 q};$$

se, ritenendo per le X_r le espressioni date dalle (2), si fanno ancora le posizioni

$$X_{rs} \equiv D_q(X_r), \quad H^{(r)} \equiv R^{(q)} \left(\frac{dH}{dx_r} \right)$$

$$3') \quad u_s = \sum_r H^{(r)} X_{rs} \\ u_{st} \equiv D_q(u_s)$$

e si osserva che le espressioni

$$\alpha^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{a}} (u_{s+2 \ s+1} - u_{s+1 \ s+2}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{du_{s+2}}{dx_{s+1}} - \frac{du_{s+1}}{dx_{s+2}} \right)$$

sono gli elementi di un sistema semplice controvariante, è facile concludere che la funzione

$$4) \quad J = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_s X_s \left(\frac{du_{s+2}}{dx_{s+1}} - \frac{du_{s+1}}{dx_{s+2}} \right)$$

è un invariante. E poichè, nella ipotesi che le coordinate generali coincidano colle cartesiane ortogonali, le espressioni (3') delle u_s coincidono colle (3) ed J non è che il primo membro della equazione (W) moltiplicato per H , se ne conclude che questa equazione, se per le u_s vi si intendono poste le espressioni (3'), è la trasformata in coordinate generali della equazione di Weingarten.

« 2. In secondo luogo, mantenendo ferme le altre convenzioni e notazioni del § 1, si supponga la forma fondamentale ternaria φ di natura qualunque e si designi con $\alpha^{(pq)}$ (1) il sistema doppio controvariante, il cui annullarsi identicamente rappresenta le condizioni necessarie e sufficienti perchè la forma φ sia trasformabile in altra a coefficienti costanti. Posto

$$\xi_q = HX_q = H^2 \varrho_q$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{qrs} \alpha^{(qr)} a_{rs} (X_{s+1} \xi_{q s+2} - X_{s+2} \xi_{q s+1}),$$

è facile riconoscere che la espressione J_1 è un invariante. La equazione di condizione perchè il sistema di superficie di parametro ϱ considerato come appartenente allo spazio di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ appartenga ad un sistema triplo ortogonale è espressa dalla equazione

$$W') \quad J + J_1 = 0.$$

È da notarsi che J_1 si annulla identicamente e quindi questa equazione si riduce a quella di Weingarten non soltanto nel caso, in cui il sistema $\alpha^{(rs)}$ è identicamente nullo, ma anche quando i suoi elementi assumono la forma

$$\alpha^{(rs)} = \mu \alpha^{(rs)} + \nu X^{(r)} X^{(s)},$$

i coefficienti μ e ν essendo qualunque. Questo caso si verifica, per esempio, se $\sqrt{\varphi}$ è l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di uno spazio a curvatura costante.

« 3. In fine, assumendo sempre come fondamentale una forma ternaria φ di natura qualunque, si consideri una equazione qualsivoglia della forma

$$\alpha) \quad \sum_r X^{(r)} \frac{df}{dx_r} = 0,$$

I suoi coefficienti costituiscono un sistema controvariante e, come è permesso, noi supporremo scelto il coefficiente arbitrario, che essi contengono, in modo che si abbia

$$\sum_{rs} a_{rs} X^{(r)} X^{(s)} = 1.$$

(1) Si veda il Riassunto citato (§ 2, formola (4)).

« Posto

$$X_s \equiv R_\varphi (X^{(s)})$$

manterremo le notazioni dei §§ 2 e 3 e porremo di più

$$a.M = \begin{vmatrix} 2a_{rs} = X_{rs} + X_{sr} \\ 0 & X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ X_2 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ X_3 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} .$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_r \frac{d(\sqrt{a} X^{(r)})}{dx_r}$$

$$2\sqrt{a} Y^{(6)} = X_{s+1s+2} - X_{s+2s+1}$$

$$Q = \sum_s X_s Y^{(s)}$$

$$2P_r = \sum_s X^{(s)} X_{rs}, \quad P^{(r)} \equiv R^{(r)}(P_r)$$

$$v_r = -2\sum_q P^{(q)} X_{qr}.$$

Sarà facile riconoscere che le funzioni $Y^{(s)}$ sono gli elementi di un sistema controvariante, e le P_r e v_r quelli di due sistemi covarianti; mentre M , N , Q sono invarianti, e l'ultimo di essi eguagliato a zero rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè, come nei §§ 1 e 2, le X_r siano proporzionali alle derivate di una funzione φ rispetto alle x_r .

« Poniamo ancora

$$v_{rs} \equiv D_\varphi(v_r), \quad Q_s \equiv \frac{dQ}{dx_s}, \quad P_{rs} \equiv D_\varphi(P_r),$$

$$\sqrt{a} J' = \sum_s X_s (v_{s+2s+1} - v_{s+1s+2}) + 2\sum_s P_s (v_{s+2} X_{s+1} - v_{s+1} X_{s+2}),$$

$$\sqrt{a} J'_1 = \sum_{qr} a_{rs} \alpha^{(qr)} \{ X_{s+1} (X_{qs+2} - 2X_q P_{s+2}) - X_{s+2} (X_{qs+1} - 2X_q P_{s+1}),$$

$$J_2 = \sum_s X^{(s)} Q_s, \quad J_3 = \sum_{rs} a^{(rs)} P_{rs}, \quad J_4 = \sum_{rs} \alpha^{(rs)} (a_{rs} - X_r X_s).$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè la equazione (α) ammetta due integrali ortogonali nella varietà di elemento lineare $\sqrt{\varphi}$ sarà rappresentata dalla equazione

$$W'' \quad J' + J'_1 - NJ_2 + Q(4M + 2J_3 + J_4) = 0.$$

Se si suppone di nuovo che le X_r siano proporzionali alle derivate di una funzione φ rispetto alle x_r e che valgano per esso le espressioni (2) del § 1, si hanno le

$$Q = 0, \quad J_2 = 0, \\ HJ' = J, \quad J'_1 = HJ_1,$$

e la equazione (W'') coincide colla (W') del § 2.

Chimica. — *Sui punti di congelamento di miscugli isomorfi.*

Nota di FELICE GARELLI, presentata dal Socio CIAMICIAN.

« Küster ha scoperto, che le miscele fuse formate da sostanze fra di loro isomorfe hanno dei punti di congelamento, che sono una funzione continua delle temperature di fusione delle due sostanze costituenti le mescolanze e della composizione quantitativa di queste.

« D'altra parte è noto, che quando da una soluzione non si separa all'atto del congelamento il puro solvente, ma cristallizza assieme a questo parte del corpo disciolto per formare una soluzione solida, devesi sempre, secondo la teoria di van't Hoff, ottenere un abbassamento nel punto di fusione del solvente minore di quello, che richiederebbe la legge di Raoult.

« Ora se da una soluzione costituita da due sostanze aventi strette analogie cristallografiche, si separa all'atto del congelamento una mescolanza isomorfa delle due, è logico considerare questa, più d'ogni altra, come una soluzione solida, se stiamo alla definizione, che di tale soluzione diede il van't Hoff. Egli di fatto citò in prima linea i casi d'isomorfismo come esempi dell'attitudine, che hanno i corpi a sciogliersi allo stato solido. Io non ritengo quindi giustificata la distinzione, che il Küster, come appare da due suoi recenti lavori ⁽¹⁾ sembra voler fare tra le mescolanze di corpi completamente isomorfi e le soluzioni solide, e d'altra parte egli stesso non enumera alcuna delle ragioni, che lo inducono a stabilire tale differenza.

« Ciò ammesso è facile rilevare che la legge sopra enunciata, trovata dal Küster, contraddice alla teoria di van't Hoff: dacchè è facilmente prevedibile il caso in cui la mescolanza isomorfa sia costituita di sostanze tanto diverse nei loro punti di fusione, che la depressione, prodotta nella temperatura di congelamento del solvente dalla sostanza che fonde più basso, potrà raggiungere o anche superare quella richiesta dalla legge generale del congelamento delle soluzioni, abbenchè questo non avvenga in quelle condizioni teoriche richieste perchè si verifichi la legge di Raoult.

« È ben vero, che se le temperature alle quali fondono le due sostanze isomorfe, sono fra di loro molto distanti avverrà, come ha già constatato Küster, un congelamento non uniforme della miscela fusa: ma la sostanza, che fonde più alto tenderà a predominare nelle prime cristallizzazioni. Tuttavia se si fa funzionare come solvente la sostanza, che fonde a temperatura più elevata, il suo punto di congelamento verrà abbassato per l'aggiunta della sostanza, che fonde prima, e l'abbassamento sarà tanto maggiore quanta più sostanza sciolta si separerà col solvente nelle prime cristallizzazioni.

(1) Zeitschr. für phys. Chemie, XII Band, 508, e XIII, 446.

La teoria di van't Hoff conduce invece ad una conclusione opposta poichè ci dice, che l'aumento verificantesi nel punto di fusione di un solvente in contatto con una soluzione solida è proporzionale direttamente alla concentrazione di questa.

« Fra le numerose anomalie alla legge generale del congelamento, che furono trovate in questo laboratorio studiando il comportamento crioscopico di sostanze aventi costituzione analoga al solvente, ve ne sono di quelle, che debbono entrare nella categoria delle mescolanze isomorfe, poichè sussistono fra le sostanze, che le presentano ed i solventi, delle importanti relazioni cristallografiche. Küster non ha sperimentato, finora, che sopra miscele isomorfe formate di sostanze assai somiglianti chimicamente (come p. es. *m-clorinitrobenzolo* e *m-bromonitrobenzolo*) ⁽¹⁾ e aventi temperature di fusione non molto diverse, e per queste evidentemente la eccezione alla legge generale del congelamento si verifica sempre. Io ho voluto invece fare lo studio completo di altre mescolanze isomorfe con le quali fosse possibile di realizzare sperimentalmente il caso speciale ora supposto di una miscela, che abbia un comportamento contrario a quello richiesto dalla teoria di van't Hoff.

« Mi occorreano per tanto delle sostanze isomorfe con punti di fusione assai distanti fra di loro; soddisfanno a questa condizione l'antracene ed il carbazolo, comparati col fenantrene. Essi, disciolti in quest'ultimo idrocarburo, ne innalzano notevolmente il punto di fusione. Quando verificai questo fatto ⁽²⁾, ignorando ancora le relazioni cristallografiche, trovate dipoi, che passano fra le sostanze accennate, non diedi al fenomeno altra spiegazione all'infuori di quella, che si deduce dalla teoria di van't Hoff. Ammisi pertanto, che nel congelamento di tali soluzioni si separasse una soluzione solida più concentrata di quella liquida, che si faceva congelare; e di fatto analizzando i primi cristalli, opportunamente separati da una miscela fusa lasciata raffreddare, contenente per cento parti di fenantrene, 7,50 di carbazolo, constatai in essi una percentuale pari all'11,42 di quest'ultimo. Ma se tale fatto è vero nel caso speciale ora citato, non è giusto trarne la conclusione, alla quale condurrebbe la teoria di van't Hoff, ch'esso cioè si debba effettuare sempre tutte le volte, che una sostanza innalza, invece d'abbassare, il punto di fusione di un solvente.

« Le esperienze di Küster dimostrano invece, che una sostanza con punto di fusione più elevato ed isomorfa col solvente, innalzerà sempre il punto di fusione di questo, anche se la parte di mescolanza, che solidifica ha la stessa composizione di quella che rimane liquida. Potrà darsi anzi che questa sia molto meno concentrata di quella liquida e che si abbia ciò non ostante ugualmente un innalzamento nel punto di fusione del solvente. Ciò si verifica di fatto, come vedremo, per le soluzioni di carbazolo in antracene.

(1) Zeitschrift für phys. Chemie. VIII, 584.

(2) Gazz. chim. italiana XXIII, pag. 448.

« Ho quindi determinato le temperature di congelamento delle mescolanze di antracene e fenantrene, carbazolo e fenantrene, carbazolo e antracene, partendo dalle sostanze di punto di fusione più elevato ed aumentando man mano la quantità di quelle, che fondono a temperature più basse, per modo di giungere fin quasi al punto di fusione di queste. Era poi soprattutto interessante il confrontare gli abbassamenti termometrici prodotti dal fenantrene sciolto nell'antracene e nel carbazolo con quelli causati in questi solventi da sostanze, che per la niuna analogia di costituzione con essi davano affidamento di presentare un comportamento crioscopico normale. Ho scelto come tali la difenilammina e l'acetanilide e dagli abbassamenti termometrici, da esse prodotte, ho calcolato il valore della depressione molecolare del carbazolo e dell'antracene. Le letture furono eseguite col mezzo di un termometro di Beckmann a scala arbitraria, diviso in decimi di grado, a bulbo piuttosto piccolo, immergendolo nella miscela fusa contenuta in un tubo d'assaggio di conveniente dimensione. Quale bagno esterno per fondere la miscela e lasciarla poi raffreddare lentamente servì la paraffina fusa.

I. *Antracene e Fenantrene.*

	Sostanza impiegata		Molecole in 100		Punto di congelamento		Differenze
	Antracene gr.	Fenantrene gr.	Antracene	Fenantrene	osservato	calcolato secondo Küster	
1	5.11	—	100.00	—	213.00		
2	"	0.9900	98.10	1.90	211.80	210.88	+ 1.02
3	7.13	0.1755	97.60	2.40	211.35	210.20	+ 1.15
4	"	0.3738	95.02	4.98	209.65	207.18	+ 2.47
5	"	0.5558	92.87	7.13	208.10	205.66	+ 2.44
6	4.60	0.400	92.00	8.00	207.00	203.64	+ 3.36
7	4.843	0.7862	86.04	13.96	202.35	196.67	+ 5.68
8	"	1.2582	79.38	20.62	197.60	188.88	+ 8.72
9	5.748	2.5130	69.16	30.84	185.33	176.91	+ 8.42
10	4.937	"	65.82	34.18	182.43	172.97	+ 9.46
11	4.226	"	62.20	37.80	179.33	168.77	+ 10.56
12	3.630	"	58.53	41.47	177.07	164.87	+ 12.59
13	3.124	"	54.81	45.19	174.04	160.12	+ 13.95
14	2.547	"	49.66	50.34	168.47	154.10	+ 14.37
15	3.8829	5.00	43.75	56.25	162.57	147.18	+ 15.39
16	3.2859	"	39.65	60.35	156.37	142.39	+ 13.98
17	2.6955	"	35.02	64.98	151.57	136.97	+ 14.60
18	2.0725	"	29.30	70.70	143.67	130.28	+ 13.39
19	1.4475	"	22.45	77.55	132.67	122.26	+ 10.41
20	0.8455	"	14.46	85.54	118.17	112.91	+ 6.26
21	0.3530	"	6.59	93.41	103.37	103.71	— 0.34
22	0.3850	11.58	3.24	96.76	98.54	99.79	— 1.25
23	0.2526	"	2.11	97.89	97.56	98.46	— 0.90
24	0.1078	"	0.90	99.10	96.62	96.72	— 0.10
25	—	"	—	100.00	96.00	—	—

II. Carbazolo e Fenantrene.

	Sostanza impiegata		Molecole in 100		Punto di congelamento		Differenze
	Carbazolo gr.	Fenantrene gr.	Carbazolo	Fenantrene	osservato	calcolato secondo Küster	
1	5.33	—	100.00	—	236.10	—	—
2	"	0.1390	97.11	2.89	234.57	232.06	+ 2.51
3	"	0.2990	95.00	5.00	232.57	229.10	+ 3.47
4	"	0.4705	92.36	7.64	231.17	225.41	+ 6.76
5	"	0.8049	87.59	12.41	227.40	218.63	+ 8.77
6	"	2.5659	68.89	31.11	212.57	192.55	+ 20.02
7	"	3.6272	60.90	39.10	206.55	181.36	+ 25.19
8	"	4.6472	55.00	45.00	200.10	173.10	+ 27.00
9	2.665	3.1825	47.15	52.85	190.50	162.11	+ 28.39
10	3.818	6.020	40.33	59.67	176.30	152.56	+ 23.74
11	3.353	"	37.25	62.75	172.00	148.25	+ 23.75
12	2.843	"	33.48	66.52	166.80	142.87	+ 23.93
13	2.403	"	29.84	70.16	162.60	137.87	+ 24.73
14	2.090	"	27.01	72.99	158.10	133.91	+ 24.19
15	1.770	"	20.27	79.73	145.30	124.47	+ 20.93
16	1.219	"	17.75	82.25	140.60	120.95	+ 19.65
17	0.818	"	12.65	87.35	126.60	113.81	+ 12.79
18	0.6037	"	9.65	90.35	119.10	109.61	+ 9.49
19	0.3625	"	6.03	93.97	108.10	104.54	+ 3.56
20	0.1940	"	3.32	96.68	102.10	100.74	+ 1.36
21	0.1749	11.87	1.54	98.46	98.61	98.16	+ 0.45
22	0.1339	12.33	1.14	98.86	98.00	97.69	+ 0.31
23	0.0429	11.87	0.38	99.62	96.66	96.63	+ 0.03
24	—	11.87	—	100.00	96.10	—	—

III. Carbazolo e Antracene.

	Sostanza impiegata		Molecole in 100		Punto di congelamento		Differenze
	Carbazolo gr.	Antracene gr.	Carbazolo	Antracene	osservato	calcolato secondo Küster	
1	6.72	—	100.00	—	236.00	—	—
2	"	0.1831	97.51	2.49	234.80	235.42	— 0.63
3	"	0.3661	95.14	4.86	233.70	234.89	— 1.19
4	"	0.5731	92.60	7.40	232.45	234.30	— 1.85
5	"	1.0037	87.72	12.28	230.30	233.18	— 2.88
6	3.95	1.2700	76.83	23.17	226.10	230.68	— 4.58
7	"	1.7655	70.47	29.53	223.60	229.21	— 5.61
8	"	2.3097	64.42	35.42	221.10	227.86	— 6.76
9	"	2.9121	59.12	40.88	218.95	226.60	— 6.65
10	"	4.1121	50.60	49.40	218.80	224.64	— 5.84
11	"	4.7025	47.24	52.76	218.20	223.87	— 5.67
12	"	5.3385	44.10	55.90	217.70	223.15	— 5.45
13	3.1670	5.21	39.32	60.68	218.30	221.04	— 2.74
14	2.5420	"	34.21	65.79	218.00	220.86	— 2.86
15	1.9600	"	28.62	71.38	216.70	219.58	— 2.88
16	1.3720	"	21.91	78.09	216.20	218.03	— 1.83
17	0.7458	"	13.22	86.78	214.40	216.04	— 1.64
18	0.3510	"	6.70	93.30	213.90	214.54	— 0.64
19	0.1590	"	3.15	96.85	213.20	213.72	— 0.52
20	—	"	—	100.00	213.00	—	—

IV. Solvente: *Antracene*, fonde a 213°.

	Difenilammina C ₁₂ H ₁₁ N = 169				Acetanilide C ₈ H ₇ O N = 135			
	concentraz. riferite a 100 parti in peso di solvente	abbassamenti termometrici	depressione molecolare	media	concentra- zioni	abbassamenti termometrici	depressione molecolare	media
1	2.807	2.00	120.32	116.79	2.413	2.25	125.87	116.53
2	5.491	3.75	116.33		4.851	4.20	116.91	
3	8.540	5.75	113.73		7.620	6.00	106.29	

V. Solvente: *Carbazolo*, fonde a 236°, 10.

	Difenilammina C ₁₂ H ₁₁ N = 169				Acetanilide C ₈ H ₇ ON = 135			
	concentra- zioni	abbassamenti termometrici	depressione molecolare	media	concentra- zioni	abbassamenti termometrici	depressione molecolare	media
1	2.5010	1.90	128.00	124.20	2.602	2.45	127.10	123.00
2	5.1210	3.76	124.10		5.278	4.80	122.70	
3	7.5522	5.38	120.30		8.492	7.50	119.20	

« Questi risultati mostrano, che effettivamente le soluzioni di fenantrene in antracene e in carbazolo, e di antracene in carbazolo, si comportano nel congelare come vere mescolanze isomorfe, le quali però, come si prevedeva, non congelano uniformemente. Il carbazolo e l'antracene pel loro punto di fusione notevolmente più alto di quello del fenantrene tendono a solidificarsi prima di esso. Perciò, se si rappresenta graficamente il fenomeno ⁽¹⁾, le temperature di congelamento delle singole miscele invece di trovarsi sulla linea retta, che unisce i punti di fusione delle due sostanze costituenti la mescolanza, cadono quasi tutte al disopra di essa e la linea, che li congiunge, risulta essere una curva, che volge la sua concavità verso la retta medesima. Anche il termometro indica, che la soluzione congela in modo irregolare dacchè, quando si è ottenuto un lieve sovraraffreddamento della soluzione, esso sale di poco, resta un istante stazionario e poi continua a discendere finchè quasi tutta la massa è solidificata. Per tale motivo le letture delle temperature di congelamento, specialmente a concentrazioni forti, non sono facili a farsi, nè si hanno sempre valori costanti: io ho sempre notato le temperature più alte osservate, cioè quelle segnate dal termometro quando, il

⁽¹⁾ Prendendo come ascisse il numero di molecole di una delle sostanze contenute in 100 molecole di miscela e come ordinate le temperature di congelamento.

che non è sempre agevole, riescivo ad ottenere un piccolo sovraraffreddamento della miscela fusa.

« Le mescolanze di carbazolo ed antracene, costituite di corpi, che fondono a temperature non molto diverse, danno origine nel congelare a separazioni di miscele solide nelle quali prevale sempre l'antracene, benchè fonda più basso, probabilmente in causa di una maggiore attitudine a cristallizzare. Perciò le temperature di congelamento osservate sono sempre minori di quelle calcolate secondo le regole di mescolanza e si trovano su una curva la quale è al disotto della retta, che unisce le temperature di fusione dei due corpi. Considerando frattanto la miscela di queste due sostanze, vediamo, che già alla concentrazione del 3 per cento circa, il carbazolo innalza il punto di fusione dell'antracene, abbenchè nella prima separazione solida questo prevalga e conseguentemente sia assai poco concentrata la soluzione solida, che si separa.

« Prendendo le depressioni termometriche causate dal fenantrene sciolto in antracene, osservate nelle prime quattro miscele, si ottiene per questo solvente una depressione molecolare, che ha rispettivamente i seguenti valori:

	I	II	III	IV
Concentr. ⁿⁱ riferite a 100 p. di antracene	1.9374	2.4614	5.242	7.793
Depressioni molecolari.	110.36	119.31	113.72	111.96
Valore medio	114.99			

« Gli abbassamenti termometrici osservati con l'acetanilide e la difenilammina a concentrazioni corrispondenti a quelle ora notate, conducono rispettivamente ad un valore medio uguale a 116,53 e 116,79 (¹). La differenza tra questi numeri e quelli trovati col fenantrene è, come si vede, assai piccola e cade quasi entro il limite di quelle, che solitamente si osservano impiegando diverse sostanze per determinare la costante di un solvente. Perciò se si esaminassero soltanto gli abbassamenti termometrici causati dal fenantrene sciolto in antracene alle concentrazioni sopra notate si potrebbe crederlo sostanza a comportamento crioscopico normale.

« Il solo fatto, che potrebbe fino ad un certo punto indicare l'esistenza di un'anomalia sarebbe l'aumento abbastanza rilevante nella depressione termometrica, che si verifica passando dalla prima concentrazione alla seconda

(¹) Dalle determinazioni delle temperature di congelamento di mescolanze di naftalina con antracene, eseguite da Miolati (Zeitschrift für phys. Chemie 9, pag. 649), si deduce per l'antracene una depressione molecolare uguale appena alla metà di quella da me trovata con la difenilammina e l'acetanilide. Ho creduto però di non tener conto delle determinazioni di Miolati, le quali non possono essere molto esatte, come già fa osservare l'autore, perchè l'antracene fonde ad una temperatura assai prossima a quella a cui bolle la naftalina.

e la conseguente diminuzione nel valore del peso molecolare, che pel fenantrene si troverebbe calcolandolo con la costante teorica. È presumibile, che a concentrazioni assai basse, alle quali non mi fu possibile di operare, l'anomalia del fenantrene sciolto in antracene sia molto più sensibile, mentre il comportamento suo diventa sempre più prossimo al normale con l'aumentare della concentrazione e già quasi lo è alla concentrazione del 2,43 per cento.

« Ricorderò qui d'aver quasi sempre verificato, nei casi di comportamento crioscopico anormale dei quali mi sono occupato, che quando la sostanza sciolta aveva punto di fusione più basso del solvente e specialmente se era liquida, si ottenevano per essa dei pesi molecolari decrescenti assai rapidamente con le prime concentrazioni.

« Ciò rende assai probabile, che in tutti questi casi le soluzioni sfuggendo alla legge generale del congelamento, tendano ad uniformarsi alla legge, che vale per le mescolanze isomorfe. Con la teoria delle soluzioni solide di van't Hoff per spiegare la osservata diminuzione del peso molecolare, bisognerebbe ammettere, che nelle successive concentrazioni si separasse allo stato solido una proporzione minore di sostanza disciolta con il solvente. Invece se tali soluzioni ubbidiscono alla legge, che regola il congelamento delle mescolanze isomorfe, l'aumento delle depressioni ci indica indubbiamente, che cresce la concentrazione della soluzione solida separantesi, quando però in questa la sostanza sciolta ha un punto di fusione più basso del solvente. È evidente infatti, nel caso del fenantrene sciolto in antracene, che tanto maggiore è la quantità del primo che congela col secondo, tanto più grande diventa l'abbassamento termometrico che si osserva: e se le mescolanze di fenantrene e antracene congelassero in modo uniforme, se cioè la parte solidificata avesse la stessa composizione di quella, che rimane liquida, allora l'abbassamento termometrico, che si osserverebbe (dovendo essere di gradi 1,17 per una soluzione contenente in 100 parti in peso, una di fenantrene) sarebbe assai maggiore di quella richiesta dalla legge di Raoult.

« Infine calcolando la costante di depressione del carbazolo, considerando il fenantrene come corpo sciolto in esso, si deducono dagli abbassamenti termometrici osservati per le prime tre mescolanze di questi due composti, i valori:

	I	II	III
Concentrazioni in 100 parti di solvente . . .	2.607	5.60	8.80
Depressioni molecolari	104.48	112.14	99.68
Valore medio	102.10		

« In questo caso i numeri trovati si scostano di più dalla costante normale e i pesi molecolari, che si calcolerebbero pel fenantrene sciolto in carbazolo sarebbero abbastanza discosti dai teorici. Ciò è perchè il punto di

fusione ancor più elevato del carbazolo promuove, specialmente a deboli concentrazioni, in gran preponderanza il congelamento di quest'ultimo, mentre invece di fenantrene ne cristallizza assai poco. Se esso si separasse in proporzione più notevole, la depressione raggiungerebbe il valore teorico e potrebbe sorpassarlo.

« Le esperienze ora comunicate e le considerazioni, che se ne deducono sembrano provare che la teoria di van't Hoff sulle soluzioni solide non dà sempre ragione del perchè si debba ottenere una depressione molecolare minore della teorica in tutti quei casi in cui nel congelamento di una soluzione non vi ha separazione di puro solvente. La contraddizione coi risultati sperimentali si manifesta all'evidenza quando si vuole con essa spiegare il comportamento crioscopico delle mescolanze isomorfe, che pure sono, nel più stretto senso della parola, i migliori esempi di soluzioni solide. E la dimostrazione ideata dal van't Hoff non dà altresì una spiegazione soddisfacente di altre anomalie osservate in questi casi, quali per esempio quella del decrescere o dell'andamento irregolare dei pesi molecolari col variare delle concentrazioni, che si verifica sempre, quando la sostanza sciolta fonde più basso del solvente ed anche meglio quando è liquida (p. es. indene in naftalina).

« Io ritengo invece, che ogni qualvolta nel congelamento di una soluzione cristallizza col solvente parte della sostanza sciolta, la soluzione medesima tende ad uniformarsi alle leggi che regolano le mescolanze isomorfe. Questa tendenza è la causa che produce l'eccezione alla legge generale del congelamento, la quale si manifesterà più o meno spiccatamente nei diversi casi, e sulla quale influirà principalmente il punto di fusione delle sostanze sciolte ».

Chimica. — *Sul carbonato acido di tallio* ⁽¹⁾. Nota di G. GIORGIS, presentata dal Socio PATERNÒ.

« Lamy e Des Cloizeaux in una loro Memoria ⁽²⁾ riflettente lo studio chimico, ottico e cristallografico dei sali di tallio, che essi preparano abbandonando all'azione dell'acido carbonico dell'aria una soluzione di ossido talloso, soggiungono:

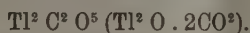
« Nous ajouterons au point de vue chimique, qu'en faisant passer longtemps à froid comme à chaud, un courant d'anhydride carbonique dans une dissolution saturée de carbonate de thallium, et laissant ensuite évaporer spontanément les dissolutions il ne nous à pas été possible de produire de sesquioxide ou de bicarbonate ».

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio dell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

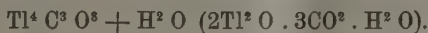
⁽²⁾ Lamy et Des Cloizeaux, *Études chimiques, optiques et cristallographiques sur les sels de thallium*. Ann. de Chim. et de Phys. XVII [4], pag. 310.

« Questa asserzione è confermata dal Werther (¹) il quale, non negando che il carbonato acido possa formarsi in soluzione, dice di mai averlo potuto separare; inquantochè una soluzione di ossido talloso, soprassatura di anidride carbonica col lento evaporamento o colla precipitazione con alcole dà sempre cristalli aciculari o tabulari di carbonato neutro.

« Carstanjen (²) invece asserisce che l'ossido talloso è precipitato da una soluzione soprassatura di acido carbonico mediante l'alcole in aghi cristallini facilmente solubili nell'acqua, la cui composizione sarebbe



« S. M. Iørgensen (³) finalmente ammette l'esistenza del carbonato acido di tallio e gli attribuisce la composizione della formola seguente:



« Parve a me che Lamy e Des Cloizeaux nel loro tentativo di preparazione del carbonato acido di tallio non si erano messi in condizioni favorevoli alla sua formazione, anzitutto perchè avendo presa una soluzione satura di ossido talloso, troppo facilmente poteva separarsi per azione dell'anidride carbonica, del carbonato neutro che ha una solubilità relativamente piccola alla temperatura ordinaria [4,15 % a 15° (Crookes) — 5,25 % a 18° (Lamy)].

« È vero che gli autori hanno operato anche a caldo, ed allora la solubilità del carbonato neutro aumenta considerevolmente [12,85 % a 62° (Lamy) — 22,4 % a 100° (Lamy)]; ma bisogna in tal caso tener conto dell'azione del calore, che è tutt'altro che favorevole alla formazione del carbonato acido.

« D'altra parte poi anche il Carstanjen ed il Iørgensen, pur ammettendone l'esistenza, sono però discordi sulla composizione non solo, ma mentre il primo lo dice anidro, il secondo no. Volli pertanto tentarne anch'io la preparazione; fin da principio però lasciai da parte il metodo proposto dal Carstanjen nella tema che l'azione disidratante dell'alcole potesse manifestarsi in qualche modo sul composto formatosi.

« Mi servii invece del metodo accennato dal Lamy e Des Cloizeaux, modificandolo però a seconda delle osservazioni surriferite, ossia impiegando delle soluzioni relativamente poco sature.

« Io partii da 20 grammi di un miscuglio di ossido talloso ed ossido tallico che misi in digestione nell'acqua scaldando all'ebullizione. Filtravo, e la parte indisciolta raccolta sul filtro ed essiccata la portavo al rosso in un

(1) G. Werther, *Thallium sulat, thallium carbonat*, ecc. ecc. Journ. f. Prakt. Chem. XCII, 132.

(2) Carstanjen, *Thallium carbonat und thallium bicarbonat* ecc. Journ. f. Prakt. Chem. CII. 65.

(3) Gmelin-Krant, *Handbuch der Anorganischen Chemie*. Band. III. 173.

crogiuolo di ferro, ciò allo scopo di favorire la formazione di ossido talloso; inquantochè si sa che il perossido di tallio al rosso dà ossido talloso.

« Polverizzavo il tutto finamente e trattavo di nuovo con acqua all'ebullizione, filtravo unendo il filtrato al primo ottenuto.

« Ripetevo questo trattamento diverse volte e la soluzione così avuta evaporavo alcun poco a bagno maria, e poi la sottoponevo all'azione dell'anidride carbonica in una capsula d'argento.

« Mi parve poi essenziale il mantenere la soluzione continuamente saturata di anidride carbonica non solo, ma anche in un'atmosfera dello stesso gaz, parendomi tali condizioni molto favorevoli alla formazione del carbonato acido.

« A tale scopo ponevo la capsula contenente la soluzione sotto una campana di vetro ad acido solforico e vi facevo gorgogliare una corrente d'anidride carbonica, che, sia all'entrata che all'uscita della campana, era obbligata ad attraversare dell'acido solforico bollito; per cui la campana non poteva avere comunicazione coll'aria esterna.

« Continuai così a far passare lentamente la corrente di anidride carbonica, finchè mi avvidi che la concentrazione della soluzione era tale che accendeva a cristallizzare.

« Ritrassi allora il tubo da cui arrivava l'anidride carbonica finchè non pescava più nel liquido, per non disturbare la cristallizzazione, non interrompendo però la corrente.

« Ottenni in questo modo dei cristalli aghiformi che raccolsi su un filtro e potei analizzare.

« La preparazione era cominciata verso il principio di gennaio e non era finita che verso la metà di marzo.

« Nel prodotto raccolto determinai anzitutto il tallio a solfato, trattandone una certa quantità con acido solforico diluito, tirando a secco ed eliminando l'acido solforico, prima direttamente e poi coll'aiuto del carbonato ammonico.

« Determinai poi l'acido carbonico per perdita di peso coll'apparecchio descritto da Fresenius⁽¹⁾ avendo cura per eccesso di precauzione di unire al tubo da cui si sviluppava la CO_2 un tubo a cloruro di calcio preventivamente pesato e che ripesavo dopo, onde eliminare il dubbio delle possibili perdite di peso, per non essere l'anidride carbonica ben secca.

« Ecco i risultati ottenuti:

gr. 0,6789 di sostanza diedero gr. 0,6420 di solfato di tallio ossia gr. 0,5401 di Tl_2O ;
gr. 0,6690 di sostanza trattati con acido solforico perdettero di peso per CO_2 eliminata gr. 0,1116.

(1) R. Fresenius, *Traité d'analyse chimique quantitative*, pag. 361. Paris 1867.

« Per cui si ha :

	trovato	calcolato per TiHCO^*
$\text{Ti}^2\text{O} \%$	79,50	79,96
CO^2 "	16,69	16,63
H^2O per differenza	3,81	3,41
	<hr/>	<hr/>
	100,00	100,00

« Non avendo potuto per mancanza di prodotto determinare l'acqua, che avevo però constatata qualitativamente, mi accinsi ad un'altra preparazione, tanto più che essendo il percentuale di essa molto piccolo, era necessario operare su una quantità di sostanza piuttosto rilevante.

« Ripetei la preparazione nel modo sovraindicato. Questa volta, quando incominciò la cristallizzazione, si formarono sul fondo della capsula in seno al liquido due grossi cristalli; ma sfortunatamente qualche giorno dopo la campana fu invasa dal sole per qualche ora; per cui essendo aumentata l'evaporazione venne affrettata la cristallizzazione; cosicchè dovetti raccogliere il prodotto dopo poche ore.

« Di questo i due cristalli grossi sopraccennati stavano sempre in seno al poco liquido rimasto, separati dall'altra parte del prodotto che erasi invece deposto alla periferia e di cui una parte anche era fuori del liquido; onde credetti bene di raccogliarli separatamente.

« Su di essi feci una determinazione di anidride carbonica col seguente risultato:

gr. 0,8395 di sostanza trattati con acido solforico perdettero di peso per CO^2 eliminata gr. 0,1393.

« Ossia :

	trovato	calcolato per TiHCO^*
$\text{CO}^2 \%$	16,59	16,63

« Mi trovavo dunque in presenza dello stesso prodotto analizzato precedentemente; ma quando volli determinare il tallio nell'altra porzione raccolta separatamente, e che come dissi sopra si era deposta verso i bordi del liquido, ecco i risultati che ebbi:

gr. 1,0898 di sostanza diedero gr. 1,0758 di solfato di tallio ossia gr. 0,90476 di Ti^2O .

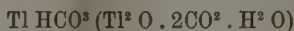
« Per cui:

	trovato	calcolato per TiHCO^*
$\text{Ti}^2\text{O} \%$	83,02	79,96

« Si trattava adunque di un miscuglio, oppure il composto aveva perduto anidride carbonica e forse acqua (aumentando così il percentuale in tallio)

per azione forse del calor solare; ciò che non era avvenuto pei grossi cristalli separatisi prima e che erano rimasti in seno al liquido

« A queste conclusioni mi condusse l'osservazione della composizione centesimale del carbonato neutro, dell'acido rispondente alla formola



e di quello di Iørgensen ⁽¹⁾, nonchè degli altri che possibilmente si possono formare.

« Per confermare meglio la cosa, tentai di determinare l'anidride carbonica nella sostanza che mi rimaneva, ma per cause accidentali la determinazione non potè essere finita.

« Per la terza volta ripetei la preparazione sempre colle stesse precauzioni; la temperatura si era però notevolmente alzata; inquantochè si era arrivati al mese di maggio ed ottenni perciò il prodotto cristallizzato molto più presto, cioè in una quindicina di giorni, mentre la prima volta vi avevo impiegati due mesi.

« Le analisi fatte su due porzioni (raccolte separatamente coi soliti criteri) difatti mi resero manifesto che mi trovavo in presenza di miscugli, per cui credo inutile qui riportarle; giova però notare che il percentuale dell'anidride carbonica si mantenne sempre di molto superiore a quello del carbonato neutro.

« Io sono pertanto convinto che influisca assai sulla formazione del carbonato o dei carbonati acidi, se sono in più, la lenta concentrazione della soluzione, ciò che si ottiene molto meglio nella stagione invernale.

« Concludendo mi pare provato:

« 1.° Che il tallio può dare almeno un carbonato acido; inquantochè il

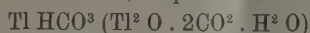
(¹)	$\text{Ti}^2 \text{CO}^3$	$(\text{Ti}^2 \text{O} \cdot \text{CO}^2)$
	$\text{Ti}^2 \text{O}$	90,58
	CO^2	9,42
		<hr/>
		100,00

	Ti HCO^3	$(\text{Ti}^2 \text{O} \cdot 2\text{CO}^2 \cdot \text{H}^2 \text{O})$
	$\text{Ti}^2 \text{O}$	79,96
	CO^2	16,63
	$\text{H}^2 \text{O}$	3,41
		<hr/>
		100,00

	$\text{Ti}^4 \text{C}^2 \text{O}^6 + \text{H}^2 \text{O}$	$(2\text{Ti}^2 \cdot \text{O} \cdot 3\text{CO}^2 \cdot \text{H}^2 \text{O})$	Iørgensen
	$\text{Ti}^2 \text{O}$	84,91	
	CO^2	13,25	
	$\text{H}^2 \text{O}$	1,84	
		<hr/>	
		100,00	

percentuale della CO^2 è stato sempre di gran lunga superiore a quello del carbonato neutro che è uguale a 9,42.

« 2.º Il carbonato acido da me ottenuto nella prima preparazione, e che si riproduse in parte nella seconda, è quello della formula



che corrisponde a quello di Carstanjen quando ad esso si aggiunga una molecola d'acqua ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 4 luglio al 5 agosto 1894.

Ador E. — Jean-Charles Galissard de Marignac. Notice biographique. Genève, 1894. 8º.

Agües Léonce. — Miscellanées mathématiques. Barcelona, 1894. 8º.

Arrigoni degli Oddi F. — Materiali per la Fauna padovana degli animali vertebrati. I. II. Milano, 1894. 8º.

Id. — Note ornitologiche. Siena, 1894. 4º.

Id. — Il *Turdus fuscatus* Pallas, nel Bergamasco. Siena, 1893. 8º.

Id. — Un ibrido naturale di *Anas Boscas* (Linnaeus), e *Penelope Mareca* (Linnaeus) preso nel Veneto. Padova, 1893. 8º.

Birkeland K. — Ueber die Strahlung electromagnetischer Energie im Raume. Leipzig, 1894. 8º.

Branzoli G. — Dell'udito. — Schediasmi musicali. Roma, 1894. 8º.

Bugge Sophus. — Norges Indskrifter med de aeldre Runer. I, II. Christiania, 1894. 4º.

Carazzi D. — Sulle condizioni dell'Ostricoltura nel Mare piccolo di Taranto. Milano, 1894. 8º.

Catalogo di carte e libri pubblicato dal R. Istituto geografico militare. Luglio, 1894. 4º.

Carboni G. — Dizionario pratico ad uso dei commercianti industriali etc. Fascicoli 51-56. Lett. M. Milano, 8º.

Clerici E. — Sulle spugne fossili del suolo di Roma (Potamospongie). Roma, 1894. 8º.

D'Ovidio E. — Per Giuseppe Battaglini, parole commemorative. Torino, 1894. 8º.

Id. — Sulle funzioni Thetafuchsiane. Torino, 1894. 8º.

Fermat. — Oeuvres publiées par les soins de M. M. Paul Tannery et Charles Henry etc. Tome deuxième. Paris, 1894. 4º.

Giazzi F. — Intorno alla natura e all'uso dei tubi di comunicazione colla pompa-tromba a mercurio Alvergnyat, tipo Sprengel, e proposta di modificazioni. Perugia, 1894. 8º.

- Hertz H.* — Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt. Leipzig, 1894. 8°.
- Keeler J. E.* — On the Spectra of the Orion Nebula and the Orion Stars. Reprint from *Astronomy and Astro-Physics*. S. a. e l. 8°.
- Kjerulf Th.* — Beskrivelse of en Række norske Bergarter. Christiania, 1892. 4°.
- Laboratorio chimico-comunale (di Firenze). — Relazione del 1° esercizio (16 agosto 1892, 31 dicembre 1893). Firenze, 1894. 8°.
- Le Jolis A.* — Remarques sur la nomenclature hépatocologique. Paris, 1894. 8°.
- Lémoine E.* — Application au tétraèdre de la transformation continue. Paris, 1893. 8°.
- Id.* — Compléments de géométrie. Paris, 1893. 8°.
- Id.* — Notes de géométrie. Paris, 1893. 8°.
- Id.* — Nuevo medio de obtener fórmulas en la Geometria del triangulo. S. a. e l. 8°.
- Meli R.* — Sopra la natura geologica dei terreni rinvenuti nella fondazione del sifone che passa sotto il nuovo canale diversivo per depositare le torbide dell'Anaseno sulla bassa campagna a destra del canale portatore nelle Paludi Pontine. Roma, 1894. 8°.
- Id.* — Sopra una zanna elefantina a doppia curvatura rinvenuta nelle ghiaie d'alluvione dell'Aniene alla Batteria Nomentana presso Roma. Roma, 1894. 8°.
- Mestorf J.* — Vierzigster Bericht des Schleswig-Holsteinischen Museums vaterländischer Alterthümer bei der Universität Kiel. Kiel, 1894. 8°.
- Moleschott Jacopo.* — (in memoria di . . .). Roma, 1894. 8°.
- Mourel M. G.* — Démonstration du principe de l'équivalence. Niort, 1894. 8°.
- Nyrén M.* — Publication de l'Observatoire central Nicolas. Vol. I. Observations faites au cercle vertical. S. Pétersbourg, 1893. 4°.
- Orlandi S.* — Note anatomiche sul *Macroscincus Coctei* (Barb. du Boc.) Genova, 1894. 8°.
- Pitzorno M.* — Sulle fratture della base del cranio. Sassari. 1894. 8°.
- Sarasin E. et Birkeland K.* — Sur la réflexion des ondes électriques au bout d'un fil conducteur qui se termine dans une plaque. Genève, 1894. 8°.
- Struve O.* — Observations de Poulkovo publiées par Vol. X. Mesures micrométriques des étoiles doubles. S. Pétersbourg, 1893. 4°.
- Tommasi A.* — La fauna del calcare conchigliare (Muschelkalk) di Lombardia. Pavia, 1894. 8°.
- Trabucco G.* — Sulla posizione del calcare di Mosciano e degli alti terreni eocenici del bacino di Firenze. Firenze, 1894. 8°.
- Virchow R.* — Morgagni und der anatomische Gedanke. Berlin, 1894. 8°.
- Wiltram Th.* — Russische Expeditionen der Beobachtung des Venusdurchgangs 1894. Abth. I. S. Pétersbourg, 1894. 4°.
- Id.* — Tables auxiliaires pour la détermination de l'heure par des hauteurs correspondantes de différentes étoiles. S. Pétersbourg, 1894. 8°.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 19 agosto 1894.

Matematica. — Sulle assintotiche delle rigate contenute in una congruenza lineare. Nota del prof. GIULIO PITTARELLI, presentata dal Socio CREMONA.

« Nelle mie due Note, *Sulle linee assintotiche di una classe di superficie gobbe di genere zero — Sulle linee assintotiche delle superficie gobbe razionali di Cayley*, pubblicate nelle sedute del 10 e del 17 maggio 1891 di cotesta illustre Accademia, trattai di alcune proprietà delle rigate contenute in una congruenza lineare (a direttrici distinte o coincidenti) ma razionali. Per altro quelle proprietà che non traggono la loro ragion d'essere nè dall'algebricità nè dalle razionalità della superficie sussistono per superficie qualunque, algebriche o trascendenti, purchè contenute nella congruenza.

« Ciò mi propongo far vedere in questa e nella Nota seguente.

« In un'altra Nota poi, completando il soggetto di quello del 1891, parlerò delle rigate algebriche, ma di genere qualunque.

Rigate qualunque.

Congruenza a direttrici distinte.

Se con a_i, b_i indichiamo delle funzioni qualunque di v finite e continue insieme alle loro derivate prime seconde e terze, le eq.ⁱ di una rigata in coordinate curvilinee u, v sono, com'è notissimo:

$$1) \quad x_1 = a_1 u + b_1, x_2 = a_2 u + b_2, x_3 = a_3 u + b_3, x_4 = a_4 u + b_4$$

« Tracciando su d'un piano arbitrario due assi coordinati u, v , le rette $v = \text{cost.}$ rappresentano le generatrici, e le rette $u = \text{cost.}$ rappresentano una curva gobba della famiglia delle curve di riferimento sulla superficie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

$$x''_1 : x''_2 : x''_3 : x''_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4$$

corrispondenti ai valori $u = \infty$ ed $u = 0$.

« Le coordinate-raggi z_{ij} della generatrice $x'x''$ sono i determinanti della matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix};$$

e se essa appartiene ad un complesso qualunque del fascio

$$2) \quad z_{12} - k z_{34} = 0$$

cioè alla congruenza lineare che ha per direttrici le rette $z_{12} = 0$ $z_{34} = 0$, dovrà aversi identicamente qualunque sia v e k

$$z_{12} \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad z_{34} \equiv a_3 b_4 - a_4 b_3 = 0.$$

« L'annullarsi di questi due determinanti, risultanti delle due coppie di forme $x_1 x_2, x_3 x_4$, lineari in u , date dalle 1), prova che possiamo porre

$$a_1 = \varphi_1 a, \quad b_1 = \varphi_1 b, \quad a_2 = \varphi_2 a, \quad b_2 = \varphi_2 b$$

$$a_3 = \varphi_3 c, \quad b_3 = \varphi_3 d, \quad a_4 = \varphi_4 c, \quad b_4 = \varphi_4 d$$

dove a, b, c, d e φ_i sono funzioni di v .

« Segue da ciò che alle 1) dobbiamo dar la forma:

$$3) \quad x_1 = \varphi_1(au + b), \quad x_2 = \varphi_2(au + b), \quad x_3 = \varphi_3(cu + d), \quad x_4 = \varphi_4(cu + d).$$

« È da notare che il determinante $ad - bc$ non può esser identicamente zero; perchè altrimenti le due forme $au + b, cu + d$ differirebbero per un fattore λ (costante o funzione di v) e le 2) diverrebbero, includendo l'unico binomio $au + b$ nel fattore di proporzionalità delle coordinate,

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \lambda \varphi_3 : \lambda \varphi_4;$$

e queste eq.ⁱ rappresentano una curva, non una superficie.

« Dalle 2) possiamo trarre, eliminando i binomi in u ,

$$4) \quad \varphi_2 x_1 - \varphi_1 x_2 = 0, \quad \varphi_4 x_3 - \varphi_3 x_4 = 0,$$

che rappresentano piani passanti per una generatrice $v = \text{cost.}$ e per le direttrici $x_1, x_2 = 0, x_3, x_4 = 0$ della congruenza. L'eliminazione di v tra le 3) conduce all'eq.^o della superficie

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0;$$

possiamo anzi dire che le forme dell'eq.^o dev'essere la

$$V\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4}\right) = 0,$$

del tipo conoidale.

« La natura della superficie dipende soltanto dalle funzioni φ_i o, meglio, da' rapporti $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\varphi_4}{\varphi_3}$ che, in sostanza, sono le coordinate binarie dei piani mobili con v nei due fasci 4). Perciò non può essere nè contemporaneamente, nè separatamente:

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dv} \left(\frac{\varphi_3}{\varphi_4} \right) = 0$$

identicamente. Infatti, se avesse luogo per es. la prima identità, il rapporto $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ sarebbe indipendente da v ; onde il primo dei piani 3) sarebbe fisso, e la rigata si ridurrebbe al fascio di rette segnate su quel piano fisso dal secondo piano (mobile) 4). E nè anche può essere

$$\varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3 = 0 :$$

altrimenti la superficie diverrebbe l'iperboloide

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0,$$

che vogliamo escludere dai nostri ragionamenti. (I fasci 4) sarebbero proiettivi).

« Ritenendo definite le coordinate ξ_i di un piano ξ dall'eq.°

$$\xi x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

l'eq.° del punto 3) della superficie è

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2)(au + b) + (\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4)(cu + d) = 0.$$

« Essa è l'eq.° di un punto sulla retta che unisce i due corrispondenti ad $u = 0$ $u = \infty$

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2) a + (\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4) b = 0$$

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2) c + (\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4) d = 0$$

o anche, poichè $ad - bc \leq 0$, sulla retta che unisce i punti

$$5) \quad \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 = 0, \quad \varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4 = 0,$$

il primo dei quali è situato sulla retta $x_3, x_4 = 0$, il secondo sulla retta $x_1, x_2 = 0$ direttrici della congruenza.

« Le 5) hanno la stessa forma (duale) delle 4). Si trae da ciò che l'eq.° della sup. in coordinate di piani si ottiene dalle $U = 0, V = 0$ ponendo in queste, al posto di x_1, x_2, x_3, x_4 rispettivamente $\xi_2, -\xi_1, \xi_4, -\xi_3$; e si ha dunque

$$U(\xi_2, -\xi_1, \xi_4, -\xi_3) = 0, \text{ ovvero } V\left(-\frac{\xi_2}{\xi_1}, -\frac{\xi_4}{\xi_3}\right) = 0.$$

« L'eq.° del piano tangente nel punto x , dinotando con y_i le coordinate correnti e con accenti le derivate rispetto a v , è:

$$(cu + d)(\varphi_4 \varphi'_3 - \varphi_3 \varphi'_4)(\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - (au + b)(\varphi_2 \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_2)(\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0.$$

« Ponendo per brevità

$$6) \quad \begin{aligned} au + b &= f, \quad cu + d = g \\ \varphi_2 \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_2 &= F, \quad \varphi_4 \varphi'_3 - \varphi_3 \varphi'_4 = G \end{aligned}$$

scriveremo la precedente eq.^o così:

$$7) \quad g G (\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - f F (\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0.$$

« Scriviamo adesso l'eq.^o del piano polare dello stesso punto x rispetto al complesso 2)

$$8) \quad f (\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - k g (\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0.$$

Identificando questa all'eq.^o precedente, il punto di contatto x sarà un punto di quell'assintotica che corrisponde al dato valor di k (costante d'integrazione); e ciò per il ben noto teorema di Lie ch'io richiamai nella prima delle mie Note ricordate.

« Per questa identificazione si avrà:

$$9) \quad F f^2 - k G g^2 = 0,$$

ch'è l'eq.^o in coordinate curvilinee u, v dell'assintotica A_k , corrispondente a k .

« Le espressioni parametriche in funzione di v delle coordinate dei punti della curva A_k si ottengono eliminando tra le 3) e la 9) il parametro u , e, cioè, il rapporto $f:g$. Si trova così:

$$9^{bis}) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 \sqrt{kG} : \varphi_2 \sqrt{kG} : \varphi_3 \sqrt{F} : \varphi_4 \sqrt{F}$$

dove ad uno dei due radicali si deve dare il doppio segno \pm . Ma anche le 9^{bis}) si possono far dipendere da' soli rapporti

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \mu(v) = \mu, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_4} = \nu(v) = \nu,$$

dovendo essere $\mu - \nu = \frac{\varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3}{\varphi_2 \varphi_4} \geq 0$, come fu osservato.

« Infatti dalle espressioni 6) di F e G si trae

$$10) \quad F = \varphi_2^2 \frac{d\mu}{dv} = \varphi_2^2 \mu', \quad G = \varphi_4^2 \frac{d\nu}{dv} = \varphi_4^2 \nu'$$

dove poi, sostituendo in 9^{bis}), si ha subito:

$$11) \quad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \mu \sqrt{k\nu'} : \sqrt{k\nu'} : \nu \sqrt{\mu'} : \sqrt{\mu'}.$$

« Se μ è una funzione algebrica di ν , cioè se tra μ e ν esiste una relazione della forma

$$\Phi \left(\mu, \nu \right) = 0$$

di grado m in μ e di grado n in ν , allora, poichè le derivazioni non introducono trascendenti, le curve 11) saranno algebriche. Questo caso sarà trattato nella Nota in cui parlerò delle rigate algebriche.

« Il fatto che la 9) sia di 2° grado in u e che, perciò, l'assintotica A_k incontri in due punti una generatrice qualunque v delle superficie, trova la spiegazione geometrica in ciò che, come osservò Klein, ad un piano ξ per la generatrice v della superficie corrispondono proiettivamente due punti, l'uno x di contatto con le superficie, l'altro x_1 come polo del piano stesso

rispetto al complesso 2). I punti x ed i punti x_1 formano due punteggiate proiettive su v , i cui punti uniti, appartengono all'assintotica, pel teorema di Lie. E dualmente.

« La forma delle 9) e 9^{bis}) mostra che le funzioni F e G si annullano per quei valori di v i quali danno generatrici toccate dalle A_k , ed i punti di contatto sono sull'una o sull'altra delle direttrici rettilinee. Si trae pure, dal doppio segno di uno dei due f' , che sopra una generatrice qualunque v i due punti comuni ad essa ed all'assintotica A_k ed i due ne' quali essa incontra le direttrici rettilinee formano un gruppo armonico; e variando k la prima coppia forma un'involuzione i cui elementi doppi sono quelli della seconda coppia: l'eq.^e dell'involuzione è

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2)^2 k G - (\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4)^2 F = 0,$$

ed ai valori $k=0$ o $k=\infty$ corrispondono l'uno o l'altro dei due punti $\varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4 = 0$, $\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 = 0$ delle direttrici rettilinee. La 9) mostra allora che, poichè v è data, le assintotiche corrispondenti sono fornite dalle eq.ⁱ $f^2 = 0$, $g^2 = 0$ che danno precisamente le due direttrici rettilinee, ciascuna contata due volte. Le generatrici, per contrario, toccate da una A_k nei punti situati sulle predette direttrici sono le generatrici *singolari* delle superficie, per le quali appunto F e G si annullano. Ed infatti per queste generatrici singolari varranno le eq.ⁱ 4) insieme alle loro derivate rispetto a v

$$\varphi'_2 x_1 - \varphi'_1 x_2 = 0, \quad \varphi'_4 x_3 - \varphi'_3 x_4 = 0,$$

« Le quattro eq.ⁱ devono coesistere, onde

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & 0 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ 0 & 0 & \varphi'_3 & \varphi'_4 \end{vmatrix} = FG.$$

« Data sempre la generatrice v , consideriamo sovra di essa i due punti comuni coll'assintotica A_k , i cui parametri u_k , u'_k saranno le radici dell'eq.^e 9) quadratica in u , ed una coppia di punti di parametri uu_1 coniugati armonici con quelli della prima. I parametri u ed u_1 saranno legati tra loro dall'eq.^e prima polare di 9), cioè dalla

$$12) \quad F f_1 f - k G g_1 g = 0$$

dove $f = au + b$, $f_1 = au_1 + b$ ecc.

« La 12) permette di scrivere l'eq.^e 7) del piano tangente nel punto di parametri u , v co' parametri u_1 , v ; basta per questo eliminare tra le due il rapporto $Ff:Gg$: e si ha

$$13) \quad f_1 (\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - k g_1 (\varphi_4 y_3 - \varphi_3 y_4) = 0.$$

« Or questa è la 8) scritta co' parametri u_1 , v : essa dunque rappresenta il piano polare del punto u_1 , v rispetto al complesso 2). Con l'aiuto di questa eq.^e noi possiamo scrivere le espressioni delle coordinate del piano

tangente nel punto u, v sotto forma molto più semplice di quella che si avrebbe dalla 7): esse sono

$$\xi_1 = g_2 f_1, \xi_2 = -g_1 f_1, \xi_3 = -k g_4 g_1, \xi_4 = k g_3 g_1,$$

e, come si vede, hanno la stessa struttura delle coordinate x_i del punto di contatto x ; salvo che nelle espressioni f e g figura non già il parametro u ma quello u_1 coniugato armonico di esso rispetto ad $u_k u'_k$ (il parametro v è lo stesso, perchè la generatrice non muta in questo discorso). Segue che se noi scriviamo (col parametro u)

$$14) \quad \eta_1 = g_2 f, \eta_2 = -g_1 f, \eta_3 = -k g_4 g, \eta_4 = k g_3 g$$

saranno queste le coordinate del piano polare del punto u, v rispetto al complesso, ma anche del piano tangente alla superficie nel punto coniugato armonico di uv rispetto ai due $u_k, v; u'_k, v$. Dalle 14) e dall'8) noi traghiamo

$$14^{bis}) \quad x_1 = -\eta_2, x_2 = \eta_1, x_3 = -\frac{1}{k} \eta_4, x_4 = \frac{1}{k} \eta_3$$

che stabiliscono la giù generale reciprocità rispetto al complesso che muta la rigata e l'assintotica A_k in se stessa (1).

« Possiam dunque concludere:

« Nel piano (uv) la 12) definisce una trasformazione involutoria di 2° ordine, le cui coppie di punti sono sulle rette del fascio $v = \text{cost.}$: la curva unita dell'involuzione è la curva 9), immagine dell'assintotica arbitraria A_k . Ad un punto u, v del piano corrisponderà sulla superficie un punto u, v ed un piano u, v polare del complesso 2) che la toccherà nel punto u_1, v coniugato armonico di u, v rispetto ai punti nei quali la generatrice v è tagliata dall'assintotica A_k .

« Per ogni assintotica si ha una trasformazione involutoria nel piano ed una trasformazione reciproca della superficie in se stessa, per la quale l'assintotica non muta. Vi sono ∞^1 di tali trasformazioni.

« Reggono dunque le conclusioni di questa mia Nota; soltanto qui non si può parlare di rappresentazione nel senso stretto (di Clebsch) cioè di rappresentazione biunivoca; e la trasformazione involutoria non si può dire di Jonquières, perchè la curva 9) non è algebrica ».

(1) Una particolare fu trovata esaminando le eq.¹ 4) e 5); essa corrisponde a $k=1$.

Fisica terrestre. — *Distribuzione del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio* ⁽¹⁾. Nota del dott. GIUSEPPE FOLGHERAITER, presentata dal Socio BLASERNA.

« In una Nota precedente ho determinato l'influenza, che nelle ricerche sul magnetismo delle rocce può esercitare il magnetismo indotto dall'ago dell'istrumento di misura sui risultati ottenuti, ed ho trovato, che quando si lascino da parte i punti distinti, e si collochi l'istrumento a conveniente distanza tale influenza è in generale trascurabile, e si può essere quindi certi, che i valori che si ottengono, rappresentano realmente il magnetismo proprio delle rocce.

« È scopo di questa Nota di indagare se nei giacimenti vulcanici del Lazio esista o no una sistematica distribuzione del magnetismo, e se la forza magnetizzante di essi possa essere stata l'induzione della Terra, corrispondentemente a quanto il Melloni ⁽²⁾ ha constatato per le lave del Vesuvio: nelle misure che a tale scopo si fanno, viene determinata la risultante dell'azione del magnetismo permanente e di quello temporaneo indottovi dalla Terra. Quest'ultimo ha una distribuzione analoga a quella nel ferro dolce; invece del magnetismo permanente non si può dire a priori affatto nulla; può darsi il caso che esso mascheri il magnetismo temporaneo, oppure anche che da questo sia mascherato, e finchè la roccia non venga smossa e non si determini mediante cambiamento di orientazione l'intensità del magnetismo indotto dalla Terra, bisogna contentarsi di esaminare l'effetto prodotto dalla risultante dei due magnetismi riuniti.

« Le mie ricerche hanno per guida il fatto che se prevalesse nelle rocce il magnetismo temporaneo indottovi dalla Terra, esse dovrebbero essere calamitate tutte nel medesimo senso; dovrebbero presentare cioè un polo ⁽³⁾ Sud all'estremo superiore del giacimento, quindi, seguendo una direzione parallela all'ago d'inclinazione, l'intensità magnetica dovrebbe successivamente diminuire fino a diventare zero, poi crescere nuovamente con segno contrario, ed all'estremo inferiore raggiungere un secondo massimo d'intensità, il polo Nord. Per tali ricerche il metodo più semplice e più naturale, che si affaccia alla mente è quello di esaminare i giacimenti lungo una tale linea, oppure

(1) Vedi nota pag. 53.

(2) Memorie della R. Accad. delle Scienze di Napoli, vol. I, 1853, pag. 121.

(3) L'espressione polo non si deve prendere in senso assoluto, ma come semplice modo di dire, atto a rendere più spedito il discorso: così per polo *Nord* si deve intendere la regione del corpo magnetizzato ove il magnetismo nord trovasi sviluppato con maggior intensità.

anche lungo una verticale ⁽¹⁾ mediante una bussola onde constatare per mezzo delle attrazioni e ripulsioni, che il suo ago subisce, quale sia la polarità ed intensità del magnetismo nei suoi vari punti. A tal uopo nei singoli punti da esaminare si dirige il cannocchiale della bussola su un'unica mira assai lontana e si leggono i corrispondenti azimut magnetici: poi sull'allineamento stesso si sceglie un punto non perturbato, si dirige il cannocchiale sulla stessa mira e vi si determina l'azimut magnetico, dal valore del quale si può stabilire quali dei punti esaminati sulla roccia avevano polarità Nord e quali la polarità Sud. È come si vede il metodo adottato dal Keller ⁽²⁾ a tre punti coll'unica differenza, che qui si tiene conto dell'azione attrattiva o ripulsiva della roccia.

« Disgraziatamente nella Campagna romana rari sono i luoghi che si prestano bene a tal metodo di misura, sia perchè difficilmente si incontrano dei giacimenti di rocce vulcaniche di grande spessore, che siano denudate fino alla loro base e siano accessibili a varie altezze del loro spessore, sia perchè raramente questi giacimenti si trovano vicini a terreno non magnetico, nel quale si possa scegliere un punto di confronto non perturbato. Perciò ho adoperato questo metodo solo nei pochi casi in cui esisteva in vicinanza del banco un punto di riferimento privo di azione magnetica, o di azione tanto debole da avere la sicurezza, che le differenze d'azimut trovate tra i punti della roccia vulcanica ed il punto ritenuto neutro, erano realmente dovute alla azione magnetica della roccia esaminata.

« In alcuni casi mi sono servito di questo metodo anche quando un giacimento si trovava circondato da terreno magnetico. Si comprenda, che le misure ottenute non sono che relative e non decidono della polarità magnetica dei punti esaminati, ma mostrano soltanto la differenza di intensità del magnetismo a diverse altezze dello stesso giacimento di roccia vulcanica.

« Nella maggior parte dei casi ho dovuto contentarmi di determinare la polarità di punti singoli, che scelsi preferibilmente all'estremo superiore od inferiore dei giacimenti. Essa venne stabilita con uno dei seguenti tre metodi secondo le esigenze e condizioni del luogo:

« 1° Col metodo a due punti, quando la mira scelta era in un terreno non magnetico, ed era un punto accessibile. Questo metodo fu adottato specialmente nelle misure fatte alla riva sinistra dell'Aniene tra i ponti Nomentano e Mammolo. La mira era un alto palo da pagliaio posto sul vertice

(1) Coulomb ha esaminato in questo modo la distribuzione del magnetismo nelle calamite comuni; sarà qui superfluo il ricordare che il metodo non è esatto con tutto il rigore, perchè la bussola non sente unicamente l'azione del punto più prossimo, ma anche quella dei punti che trovansi a qualche distanza: l'inesattezza risultante non ha nel caso mio alcuna importanza.

(2) Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. IV, 1° sem., 1888, pag. 42.

del monte Sacro, località certamente assai poco magnetica, come è risultato da misure di scandaglio che vi feci.

« 2° Col metodo dell'intensimetro ad oscillazione venne esaminata la polarità di molti punti situati in luogo, ove non eranvi buone mire. I punti da esaminare dovevano essere orientati in modo che venisse a presentarsi loro decisamente o il polo Nord o il polo Sud dell'intensimetro. Così nei diversi casi dall'aumento o diminuzione nella durata d'oscillazione della sbarra si poteva senza alcun dubbio stabilire, in che senso veniva influenzato il campo magnetico dalla presenza della roccia e quindi determinare la sua polarità. Fu presa per durata d'oscillazione normale quella ottenuta sul Colle della Farnesina, in un punto definito dal Keller ⁽¹⁾, alla temperatura di 21,1.

« Con questo metodo ho determinato la polarità magnetica di molti punti situati alla base di diversi giacimenti di rocce vulcaniche. Fra questi i più notevoli, sia per la loro estensione, sia per la loro potenza sono:

« La grande colata di lava sulla quale è tracciata la via Appia antica; in parecchi luoghi in seguito all'estrazione del materiale è stata messa a nudo la base del giacimento, ed è visibile il terreno, sul quale esso riposa;

« Il grande giacimento di tufo vulcanico che si stende tra i ponti Nomentano e Mammolo alla sinistra dell'Aniene: in alcuni siti sia per l'azione delle acque sia per le escavazioni fatte dall'uomo la parte di roccia denudata arriva perfino alla potenza di 12 metri. I punti esplorati ai piedi di quelle alte pareti sono con tutta probabilità assai vicini alla base del giacimento;

« Il potentissimo giacimento di pozzolana situato nella tenuta delle Tre Fontane: per le escavazioni fatte sono accessibili dei punti posti molto profondamente, ed al giudicare dagli scoli d'acqua, molto vicini alla base del giacimento.

« 3° Finalmente talvolta si determinava, se l'azione della roccia sopra uno dei poli dell'ago era attrattiva o ripulsiva, dalla differenza di azimut, che si otteneva collocando la bussola successivamente a destra ed a sinistra, oppure avanti e di dietro al punto da esplorare. In questi casi si puntava il cannocchiale su d'una mira tanto distante, che l'angolo formato dalla direzione delle due visuali alla mira fosse trascurabile, e che quindi l'errore prodotto dallo spostamento della bussola non potesse influire sui risultati. Se le condizioni topografiche non permettevano di avere una mira assai lontana, si teneva conto nella lettura fatta nella seconda posizione della bussola dell'errore angolare prodotto dallo spostamento di questa. Dove mi fu possibile, cercai di scegliere rocce orientate in maniera, che l'ago avesse a disporsi a press'a poco parallelamente ad esse: in tal modo veniva evitata con tutta sicurezza l'azione prodotta dalla reciproca induzione tra ago e roccia, e l'attrazione o repulsione che subiva l'ago, era molto più marcata.

⁽¹⁾ *Misure relative dell'intensità orizzontale del magnetismo terrestre lungo il parallelo di Roma.* Roma, 1894, pag. 5.

« Adottai questo metodo specialmente per determinare la polarità magnetica delle sporgenze ed ondulazioni esistenti alla sommità dei giacimenti: quasi tutte le ricerche sullo sperone del Tuscolo, molte ricerche su sporgenze della grande colata di lava della via Appia Antica, dei banchi di tufo vicino al Forte di Pietralata e della località *Vigne nuove* alla sinistra della via Nomentana furono fatte con questo metodo.

« I punti esaminati superano il centinaio. Di questi 48 si trovano decisamente più vicini all'estremo superiore dei giacimenti di rocce, ossia ad una altezza tale dello spessore, che la parte sottostante era di gran lunga più potente: tutti questi punti sono compresi tra i limiti 0 ed 1 metro dalla superficie superiore del giacimento. Altri 39 punti sono decisamente più vicini alla base delle rocce: naturalmente qui è più difficile lo stabilire con precisione, qual era la distanza dei punti esaminati dalla base dei giacimenti, ma dalle cose esposte nella descrizione dei metodi di misura, e se si considera che mi limitai ad esaminare solo i punti in luoghi ove la natura geologica del terreno su cui poggiavano i giacimenti, era ben determinata, e riconosciuta non magnetica od assai debolmente, risulta chiaro che in nessuno di questi punti può sorgere il dubbio, che lo strato magnetico posto al di sopra non sia di gran lunga più potente, che il rimanente posto di sotto.

« Gli altri punti esaminati in numero di 17 variano di posizione nella parte mediana dei banchi, ma non ho avuto dati sufficienti per stabilire se erano più vicini all'estremo superiore od inferiore dei giacimenti.

« Nella scelta dei luoghi per le misure ho usato sempre queste due restrizioni: 1° Non ho mai esaminato le sporgenze agli estremi Nord e Sud di giacimenti, perchè potrebbe esservi una distribuzione sistematica longitudinale del magnetismo nelle rocce, della quale non ho voluto per ora occuparmi, essendo scopo delle mie ricerche quello di determinare la distribuzione del magnetismo nella direzione dall'alto in basso (per questo motivo ho cercato giacimenti di rocce vulcaniche molto potenti). 2° Ho sempre evitato i punti distinti, che si trovano nella lava basaltina, e che furono ultimamente rinvenuti dal dott. A. Cancani ⁽¹⁾ anche nello sperone, perchè come già esposi altrove, in essi l'orientazione del magnetismo è affatto irregolare: così mi sono allontanato dal pericolo, che i risultati ottenuti per le rocce magnetiche in genere possano essere svisati dalle anomalie dei punti distinti.

« I risultati ottenuti nelle mie ricerche possono essere brevemente riassunti come segue:

« In tutti i punti posti alla parte superiore di giacimenti di rocce vulcaniche, siano esse tufo, pozzolana, lava basaltina, sperone ecc., ho trovato sempre un polo Sud *senza avere mai avuto un'eccezione*.

(1) Rend. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5^a, vol. III, 1° sem., 1894, pag. 390.

« In tutti i punti posti all'estremo inferiore di giacimenti ho costantemente trovato un polo Nord *senza alcuna eccezione*.

« Nei punti intermedi furono trovati dei poli Sud e Nord ora deboli ora forti: in alcuni casi ho avuto dei poli Nord a soli 2 metri dall'estremo superiore: talvolta ho avuto dei poli Sud anche a profondità di 7 metri: ma questi due casi citati non si possono considerare come eccezione alla regola generale, fino a che non si conosca la profondità del giacimento al di sotto del piano visibile: può darsi benissimo, che la parte sepolta e non escavata del giacimento sia nel 2° caso molto più alta di quella messa alla luce, e nel 1° caso molto più bassa.

« Nei casi in cui ho esaminato in che modo varia l'azimut magnetico segnato dalla bussola, quando questa venga collocata ad altezze diverse dello spessore di un giacimento, ho trovato che, a seconda che mi allontanava dall'estremo superiore, l'ago si spostava nel senso da dovere ritenere che veniva diminuita l'attrazione della roccia sul polo Nord, e similmente quando mi allontanava dalla base e metteva la bussola in posizioni successivamente più alte, dagli spostamenti dell'ago doveva concludere, che veniva diminuita l'attrazione della roccia sul polo Sud.

« Riporto qui ad esempio i risultati delle misure fatte nella grande cava di pozzolana al III kilometro dell'Ardeatina: qui in seguito all'escavazione del materiale vi sono due pareti verticali, alle quali per l'azione dell'acqua trovasi addossato una specie di cono di deiezione formato da terreno vegetale mescolato a pozzolana. Ho collocato la bussola accanto alle pareti, sempre ad ugual distanza, a varie altezze seguendo una generatrice del cono.

« Riassumo nella tabella i risultati:

I	II	III
m. 0.2	0. 0'0	0. 0'0
1.2	1.20.0	—
2.5	1.25.0	1.50.5
3.5	2. 8.0	2.24.0
5.0	—	3.50.4

« Nella 1ª colonna sono segnate le altezze alle quali trovavasi la bussola, partendo dall'estremo superiore del banco; nella 2ª e 3ª colonna sono segnate le differenze d'azimut tra la prima stazione e le successive dovute rispettivamente all'azione magnetica della 1ª e 2ª parete: il polo Nord andava successivamente allontanandosi; segno che diminuiva l'attrazione su di esso. Se fosse lecito riferire i risultati ad un punto distante dalla parete ma posto entro la cava stessa, si avrebbe in alto un polo Sud, a circa 3 m. la linea neutra

ed al di sotto un polo Nord, giacchè la differenza d'azimut fra la 1^a stazione e questo punto sarebbe rispettivamente per le due pareti 1°.34' e 1°.52'.

« *Conclusione.* — Dall'esame dei risultati ottenuti si trova che esiste realmente una distribuzione sistematica del magnetismo nelle rocce vulcaniche esaminate: ogni giacimento di roccia vulcanica si può considerare come una grande calamita col suo polo Nord in basso col polo Sud in alto, come se fosse stato magnetizzato per effetto dell'azione induttrice del magnetismo terrestre. Con ciò non è escluso però, che esistano delle anomalie più o meno forti, sia perchè la costituzione mineralogica della roccia nei vari punti d'uno stesso giacimento può essere alquanto diversa, sia perchè lo spessore dei giacimenti varia molto da sito a sito secondo le ondulazioni del sottosuolo, sia forse per cause a noi affatto ignote.

« La sistematica distribuzione del magnetismo nelle rocce spiega anche la grande divergenza tra i risultati ottenuti sull'azione magnetica di rocce di egual natura. Talvolta si rimane sorpresi nel trovare appena delle tracce di azione magnetica accanto a colossali masse di rocce vulcaniche che per solito hanno un'intensità magnetica grande. È naturale che se quei giacimenti si protendono ancora nel sottosuolo, e noi abbiamo messo quindi il nostro strumento di misura vicino alla linea neutra di quella grande calamita, il risultato non può essere che negativo. Da ciò si vede pure che le misure finora fatte, che mostrano tanta irregolarità nell'intensità magnetica nei vari punti di una stessa roccia o di rocce affini, non sono in contraddizione col fatto, che esista una distribuzione sistematica del magnetismo nelle rocce vulcaniche, ma forse in alcuni casi ne sono una conferma ».

Fisica. — *Sull'attrito interno del nichel* (1). Nota del dott. M. CANTONE, presentata dal Socio BLASERNA.

« In alcune precedenti Note (2) ho esposto i risultati di varie ricerche sulla flessione dell'ottone eseguite da me allo scopo di assodare l'analogia tra i fenomeni di elasticità e quelli studiati dal Warburg e dall'Ewing nel magnetismo, ed ho trovato una grande somiglianza fra le leggi che li governano. Il fatto che maggiormente ha attirato la mia attenzione si è l'aversi, dopo un numero pari di alternazioni, col ritorno alla forza da cui si è partiti la chiusura del cappio rappresentante l'andamento del ciclo, il che porta senz'altro alla conseguenza di un lavoro delle forze esterne necessario alla produzione dei cicli coi processi statici, lavoro che va trasformato in calore.

« Seguendo quest'ordine d'idee nell'ultima di quelle Note mettevo avanti l'ipotesi che lo smozzamento delle oscillazioni non fosse un fenomeno di na-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica della R. Università di Palermo.

(2) V. Rend. Acc. dei Lincei, vol. II, 2° sem., p. 246, 295, 339, 385, 1893; vol. III, 1° sem., p. 27, 62.

tura dinamica, ma dipendente da quella medesima causa che produce i fenomeni d'*isteresi elastica*, in quanto l'energia potenziale del corpo abbandonato a sè, per la legge che esso segue nel deformarsi, deve a poco a poco convertirsi in calore; ed avvaloravo tale opinione appoggiandomi a ricerche di altri sperimentatori sull'attrito interno: mi riserbavo però un più attento esame della questione mediante lo studio delle proprietà elastiche coi metodi statico e dinamico.

« Ricerche in proposito sono state da me intraprese in questi ultimi tempi per la torsione del nichel, e poichè i risultati cui sono giunto mi sembrano di un certo interesse, mi permetto di pubblicarli prima ancora che fosse esteso lo studio ad altri metalli.

« L'apparecchio adoperato è abbastanza semplice. Il filo che si cimenta, è saldato agli estremi a due cilindretti di ottone i quali mediante viti si fermano in due cavità praticate l'una in un pezzo di ottone che collega stabilmente il filo dalla parte superiore ad una robusta mensola di legno, e l'altra in un grosso cilindro metallico. Questo pezzo porta la puleggia che serve ad esercitare gli sforzi di torsione, e nella parte più bassa una ruota con sei raggi destinata a sorreggere due anelli, che danno al tempo stesso il carico necessario per tenere diritto il filo, ed un momento d'inerzia sufficientemente grande per rendere possibili le letture delle ampiezze nello studio dello smorzamento delle oscillazioni. La puleggia di cui sopra è fatto cenno è munita di due gole nelle quali sono avvolti in senso opposto i fili che portano i piattelli per i pesi torcenti, e che restano nei primi tratti distesi orizzontalmente mercè due piccole carrucole laterali.

« Una seconda mensola sporgente dalla parete tiene all'altezza dell'estremo inferiore del filo di nichel due lastrine rettangolari, che si possono portare a contatto secondo lo spessore lasciando un foro circolare smussato verso le facce più estese e destinato, per essere il suo diametro un poco superiore a quello del filo che vi passa attraverso, ad impedirne le flessioni provocate dalle forze torcenti. La regolarità dell'esperienza col metodo statico ci assicura che l'attrito inevitabile del filo contro il bordo del foro non costituisce una causa disturbatrice rilevante. D'altra parte deve ritenersi che la presenza delle due lastrine nello studio delle oscillazioni non riesca a produrre notevoli disturbi; infatti, avendo potuto constatare che per diverse serie di esperienze col metodo dinamico le letture delle successive escursioni presentano in generale un accordo assai marcato, e che quelle di ciascuna serie rivelano un andamento del tutto normale, non può ammettersi che il filo, abbandonato a sè, non resti perfettamente libero.

« Per la misura degli angoli di torsione adoperavo un cannocchiale munito di scala, ed uno specchietto legato al filo a conveniente altezza mediante una sospensione che permetteva di precisare il punto di attacco. Note la di-

stanza dallo specchio alla scala, la lunghezza del filo e quella della porzione compresa fra l'estremo superiore ed il punto di attacco ora cennato, si potevano determinare gli angoli di cui girava la sezione terminale per ciascuno spostamento letto sulla scala.

« Le ricerche col metodo statico vennero condotte come nel caso dell'ottone quando si operava per *cicli bilaterali crescenti*, e tranne i pochi casi che saranno appresso indicati, le forze massime per i successivi cicli furono rispettivamente di gr. 100, 150, 200, 250 e 300. Usavo all'uopo pesi da 50 gr. ciascuno, avendo tutta la cura che nell'applicarli o nel superirli non si producessero scosse, le quali per il forte momento d'inerzia della massa sottostante avrebbero potuto nuocere alla regolarità dell'esperienze ⁽¹⁾. Avrei potuto adoperare pezzi provvisori di arresto, perchè la carica o la scarica seguisse gradatamente; ma anche con questo artificio non si evitavano del tutto le scosse, mentre con un po' di esercizio e dando alla mano punti di appoggio convenienti si riuscì ad impedire che il filo oscillasse attorno le diverse posizioni di equilibrio.

« Alla fine di ogni serie di esperienze col metodo statico si faceva ritornare il corpo in esame alla forma primitiva colle oscillazioni che in esso si generavano, a partire dalla posizione di massimo spostamento, sopprimendo con rapidità i piatti; si ebbero così col ritorno al riposo letture al cannocchiale che differivano per qualche decimo di divisione, eccetto i casi in cui gli spostamenti avuti lungo i cicli per il carico *zero* accusavano il variare delle configurazioni attorno cui il corpo si deformava ⁽²⁾.

« Quando si volevano produrre le oscillazioni nell'esperienze col metodo dinamico, lasciato libero uno dei fili della puleggia, attaccavo all'altro un piatto del peso di 50 gr. cui sovrapponevo cinque dei soliti pezzi: eseguita la soppressione rapida del carico totale, si cominciavano le letture relative alle singole elongazioni, che venivano registrate dalla persona stessa adibita per la scarica.

« Il sistema tenuto per fare oscillare il filo dava l'agio di partire volta per volta dalla stessa deformazione massima, e di non oltrepassare quella cui ci si spingeva nel compiere i cicli. Così mentre nel corso delle ricerche procedeva regolarmente l'accomodazione del corpo ⁽³⁾, si aveano nelle diverse serie stati iniziali paragonabili fra loro.

« L'esperienze relative ai cicli venivano ogni giorno fatte dopo quelle che si eseguivano col metodo dinamico. Questo continuo raffronto avea per

⁽¹⁾ Si constatò infatti nella torsione del nichel un'influenza delle scosse analoga a quella trovata nella flessione dell'ottone (V. Rend. Acc. dei Lincei, vol. III, 1° sem., p. 26).

⁽²⁾ V. Rend. Acc. dei Lincei, vol. II, 2° sem., p. 340.

⁽³⁾ V. Rend. Acc. dei Lincei, vol. II, 2° sem., p. 385.

iscopo di vedere se in realtà fosse lo smorzamento delle oscillazioni dovuto al lavoro consumato per la isteresi elastica.

« Il concetto da cui dobbiamo partire per tale verifica è che l'area di *isteresi* relativa ad un ciclo fra le deformazioni estreme $+\omega_1$ e $-\omega_1$ equivalga alla diminuzione di inerzia potenziale corrispondente al decremento di ampiezza all'intorno dell'elongazione ω_1 .

« L'esperienze sui cicli ci permettono di trovare direttamente la prima quantità, avendosi per il lavoro L che corrisponde all'area del cappio:

$$L = \int M d\omega,$$

dove M denota il momento della forza relativo all'angolo ω .

« La diminuzione di energia potenziale per il decremento di ampiezza $\Delta\omega_1$ si potrà ottenere quando si supponga che l'energia stessa varii proporzionalmente all'angolo ω . La ipotesi non è rigorosa stante la imperfetta elasticità delle sostanze di cui disponiamo, ma se non si va a deformazioni esagerate si può ritenere che essa valga approssimativamente; per cui indicando con M_1 il momento che corrisponde alla forza massima impiegata nel ciclo e con $\Delta\omega_1$ la diminuzione di ampiezza all'intorno dell'angolo relativo ad M_1 , avremo per il lavoro interno L' :

$$L' = M_1 \Delta\omega_1.$$

« Si tratta ora di trovare i valori assoluti di L ed L' . Per questo chiamato

ρ il raggio della puleggia,

g l'accelerazione dovuta alla gravità,

γ il rapporto fra la lunghezza del filo e la distanza dallo specchio al punto di attacco superiore,

α l'angolo di torsione, all'altezza dello specchio, in misura assoluta,

P il peso torcente espresso in grammi, si avrà:

$$L = \rho \gamma g \int P d\alpha \quad \text{ed} \quad L' = \rho \gamma g P_1 \Delta\alpha_1.$$

« Per quanto si è detto dev'essere adunque sensibilmente:

$$\int P d\alpha = P_1 \Delta\alpha_1,$$

e poichè la formula di Simpson ci permette di avere i valori del primo membro, sarà agevole fare il confronto cui miriamo.

« A dir vero il valore di $\Delta\alpha_1$ nella relazione precedente dovrebbe essere corretto per l'influenza che esercita sullo smorzamento delle oscillazioni l'attrito dell'aria; tuttavia siccome ho potuto riconoscere che si tratta di un'azione secondaria, ho creduto che non valesse la pena di occuparsi di questo termine di correzione, quando per varie circostanze d'indole teorica e sperimentale non è permessa una verifica rigorosa. Si procurò peraltro che da parte della ruota e dei raggi non avessero a prodursi moti dell'aria capaci di agire sul sistema indipendentemente dall'attrito, racchiudendo la ruota stessa fra due dischi di carta incollati sulle due facce.

« Noterò prima di venire ai risultati sperimentali che il metallo in esame, tanto nel caso dei cicli che nel caso delle oscillazioni, si discosta nel suo modo di comportarsi dalla legge di Hooke, specialmente nello stato ricotto; e se col diminuire di ampiezza dei cicli esso accenna a rientrare nei limiti di perfetta elasticità, realmente ne resta sempre discosto sin dove i nostri mezzi di misura ci han permesso di apprezzarlo. Questo fatto ha confermato in me il convincimento che a rendersi conto della natura dei corpi sottoposti a forze deformatrici fosse necessario di provocare spostamenti delle particelle piuttosto grandi, e di tenere in considerazione speciale i corpi molto plastici, i quali mostrano in modo evidente proprietà dei solidi che pur esistendo nei corpi ritenuti perfettamente elastici, per i piccoli effetti con cui si manifestano, possono restare occulte. Da ciò la preferenza da dare ai metalli ricotti, che per le ricerche fatte sinora ho riconosciuto più regolari nelle loro deformazioni, ad onta delle apparenti anomalie che ne hanno sconsigliato l'uso in molte ricerche d'indole teorica; e questa preferenza è anche giustificata dalla circostanza che il ricuocimento tende a ridare al metallo quella isotropia che i processi del laminatoio e della filiera gli hanno tolto.

« Nel caso mio poi riusciva indispensabile l'uso del metallo ricotto, poichè il genere di sospensione adottato, a causa delle saldature agli estremi, doveva alterare in modo non uniforme la struttura del filo crudo, laddove nel metallo ricotto non poteva produrre alterazioni notevoli.

« I risultati dell'esperienze definitive fatte col filo N^o *ricotto* trovansi riportati nella tabella seguente. La prima colonna contiene i giorni di esperienze, la seconda i valori medi delle temperature lette su un termometro collocato in vicinanza del filo, e la terza il numero degli anelli formanti parte del peso tensore. L'indicazione che trovasi in testa delle cinque colonne seguenti denota il carico massimo torcente per ciascuno dei cinque cicli bilaterali che si compivano giornalmente col metodo statico, ed in corrispondenza sono per ogni giorno segnati i valori di α_1 (media degli spostamenti massimi a destra ed a sinistra avuti col ciclo ed espressi in divisioni della scala), di A (lavoro consumato per l'area d'isteresi, diviso per la costante $e\gamma g$) ⁽¹⁾, e di A' (decremento di energia per la diminuzione di ampiezza, diviso anch'esso per quel prodotto).

« I valori di A' si ottennero tracciando la curva che dava la diminuzione di ampiezza in funzione delle medie di due ampiezze successive dalla stessa parte, e misurando poi le ordinate che corrispondevano alle ascisse α_1 . Quelli per $P_1 = 300$ si ebbero per estrapolazione, però, siccome l'andamento degli ultimi rami delle curve tracciate è sensibilmente rettilineo ed i punti estremi segnati hanno ascisse che differiscono poco dalle α_1 relative a $P_1 = 300$, si è autorizzati a tenerne conto assieme agli altri avuti per oscillazioni di più piccola ampiezza.

(1) Noterò che per le misure fatte di e e di γ si ebbe $e\gamma g = 26560$.

Giorni di esp.	Temper.	Numero di anelli	P ₁	100	150	-200	250	300
12 Giugno	23,9 ^o	2	<i>a</i> ₁	33,5	50,3	68,0	86,0	106,1
			<i>A</i>	0,0016	0,0060	0,0157	0,0381	0,0905
			<i>A'</i>	0,0014	0,0038	0,0098	0,0310	0,0782
13 "	23,2	"	<i>a</i> ₁	33,6	50,8	68,0	85,6	105,7
			<i>A</i>	0,0024	0,0060	0,0127	0,0302	0,0784
			<i>A'</i>	0,0014	0,0039	0,0101	0,0285	0,0714
14 "	23,7	"	<i>a</i> ₁	33,7	50,9	68,1	85,7	105,5
			<i>A</i>	0,0018	0,0054	0,0126	0,0290	0,0733
			<i>A'</i>	0,0016	0,0042	0,0096	0,0269	0,0733
15 "	23,7	"	<i>a</i> ₁	33,8	51,2	68,3	86,2	105,1
			<i>A</i>	0,0024	0,0065	0,0132	0,0298	0,0693
			<i>A'</i>	0,0016	0,0043	0,0098	0,0265	0,0694
16 "	23,7	1	<i>a</i> ₁	34,4	51,1	68,4	85,4	104,4
			<i>A</i>	0,0030	0,0067	0,0148	0,0300	0,0679
			<i>A'</i>	0,0022	0,0049	0,0104	0,0257	0,0665
18 "	23,3	"	<i>a</i> ₁	34,4	51,1	68,0	85,8	104,3
			<i>A</i>	0,0030	0,0073	0,0129	0,0296	0,0679
			<i>A'</i>	0,0021	0,0049	0,0101	0,0246	0,0640
19 "	23,4	"	<i>a</i> ₁	34,2	51,4	68,4	86,1	104,1
			<i>A</i>	0,0030	0,0070	0,0133	0,0286	0,0651
			<i>A'</i>	0,0020	0,0050	0,0106	0,0248	0,0650
20 "	23,5	2	<i>a</i> ₁	34,2	51,3	68,2	86,2	105,1
			<i>A</i>	0,0024	0,0060	0,0122	0,0274	0,0650
			<i>A'</i>	0,0016	0,0043	0,0096	0,0230	0,0611
21 "	23,6	"	<i>a</i> ₁	34,2	51,3	68,9	87,4	107,9
			<i>A</i>	0,0026	0,0078	0,0171	0,0391	0,0974
			<i>A'</i>	0,0024	0,0063	0,0147	0,0407	0,1075
22 "	23,8	"	<i>a</i> ₁	35,0	51,4	68,9	86,5	106,6
			<i>A</i>	0,0027	0,0074	0,0165	0,0348	0,0841
			<i>A'</i>	0,0022	0,0057	0,0132	0,0330	0,0933
23 "	24,0	"	<i>a</i> ₁	34,1	51,4	69,0	87,5	107,7
			<i>A</i>	0,0027	0,0082	0,0189	0,0417	0,0998
			<i>A'</i>	0,0024	0,0068	0,0153	0,0383	0,1041
25 "	24,8	"	<i>a</i> ₁	34,7	52,5	70,8	90,5	117,2
			<i>A</i>	0,0032	0,0109	0,0234	0,0541	—
			<i>A'</i>	0,0029	0,0084	0,0209	0,0586	—

« Rileverò anzitutto che in generale i valori di \mathcal{A} sono superiori a quelli di \mathcal{A}' , mentre a causa dell'attrito dell'aria dovrebbe aversi il contrario; tuttavia l'accordo è sensibile, il che prova come lo smorzamento delle oscillazioni dipenda in gran parte dai fenomeni d'isteresi elastica. A maggior conferma del nostro asserto noteremo che tutte le cause le quali determinano una variazione dell'area dei cappi, modificano nel medesimo senso e quasi nella stessa misura il decremento di energia potenziale che si considera nel fenomeno dinamico.

« Ed invero un'accomodazione si riscontra per le aree d'isteresi col procedere dell'esperienze di giorno in giorno, nel senso di aversi per una data forza estrema P_1 valori sempre più piccoli di \mathcal{A} , specialmente per i cicli di grande estensione, e vanno decrescendo del pari le \mathcal{A}' delle singole colonne, ed in modo tanto più accentuato quanto più ci avviciniamo all'ultima di queste. Inoltre la soppressione di un anello porta aumento nelle aree *solo* per i cicli di piccola ampiezza (forse perchè sugli altri l'effetto è mascherato dall'accomodazione non ancora ultimata); ed alterazioni concomitanti si palesano nei valori di \mathcal{A}' per i risultati delle prime colonne, mentre rimettendo l'anello soppresso si ha un ritorno alle condizioni primitive e col metodo statico e col dinamico ⁽¹⁾.

« Nè mi sono arrestato a queste prove. Ho voluto anche vedere l'influenza che esercita sui cicli di determinata ampiezza il lavoro precedente fra limiti più estesi di deformazione. Per questo, dopo aver fatto compiere al filo il 21 giugno un ciclo fra $+400$ e -400 ed averne prodotta la scarica alternata, si ripresero le serie ordinarie di esperienze, che fornirono i valori segnati al di sotto della prima linea punteggiata. Anche qui troviamo andamento conforme dei risultati ottenuti coi due metodi, ed accennanti ad un aumento di plasticità, il quale però tende a sparire per effetto di una nuova accomodazione.

« Questa venne arrestata il 23 giugno con quattro serie di oscillazioni fatte compiere al corpo a partire per ciascuna serie dal carico di 400 gr., e poichè si ebbe un maggior lavoro con grandi deformazioni, si manifestò nelle successive esperienze coi due metodi una più accentuata dissipazione di energia, come attestano i risultati al di sotto della seconda linea punteggiata.

« Finalmente il 25 giugno si provocò con un carico di 500 gr. una deformazione grandissima, che fu arrestata solo per l'urto del piatto sul tavolo di marmo su cui poggiano i sostegni della carrucola; ed in seguito tornando alle solite esperienze si pervenne ai valori di \mathcal{A} e \mathcal{A}' delle ultime righe, i quali indicano un nuovo e più forte aumento del lavoro consumato dal corpo nel deformarsi ⁽²⁾.

(1) Questi ultimi fatti proverebbero che la plasticità del nichel, quale si rivela colla torsione, diminuisce col crescere del peso tensore.

(2) Mancano per questa serie i valori \mathcal{A}' e \mathcal{A} dell'ultima colonna, poichè, stante la grande diminuzione di ampiezza che si ebbe in quel giorno alla prima oscillazione e te-

« Questi i risultati dell'esperienze che costituiscono un primo passo nello studio delle proprietà elastiche dei metalli basato sull'uso contemporaneo dei due metodi di analisi. Vero si è che il materiale impiegato per tali ricerche preliminari è assai scarso, ma l'accordo fra i valori di A e A' in tutte le fasi del processo è assai sensibile perchè lo si possa attribuire a causa for-
tuite, anzi siamo indotti a ritenere che l'attuale studio riveli un fatto d'indole generale, non essendovi ragione di credere che lo smorzamento delle oscillazioni venga nel nichel provocato da una causa diversa da quella che varrebbe per altri metalli.

« Si noti ancora che la elasticità susseguente, alla quale si è voluto da molti attribuire l'attrito interno dei solidi, è nel nichel, dentro i limiti delle nostre ricerche, di così piccola entità, da escludere per essa ogni influenza che non sia di carattere secondario, essendosi avuti spostamenti residui solo a partire da $P=250$, ed in nessun caso superiori ad una divisione della scala, cioè a circa $\frac{1}{20}$ di quella prodotta da un peso torcente di 50 gr.

« Se il nostro studio esteso ad altri metalli avrà uguale successo, verrà altresì a cadere quella interpretazione per cui lo smorzamento delle oscillazioni si attribuisce ad una resistenza proporzionale alla velocità delle particelle, in quanto l'esame delle proprietà elastiche rivela, come sembra, fatti sufficienti ad accertare la natura del fenomeno senza avere ricorso ad una proprietà dei solidi puramente ipotetica ».

Fisica. — *Sulla dilatazione termica dei bronzi di Alluminio* ⁽¹⁾.

Nota del dott. A. FONTANA, presentata dal Socio BLASERNA.

« 1. Il rame e l'alluminio si legano tra loro in qualunque proporzione, e costituiscono due classi di leghe, le pesanti, nelle quali predomina il primo, e le leggiere nelle quali predomina il secondo metallo. Tali leghe sono conosciute col nome di bronzi di alluminio, ed io mi sono proposto di studiare il coefficiente di dilatazione delle leghe pesanti; per ciò ho fusi insieme in crogiuoli di grafite questi due metalli in tali proporzioni da ottenere all'incirca i bronzi seguenti:

	Rame	Alluminio
A	99	1
B	95	5
C	90	10
D	85	15
E	80	20

nono conto del fatto che il ciclo compiuto col metodo statico da $P_1=300$ a $P=-300$ si presentava aperto, viene meno quasi del tutto la base della nostra verifica per questo caso.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Roma.

« Mi sono poi voluto assicurare mediante un'analisi elettrolitica, eseguita su alcuni saggi di esse, che rispondevano assai prossimamente al titolo suddetto.

« La lega A è di color rosso di rame; ha struttura fibrosa; peso specifico 8,771 a 25°6; è duttile e malleabile ed assai resistentente al ferro quando si tornisce.

La seconda lega B è di colore giallo d'oro, ha struttura granulare; è ancora duttile e malleabile; si lavora agevolmente ed ha il peso specifico 8,294.

La lega C è assai più dura delle altre; ha pure essa colore d'oro; è duttile a caldo; ha tessitura analoga alla precedente ed il suo peso specifico è 7,819.

« La lega D che ha peso specifico 7,509 è di colore giallo tendente a quello dell'ottone; ha struttura finamente granulare e come l'ottone si lavora benissimo al tornio. Tutte queste leghe si portano a pulimento e non si ossidano in modo sensibile all'aria se non quando sono portate ripetutamente ad alte temperature.

« In fine la lega E ha l'aspetto dell'antimonio con dei riflessi rossastri. Ha frattura concoide e si rompe sotto leggieri colpi di martello. Il suo peso specifico è 7,252, e la sua durezza è tale da resistere alla sega ed al bulino. Per questa ragione ho dovuto escluderla dalle misure di dilatazione.

« 2. Per istudiare la dilatazione termica di queste leghe ho seguito il metodo di Fizeau ⁽¹⁾ colle modificazioni arrecalevi da Abbe, usando del Dilatometro di Abbe-Fizeau costruito dalla casa Zeiss di Jena. E poichè questo ingegnoso metodo è ancora poco noto, ne riferirò il principio succintamente, rimandando chi volesse aver maggiori dettagli alla Memoria del dott. Pulfrich *Ueber das Abbe-Fizeau'sche Dilatometer* pubblicata nella « *Zeitschrift für Instrumentenkunde*, 1893, p. 401 e seg. ». Le modificazioni di Abbe al metodo di Fizeau consistono nell'aver introdotto l'uso di luci di diversi colori e delle misure micrometriche che semplificano assai il processo di osservazione. Con tali varianti riesce praticamente possibile di determinare i mutamenti avvenuti nella sostanza sperimentata, colla sola osservazione dello stato iniziale e dello stato finale del sistema delle frangie di interferenza, e di dedurre mediante il calcolo il numero intiero delle striscie passate nel campo per una certa variazione di temperature dell'oggetto.

« L'istrumento uscito dalla officina di Zeiss contiene il solito tavolinetto di Fizeau in acciaio, col suo vetro a superficie piane (ma leggermente inclinate), marcato nel centro della faccia inferiore con un dischetto esilissimo di argento; ha poi un apparecchio di osservazione costituito da un cannocchiale con micrometro che riceve anche lateralmente la luce proveniente da un tubo di Geissler, luce destinata ad illuminare il tavolinetto; inoltre ha un canoc-

(1) Ann. de Ch. et de Physique; IV série, t. II, 1864, p. 143; e id., IV série, t. VIII, 1866 p. 335.

chiale ausiliario che serve a predisporre le esperienze, ed una stufa col termostato di Arsonvall ⁽¹⁾, per portarlo e mantenerlo a diverse temperature.

« Il tubo di Geissler che contiene idrogeno e mercurio metallico è foggato ad H, e per avere una illuminazione assai intensa si usa la luce prodotta nel tratto trasversale. Da questo tubo sono prodotte luci di colore rosso, giallo, verde e violetto, corrispondenti alle seguenti lunghezze d'onda:

H _α (C)	mm. 0,0006562	
H _γ (giallo)	$\left\{ \begin{array}{l} 0,0005788 \\ 0,0005768 \end{array} \right\}$	0,0005778
H _β (verde)	0,0005460	
H _β (F)	0,0004862	

le quali producono i diversi sistemi di frangie di interferenza nello strato di aria compreso tra l'oggetto ed il vetro posti sul tavolinetto di Fizeau.

« Una volta che l'apparecchio sia aggiustato convenientemente, si vede il campo del cannocchiale occupato da tante righe nere verticali, alternate con righe colorate e in mezzo ad esse spicca l'immagine del dischetto di argento

« Indicheremo con 1, 2, 3, 4, 5 e 1, 2, 3, il numero d'ordine delle righe prossime al dischetto O, e con $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6$ oppure $l_1 l_2 l_3 l_4$ le posizioni di esse e del disco indicate dal micrometro.

La larghezza b di una striscia sarà a seconda dei casi:

$$b = \frac{1}{2} (l_3 - l_1)$$

$$b = \frac{1}{6} \{ l_5 + l_4 - (l_2 + l_1) \}$$

e la posizione l_s del punto di mezzo S del sistema sarà:

$$l_s = \frac{1}{3} (l_1 + l_2 + l_3)$$

$$l_s = \frac{2}{10} (l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5).$$

La distanza tra S e il centro pel disco O verrà ad essere:

$$SO = l_0 - l_s$$

Il segno di SO sarà + se la riga più vicina ad O è alla sua sinistra, e - se è alla sua destra. Il quoziente:

$$\delta = \frac{SO}{b}$$

⁽¹⁾ Vedi, Zeitschrift für Instrumentenkunde X p. 28.

che ha per limiti $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ indica di quale frazione di mezza lunghezza d'onda differisce lo spessore dello strato di aria sotto il dischetto di argento da quello che è sotto il mezzo della più prossima riga di interferenza. Questi dati ci forniscono il modo per trovare esattamente lo spessore dello strato d'aria sottoposto al segnale di argento. Se si indica con M l'ordine numerico della riga più vicina al dischetto, lo strato d'aria sotto a questo avrà lo spessore

$$d = (M + \delta) \frac{\lambda}{2}$$

ove λ indica la lunghezza d'onda della luce adoperata. Per trovare M si ricorre all'uso accennato dei due colori. Si osserva la posizione del sistema di frangie alla stessa temperatura ed in due colori, e si avrà:

$$(M_0 + \delta_0) \frac{\lambda_0}{2} = (M + \delta) \frac{\lambda}{2}$$

$$M_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} = M + \delta - \delta_0 \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

e più semplicemente

$$M_0 \mu = M + r$$

« Converremo ora di indicare coll'indice zero tutte le quantità che si riferiscono alle osservazioni fatte sul colore verde, e senza indice quelle che si riferiscono all'altro colore osservato. Per trovare M dovremo costruirci la tabella seguente, in una colonna della quale, intestata con M_0 , segneremo la serie naturale dei numeri 0, 1, 2, 3, 4, in altre due porremo a fianco dei precedenti i numeri $M_0 \mu$ ove il μ si riferisce al rosso ed al violetto. A fianco di queste poi segneremo l'approssimativo valore in millimetri dello spessore dello strato d'aria.

Tabella per $M_0 \mu = M + \delta - \delta_0 \mu = M + r$.

Spessore dello strato d'aria mm.	Hg (verde)	C $\mu = 0,83206$	F $\mu = 1,12300$
	M_0	$M_0 \mu$	$M_0 \mu$
0	0	0	0
	1	0,83	1,12
	2	1,66	2,25

« Dalle letture fatte nelle esperienze si deducono i valori δ , e con questi si formano le r relative al rosso ed al violetto. Poi si va nella tabella in prossimità del numero della prima colonna che indica lo spessore approssimativo dello strato di aria misurata preventivamente collo sferometro, e si

cercano nelle colonne C ed F tutti i numeri che hanno gli stessi decimali delle r calcolate. Quella M_0 che è a capo della linea nella quale vengono a coincidere quei valori di r , è quella che soddisfa il problema.

« Se dalle misure risulta r negativa, coll'aggiunta di unità si rende positiva senza che questa trasformazione alteri i calcoli.

« Se indichiamo con L lo spessore dell'oggetto di cui cerchiamo il coefficiente di dilatazione α , e con E e β la lunghezza e il coefficiente di dilatazione delle viti del tavolinetto, e si conosce il numero f_0 delle righe verdi passate nel riscaldamento da t_0 a t_2 , sappiamo che

$$\alpha = \frac{E}{L} \beta - \frac{f_0 \frac{\lambda_0}{2}}{L(t_2 - t_1)}$$

« Con M avevamo già inteso il numero ordinativo della riga più prossima al disco, alla temperatura iniziale t_1 ; ora con $M + m$ (ove m è intero e diverso da zero) indicheremo il numero ordinativo di quell'altra riga che è più prossima al dischetto alla temperatura finale t_2 . Il numero delle righe passate sarà quindi:

$$f = M + m + \delta_{t_2} - (M + \delta_{t_1})$$

$$f = m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1}$$

Osservando al solito con due colori si potrà dire che la variazione Δd dello strato d'aria è

$$\Delta d = (m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1}) \frac{\lambda}{2} = (m_0 + \delta_{0t_2} - \delta_{0t_1}) \frac{\lambda_0}{2}$$

$$m_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} = m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1} - (\delta_{0t_2} - \delta_{0t_1}) \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

e più brevemente

$$m_0 \mu = m + q.$$

« Per trovare m_0 bisogna costruire un'altra tabella nella cui prima colonna intitolata m_0 (relativa al verde) si pongano i numeri della serie naturale — 5 — 4 — 3 — 2 — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 —

« Nelle successive colonne si porranno separatamente i numeri $m + q$ che hanno lo stesso valore di $m_0 \mu$ relativi alle linee C ed F.

Tabella per $m_0 \mu = m + \delta_{t_2} - \delta_{t_1} - (\delta_{0t_2} - \delta_{0t_1}) \mu$.

Hg (verde)	C		F	
	m	q	m	q
— 26	— 22	0,37	— 30	0,80
— 25	— 21	0,20	— 29	0,92
— 24	— 20	0,03	— 27	0,04
— 23	— 20	0,86	— 26	0,17

« Il calcolo si limita alla ricerca di quella m_0 che è a capo della linea ove coincidono le ϱ ricavate dai dati della esperienza.

« Anche in questo caso se ϱ risultasse negativa, la si rende positiva e minore d'uno coll'aggiunta della unità positiva. Con questo m si calcola il numero f delle righe passate durante la variazione della temperatura.

« Onde ottenere di fermare l'attenzione su quella coincidenza che risolve realmente il problema, occorre avere un grossolano concetto della grandezza della dilatazione che si cerca.

3. Io ho adoperata, per ottenere la riflessione della luce, una lastrina ausiliaria di quarzo tagliata perpendicolarmente all'asse ottico. I diversi pezzi di lega di rame ed alluminio li ho tagliati in forma di cilindro, del diametro di 2 cm. e dell'altezza di quasi un centimetro; la faccia inferiore l'ho resa levigata, e nella superiore ho intagliato un rialzo circolare, sottilissimo, il quale serviva di appoggio alla lastrina di quarzo.

« Posso assicurare che le diverse misure di spessori le ho ottenute colla precisione di mm. 0,002.

« L'aggiunta della lastrina di quarzo modifica così la formola:

$$\alpha = \frac{E}{L} \beta - \frac{f_0 \lambda_0}{2L(t_2 - t_1)} - \frac{e}{L} \gamma$$

ove e e γ sono lo spessore del quarzo e il suo coefficiente di dilatazione. I valori di β e di γ da me adottati sono quelli stessi assegnati da Pulfrich all'acciaio di cui sono fatte le viti, ed al quarzo perpendicolarmente all'asse.

$$\beta = 0,0000107$$

$$\gamma = 0,0000138.$$

4. Per determinare la temperatura delle esperienze ho fatto uso di due termometri di Alvergnyat a scala intera, calibrati e divisi in quinti di grado. L'uno era messo nel recipiente esterno del regolatore delle temperature che era pieno d'acqua; e l'altro nel recipiente interno che invece ho empito di linatura metallica. In questa era immersa la camera contenente il tavolinetto di Fizeau. Con una esperienza preliminare mi sono assicurato che il tavolinetto, dopo circa 6 ore di riscaldamento, ha raggiunto la temperatura indicata dal termometro esterno.

« Ho poi sempre avuto cura di conservare l'apparecchio dopo il riscaldamento per due o tre ore allo stato stazionario, avanti di procedere alle misure. Un altro buon criterio per riconoscere la stabilità della temperatura, è di fare alla fine di ogni serie di osservazioni, una misura di controllo delle righe che furono osservate per prime.

« Ed ora esporrò i risultati delle ricerche fatte sulla dilatazione dei bronzi di alluminio.

Coefficiente di dilatazione della lega A.

I. misura		L = mm. 10,041 d = mm. 0,1403 e = mm. 2,058	
Riscaldamento		Raffreddamento	
$t_1 = 23^{\circ},0$	$t_2 = 91^{\circ},0$	Temperatura	$t_1 = 24^{\circ},6$ $t_2 = 91^{\circ},0$
$h_1 = 760$	$h_2 = 762$	Pressione	$h_1 = 761$ $h_2 = 762$
$\delta_{t_1} = 0,162$	$\delta_{t_2} = 0,686$	(C)	$\delta_{t_1} = 0,687$ $\delta_{t_2} = 0,686$
$\delta_{0t_1} = 0,697$	$\delta_{0t_2} = 0,403$	(Hg verde)	$\delta_{0t_1} = 0,267$ $\delta_{0t_2} = 0,403$
$\delta_{t_1} = 0,081$	$\delta_{t_2} = 0,556$	(F)	$\delta_{t_1} = 0,817$ $\delta_{t_2} = 0,556$
$\varrho = 0,769$		(C)	$\varrho = -0,114$ $\varrho + 1 = 0,886$
$\varrho = 0,805$		(F)	$\varrho = -0,414$ $\varrho + 1 = 0,586$
$m_0 = -10$	$m_c = -9$ $m_r = -12$		$m_0 = -11$ $m_c = -10$ $m_r = -13$
$f_0 = -10,267$			$f_0 = -11,489$
$\alpha = 0,0001447$			$\alpha = 0,00001491$
II. misura		Riscaldamento	
		Raffreddamento	
$t_1 = 24^{\circ},6$	$t_2 = 90^{\circ},6$	Temperatura	$t_1 = 25^{\circ},8$ $t_2 = 90^{\circ},6$
$h_1 = 761$	$h_2 = 761$	Pressione	$h_1 = 762$ $h_2 = 761$
$\delta_{t_1} = 0,687$	$\delta_{t_2} = 0,446$	(C)	$\delta_{t_1} = 0,687$ $\delta_{t_2} = 0,446$
$\delta_{0t_1} = 0,267$	$\delta_{0t_2} = 0,211$	(Hg verde)	$\delta_{0t_1} = 0,267$ $\delta_{0t_2} = 0,211$
$\delta_{t_1} = 0,817$	$\delta_{t_2} = 0,333$	(F)	$\delta_{t_1} = 0,817$ $\delta_{t_2} = 0,333$
$\varrho = -0,195$	$\varrho + 1 = 0,804$	(C)	$\varrho = -0,167$ $\varrho + 1 = 0,833$
$\varrho = -0,422$	$\varrho + 1 = 0,578$	(F)	$\varrho = -0,374$ $\varrho - 1 = 0,626$
$m_0 = -11$	$m_c = -10$ $m_r = -13$		$m_0 = -11$ $m_c = -10$ $m_r = -13$
$f_0 = -11,790$			$f_0 = -11,802$
$\alpha = 0,00001505$			$\alpha = 0,00001501$

Coefficiente di dilatazione della lega B.

I. misura		L = mm. 10,160 d = mm. 0,0656 e = mm. 2,058	
Riscaldamento		Raffreddamento	
$t_1 = 20^{\circ},6$	$t_2 = 93^{\circ},9$	Temperatura	$t_1 = 22^{\circ},2$ $t_2 = 93^{\circ},9$
$h_1 = 762$	$h_2 = 763$	Pressione	$h_1 = 761$ $h_2 = 763$
$\delta_{t_1} = 0,022$	$\delta_{t_2} = 0,367$	(C)	$\delta_{t_1} = 0,311$ $\delta_{t_2} = 0,367$
$\delta_{0t_1} = 0,539$	$\delta_{0t_2} = 0,318$	(Hg verde)	$\delta_{0t_1} = 0,848$ $\delta_{0t_2} = 0,318$
$\delta_{t_1} = 0,265$	$\delta_{t_2} = 0,861$	(F)	$\delta_{t_1} = 0,648$ $\delta_{t_2} = 0,861$
$\varrho = 0,527$		(C)	$\varrho = 0,497$
$\varrho = 0,841$		(F)	$\varrho = 0,808$
$m_0 = -9$	$m_c = -8$ $m_r = -11$		$m_0 = -9$ $m_c = -8$ $m_r = -11$
$f_0 = -9,228$			$f_0 = -0,560$
$\alpha = 0,00001382$			$\alpha = 0,00001390$
II. misura		Riscaldamento	
		Raffreddamento	
$t_1 = 22^{\circ},2$	$t_2 = 91^{\circ},3$	Temperatura	$t_1 = 25^{\circ},1$ $t_2 = 91^{\circ},3$
$h_1 = 761$	$h_2 = 760$	Pressione	$h_1 = 760$ $h_2 = 760$
$\delta_{t_1} = 0,311$	$\delta_{t_2} = 0,767$	(C)	$\delta_{t_1} = 0,912$ $\delta_{t_2} = 0,676$
$\delta_{0t_1} = 0,848$	$\delta_{0t_2} = 0,502$	(Hg verde)	$\delta_{0t_1} = 0,607$ $\delta_{0t_2} = 0,502$
$\delta_{t_1} = 0,648$	$\delta_{t_2} = -0,016$	(F)	$\delta_{t_1} = 0,446$ $\delta_{t_2} = -0,016$
$\varrho = 0,653$		(C)	$\varrho = -0,149$ $\varrho + 1 = 0,851$
$\varrho = -0,276$	$\varrho + 1 = 0,724$	(F)	$\varrho = -0,344$ $\varrho + 1 = 0,656$
$m_0 = -10$	$m_c = -9$ $m_r = -12$		$m_0 = -11$ $m_c = -10$ $m_r = -13$
$f_0 = -10,657$			$f_0 = -11,788$
$\alpha = 0,00001436$			$\alpha = 0,00001480$

Coefficiente di dilatazione della lega C.

I. misura		L = mm. 8,259 d = mm. 0,2621 e = mm. 2,058	
Riscaldamento		Raffreddamento	
$t_1 = 20^{\circ},0$	$t_2 = 90^{\circ},8$	Temperatura $t_1 = 22^{\circ},1$	$t_2 = 90^{\circ},8$
$h_1 = 763$	$h_2 = 763$	Pressione $h_1 = 761$	$h_2 = 763$
$\delta_{t_1} = 0,608$	$\delta_{t_2} = 0,988$	(C) $\delta_{t_1} = 0,288$	$\delta_{t_2} = 0,988$
$\delta_{ot_1} = 0,693$	$\delta_{ot_2} = 0,196$	(Hg. verde) $\delta_{ot_1} = 0,389$	$\delta_{ot_2} = 0,196$
$\delta_{t_1} = 0,908$	$\delta_{t_2} = 0,038$	(F) $\delta_{t_1} = 0,609$	$\delta_{t_2} = 0,038$
$q = 0,793$		(C) $q = 0,860$	
$q = -0,312$	$q + 1 = 0,688$	(F) $q = -0,355$	$q + 1 = 0,645$
$m_0 = -11$	$m_c = -10$ $m_F = -13$	$m_0 = -11$	$m_c = -10$ $m_F = -13$
$f_0 = -11,533$		$f_0 = -11,511$	
$\alpha = 0,00001555$		$\alpha = 0,00001580$	

II. misura		Riscaldamento		Raffreddamento	
$t_1 = 19^{\circ},4$	$t_2 = 86^{\circ},0$	Temperatura $t_1 = 22^{\circ},1$	$t_2 = 86^{\circ},0$		
$h_1 = 759$	$h_2 = 760$	Pressione $h_1 = 762$	$h_2 = 760$		
$\delta_{t_1} = 0,666$	$\delta_{t_2} = 0,735$	(C) $\delta_{t_1} = 0,310$	$\delta_{t_2} = 0,735$		
$\delta_{ot_1} = 0,784$	$\delta_{ot_2} = 0,135$	(Hg verde) $\delta_{ot_1} = 0,408$	$\delta_{ot_2} = 0,135$		
$\delta_{t_1} = 0,124$	$\delta_{t_2} = 0,082$	(F) $\delta_{t_1} = 0,635$	$\delta_{t_2} = 0,082$		
$q = 0,609$		(C) $q = 0,752$			
$q = 0,687$		(F) $q = -0,247$	$q + 1 = 0,753$		
$m_0 = -10$	$m_c = -9$ $m_F = -12$	$m_0 = -10$	$m_c = -9$ $m_F = -12$		
$f_0 = 10,732$		$f_0 = -10,612$			
$\alpha = 0,00001553$		$\alpha = 0,00001576$			

Coefficiente di dilatazione della lega. D.

I. misura		L = mm. 10,615 d = mm. 0,2052 e = mm. 2,058	
Riscaldamento		Raffreddamento	
$t_1 = 26^{\circ},0$	$t_2 = 91^{\circ},2$	Temperatura $t_1 = 27^{\circ},5$	$t_2 = 91^{\circ},2$
$h_1 = 758$	$h_2 = 760$	Pressione $h_1 = 761$	$h_2 = 760$
$\delta_{t_1} = 0,587$	$\delta_{t_2} = 0,308$	(C) $\delta_{t_1} = 0,958$	$\delta_{t_2} = 0,308$
$\delta_{ot_1} = 0,845$	$\delta_{ot_2} = 0,732$	(Hg verde) $\delta_{ot_1} = 0,032$	$\delta_{ot_2} = 0,732$
$\delta_{t_1} = 0,278$	$\delta_{t_2} = 0,824$	(F) $\delta_{t_1} = 0,401$	$\delta_{t_2} = 0,824$
$q = -0,185$	$q + 1 = 0,815$	(C) $q = 0,015$	
$q = 0,672$		(F) $q = -0,434$	$q + 2 = 0,566$
$m_0 = -11$	$m_c = -10$ $m_F = -13$	$m_0 = -12$	$m_c = -10$ $m_F = -14$
$f_0 = -11,522$		$f_0 = -12,741$	
$\alpha = 0,00001612$		$\alpha = 0,00001591$	

II. misura		Riscaldamento		Raffreddamento	
$t_1 = 27^{\circ},5$	$t_2 = 91^{\circ},3$	Temperatura $t_1 = 26^{\circ},6$	$t_2 = 91^{\circ},3$		
$h_1 = 761$	$h_2 = 760$	Pressione $h_1 = 261$	$h_2 = 760$		
$\delta_{t_1} = 0,958$	$\delta_{t_2} = 0,028$	(C) $\delta_{t_1} = 0,887$	$\delta_{t_2} = 0,028$		
$\delta_{ot_1} = 0,032$	$\delta_{ot_2} = 0,317$	(Hg verde) $\delta_{ot_1} = 0,919$	$\delta_{ot_2} = 0,317$		
$\delta_{t_1} = 0,401$	$\delta_{t_2} = 0,358$	(F) $\delta_{t_1} = 0,335$	$\delta_{t_2} = 0,358$		
$q = 0,832$		(C) $q = -0,358$	$q + 1 = 0,642$		
$q = -0,364$	$q + 1 = 0,636$	(F) $q = 0,708$			
$m_0 = -11$	$m_c = -10$ $m_F = -13$	$m_0 = -10$	$m_c = -9$ $m_F = -12$		
$f_0 = -11,466$		$f_0 = -11,027$			
$\alpha = 0,00001618$		$\alpha = 0,00001595$			

« Questi risultati dovrebbero ora essere corretti se si volesse tener conto anche della variazione dell'indice di rifrazione dello strato d'aria in cui avviene la interferenza, sia per la temperatura, sia anche per la pressione.

« Queste correzioni sono contenute nella seguente tabella:

Spessore dello strato d'aria in mm.	CORREZIONI	
	per la temperatura $t_2 - t_1 = 75^\circ \text{C}$	per la pressione $(b_1 - b_2) < 40 \text{ mm. } (\pm)$
$d < 0,1$	$k_t < -0,02$	$k_b < \pm 0,005$
$d = 10$	$k_t = -2,00$	$k_b < \pm 0,50$

« Ma tali correzioni sono per lo più trascurabili di fronte alle incertezze che presentano le esperienze.

« Le quantità da misurare, per ordine crescente di importanza, si seguono così:

$$t_1 \ t_2 \ f_0 \ E \ e \ L$$

e noi potremo ritenere che i coefficienti di dilatazione dei bronzi di alluminio studiati siano:

Bronzo con 1 % di alluminio $\alpha = 0,000014_9$

» 5 % » $\alpha = 0,000014_2$

» 10 % » $\alpha = 0,000015_7$

» 15 % » $\alpha = 0,000016_2$

« A fianco di questi valori sarà utile presentare i coefficienti di dilatazione del rame e dell'alluminio puro che sono:

Alluminio $\alpha = 0,000023_1$ (Pulfrich)

Rame $\alpha = 0,000016_8$ (Matthiessen) ».

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 2 settembre 1894.

Chimica. — *Sulle variazioni di volume nei miscugli dei liquidi, in relazione al comportamento crioscopico* ⁽¹⁾. Nota del Socio E. PATERNÒ e del dott. C. MONTEMARTINI.

« Nella Memoria *Sull'impiego della benzina nelle ricerche crioscopiche* ⁽²⁾, uno di noi volendo spiegare il vario comportamento delle sostanze di diversa funzione chimica in tale solvente, conchiudeva con queste parole: « Quello che sembra certo si è che le molecole nei corpi liquidi e solidi non sono sempre fra di loro isolate ed omogeneamente distribuite come nei corpi gassosi, ma sono invece riunite in gruppi più o meno complessi; che questi gruppi si disgregano ordinariamente in molecole semplici per il fatto della soluzione sufficientemente diluita, e che in questo disgregamento che per soluzioni diluite può spingersi anche nella separazione in joni, può avere notevole influenza l'azione del solvente » ⁽³⁾.

« E più oltre: « A me sembra che il confronto fra i risultati forniti dalle varie sostanze rispetto alla legge di Raoult, adoperando ora soluzioni benzoliche, ora soluzioni acetiche, ci conduce a riconoscere che i corpi liquidi e solidi sono tutti formati da aggruppamenti molecolari più o meno complessi, i quali si disgregano per l'atto della soluzione. In secondo luogo

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Istituto chimico di Roma.

⁽²⁾ Gazzetta chimica, t. XIX, p. 640. 1889.

⁽³⁾ L. c., p. 678.

« risulta da questo confronto che nei diversi solventi, questa disgregazione « avviene in modo diverso, e che l'acido acetico agevoli per sua azione speciale questo lavoro, mentre la benzina non abbia essa stessa azione o almeno ne abbia in minor grado » (1).

« Il concetto che in taluni corpi le molecole non sieno del tutto omogeneamente distribuite nella massa, ma si trovino riunite a gruppi più o meno complessi, non era certamente nuovo. E basti rammentare la discussione avvenuta intorno alla complessità delle molecole dell'acqua liquida, e la relazione che si è supposta esistere fra una tale supposizione ed il fenomeno del massimo di densità; dall'altro lato E. Wiedemann (2) da esperienze sul colore delle soluzioni di jodio nella benzina a temperature diverse, avea dedotto come probabile l'esistenza a bassa temperatura di complessi molecolari; Ebert (3) dallo studio dello spettro d'assorbimento dei vapori di jodio avea supposto che in essi sono contenuti complessi molecolari $(I_2)_n$, che per ulteriore riscaldamento si risolvono in aggruppamenti più semplici; Walter (4) dallo studio dei fenomeni di fluorescenza delle soluzioni diluite era venuto alla conseguenza che nelle soluzioni diluite esistono molecole semplici, mentre in quelle concentrate sono contenuti gruppi molecolari complessi, e deduzioni analoghe avea fatto Haller (5) dallo studio del potere rotatorio.

« Ma alla ipotesi della esistenza dei complessi molecolari nei liquidi (ed evidentemente anche nei solidi, e forse in taluni vapori) è stato dato in questi ultimi tempi uno sviluppo considerevole da A. Guye e W. Ramsay, con considerazione ed esperienze di grande importanza, tanto che se non può dirsi trasformata in una teoria armonica in tutte le sue parti, deve riconoscersi che è ormai entrata in uno stato di matura discussione. A. Guye (6), e prima di lui il Jung (7) hanno rinvenuto un criterio per giudicare della complessità delle molecole di un liquido *nel rapporto tra la densità critica osservata e quella calcolata*, supponendo con le leggi di Mariotte e di Gay-Lunac, siano ancora applicabili allo stato liquido. H. Ramsay e J. Shields (8) lo stesso scopo hanno conseguito dallo studio dell'*energia di superficie molecolare*.

« E mentre pochi anni prima il Raoult (9) avea creduto di poter affermare che per la maggior parte delle sostanze organiche in fusione la mole-

(1) L. c., p. 680.

(2) Sitzungsberichte d.

(3) Ibidem, 8 luglio 1889.

(4) Zeitschrift f. phys. Ch. III, 234.

(5) Comptes rendus, 1889, t. CIX, 187 e t. CX, 149.

(6) Comptes rendus, 1890, 1° semestre 141. — Annales de chimie et de physique, t. XXI, p. 206 e 211. — Archives, t. XXI, p. 38 e p. 176. 1894.

(7) Philosophical Magazine, gennaio 1894.

(8) Zeitschrift f. phys. Ch., t. XII, p. 438. 1893.

(9) Progrès de la cryoscopie. Grenoble, 1889.

cola fisica è formata da una sola molecola chimica, dagli studi cennati si è venuto alla conseguenza che fra una cinquantina di corpi organici studiati, gli alcoli metilico, etilico e propilico, il fenol, l'acido acetico, l'acetone, il propionitrile, il nitroetano si mostrano polimerizzati allo stato liquido; le altre sostanze, fra le quali indicherò l'ossido d'etile, alcuni eteri composti, il tetracloruro di carbonio, la benzina e la clorobenzina invece mostrano di essere formate allo stato liquido di molecole semplici. Fra i corpi inorganici, oltre l'acqua, mostrano di essere costituiti da complessi molecolari il bromo, l'acido nitrico, l'acido solforico (1). In quanto poi al grado della complessità delle molecole dei liquidi che sono polimerizzati, mentre Guye aveva in principio creduto trattarsi di molecole doppie, Ramsay e Shields deducono che per i tre alcoli cennati fra 16° e 46°, essa è:

alcool metilico . . .	3,43	volte	CH_4O
" etilico	2,74	volte	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$
" propilico . . .	2,25	volte	$\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$

Per l'acido acetico alla medesima temperatura, compresa fra 16° e 46° è 3,62 volte $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_4$, e per l'acqua (2) è

a 0°	3,81	volte	H_2O
" 50°	3	"	"
" 100°	2,66	"	"
" 140°	2,32	"	"

« È poi degno di nota che per l'acido solforico Aston e Ramsay ammettono il complesso $(\text{H}_2\text{SO}_4)_{32}$.

« Mettendo in relazione questi risultati con le conseguenze che possono trarsi dal comportamento crioscopico, si viene fino ad un certo punto a conseguenze analoghe. L'importanza del problema della determinazione del numero delle molecole semplici, che si aggregano per costituire i complessi da cui sono formati i corpi allo stato liquido e solido, è certamente tale che a noi è sembrato che qualunque criterio possa dare nuovi indizi per la sua soluzione, meritava di essere discusso.

« Ora, come abbiamo già accennato, può ammettersi come molto probabile che il diverso comportamento crioscopico rispetto ai solventi diversi, p. es., acqua, benzina, acido acetico, sia dovuto al diverso disgregamento dei complessi molecolari nei vari solventi. È evidente che due cause, oltre all'azione specifica del solvente, influiscono nel caso di corpi a molecola polimerizzata a determinare il loro disgregamento in molecole semplici, e sono esse la temperatura e la concentrazione della soluzione. Se noi compariamo il comporta-

(1) E. Acten e W. Ramsay. Journal of the Chem. Soc., t. LXV, p. 167.

(2) Ramsay e Joung, Reibletter, 18, 31.

mento dell'alcool nell'acqua, studiato dal Raoult⁽¹⁾ e nella benzina studiato da Beckmann e da uno di noi, troviamo che nell'acqua l'alcool produce, sino alla concentrazione di gr. 100 di acqua per gr. 10,54 di alcool un'abbassamento di temperatura nel punto di congelamento esattamente proporzionale alla concentrazione; con l'aumentare della concentrazione la proporzionalità cessa, ma anche per una soluzione contenente per 100 di acqua sino a 70,15 di alcool non si ha uno scarto enorme; infatti l'abbassamento termometrico essendo di 0°,97 per 2,47 % di alcool, dovrebbe essere 27°,54 per 30°,15 mentre è invece di 32°,10. Nella benzina le cose vanno assai diversamente come risulta dalle esperienze molto concordi di Beckmann e di Paternò. Questo comportamento dell'alcool sull'acqua, come quello dell'acido acetico nella benzina studiato da Hentschel e da Beckmann messo in confronto col comportamento di altri corpi, come la naftalina, la tribenzilammina, la conina che in soluzioni anche molto concentrate danno abbassamenti normali o quasi, lascia giustificatamente supporre che la concentrazione, pure avendo una influenza, la ha in grado molto diverso, secondo la natura delle sostanze; essa è piccola quando si tratta di sostanze che hanno le molecole semplici o i cui complessi molecolari non si disgregano, mentre per tutte le sostanze che in un dato solvente danno notevoli scarti col mutar della concentrazione si può supporre che siano costituite da molecole complesse, che in quel solvente si disgregano tanto più facilmente quanto maggiore è la diluizione.

« Ed è importante il costatare che l'alcool, il fenol e l'acido acetico che, secondo gli studi di Guye e di Ramsay e dei suoi collaboratori, hanno molecole complesse, sono appunto quei corpi che più marcatamente col criterio crioscopico conducono alla stessa conseguenza. In quanto al numero delle molecole semplici che costituiscono gli aggregati delle molecole polimerizzate, il criterio crioscopico porta però a risultati diversi da quelli ottenuti con gli altri metodi.

« Così per l'alcool etilico il fatto che la temperatura di congelamento della sua soluzione benzolica al 20 % conduce ad un peso molecolare per lo meno sei volte quello corrispondente a C_2H_6O , e la considerazione che non è logico supporre che anche in tali condizioni non vi siano molecole di alcool disgregate, lascia credere che questo numero 6 rappresenti una media fra molecole polimerizzate, molecole disgregate e forse anche molecole disgregate parzialmente. Onde il criterio crioscopico conduce a supporre nell'alcool liquido complessi molecolari costituiti da molto più di 6 molecole semplici.

« Ramsay e Shields hanno trovato con i loro calcoli 2,74; ma questo numero è per la temperatura ordinaria, mentre il risultato crioscopico è relativo ad una temperatura di poco al disopra dello 0°. Ciò serve a provare che se dalla tensione superficiale molecolare e dalla densità critica si possono trarre

⁽¹⁾ Annales, t. XXI, p. 217, 1880.

degli indizî per la complessità molecolare dei liquidi, non si può almeno per ora stabilire dai dati ottenuti il grado della complessità delle molecole, ed è necessario, per venire a conseguenze attendibili, esaminare il problema da tutti i suoi lati.

« A noi è sembrato che oltre alle considerazioni che brevemente abbiamo accennato, relative al comportamento crioscopico, molta luce sullo studio della complessità molecolare dei liquidi ed anche dei solidi avrebbe dovuto gettare lo studio dei fenomeni termici e delle variazioni di volume che accompagnano il miscuglio di due liquidi o di un liquido ed un solido.

« Si presenta invero come molto probabile la supposizione che il disgregamento dei complessi molecolari debba essere accompagnato, oltrechè di un assorbimento di calore, da un allontanamento delle molecole semplici che costituivano la molecola polimerizzata.

« E però se alla benzina si aggiunge dell'alcool, che, secondo tutte le probabilità, è uno dei corpi in cui la esistenza di molecole complesse può dirsi più solidamente stabilita, deve aversi una dilatazione e però una diminuzione di peso specifico nel miscuglio.

« Similmente, essendo più che probabile che l'acido acetico abbia delle molecole complesse, e risultando dall'altro lato dalle esperienze di uno di noi ⁽¹⁾ che l'acido acetico nell'acqua ha la molecola semplice, ne viene come conseguenza che l'atto della soluzione dell'acido acetico nell'acqua deve condurre ad un abbassamento di temperatura quando la quantità dell'acido acetico che si scioglie nell'acqua è piccola e tale che l'idrato che tende a formarsi debba per la diluizione rimanere dissociato. E questo modo di vedere ha piena conferma nei fatti, dappoicchè già Bouty e Buiguet ⁽²⁾ avevano trovato che aggiungendo a 50 cc. di acido acetico 15 cc. di acqua si ha un abbassamento di temperatura di 2°,5; mentre continuando ad aggiungere altri 35 cc. di acqua si osserva un innalzamento di temperatura di 0°,5. Più recentemente J. Thomsen ⁽³⁾ che ha studiato attentamente il fenomeno, senza per altro averne data la spiegazione, ha trovato che si ha assorbimento di calore fino a che la quantità di acqua non superi il rapporto di 8 molecole di acido acetico per 100 di acqua; al di là si ha invece svolgimento di calore. È bensì vero che l'acido formico non dà, anche in soluzioni diluite, assorbimento di calore, ma lo studio crioscopico dell'acido formico non è stato fatto con cura. Del resto i fenomeni di cui ci occupiamo sono così complessi che il discernere gli effetti dovuti ad una causa, da quelli dovuti ad un'altra, è problema di estrema difficoltà, la cui soluzione può solo attendersi da uno studio esteso, e da un'analisi minuta di una grande quantità di dati speri-

(1) Gazz. chimica 1889, p. 679.

(2) Annales, t. IV, p. 14. 1865.

(3) Thermochemischen Untersuchungen, t. III, p. .

mentali. Noi abbiamo iniziato un tale studio, ma per il momento dobbiamo limitarci a render conto di talune esperienze preliminari che abbiamo fatto sui mutamenti di volume dei miscugli di benzina con altri liquidi.

« Tra questi, per le ragioni che abbiamo esposte, abbiamo prima di tutto scelto degli alcoli, perchè gli alcoli sono appunto le sostanze in cui può dirsi, con maggiore evidenza provata, l'esistenza dei complessi molecolari; abbiamo pure sperimentato con qualche acido e con l'anelolo.

« Due ordini di difficoltà sperimentali si presentavano per conseguire risultati esatti.

« La prima l'impossibilità di fare le esperienze ad una temperatura ben determinata (p. e.: 0° a 100°); l'altra quella di togliere dai picnometri l'aria aderente alle pareti, per il giustificato timore che facendo il vuoto nelle bocchette ripiene potesse mutare la concentrazione del miscuglio. Per rimuovere quest'ultima difficoltà abbiamo fatto uso di bocchette a vasi comunicanti dei quali uno è costituito da un recipiente di circa cc. 50 e l'altro formato da tubo sottile; l'uno e l'altro terminano con due imbuti chiusi da turacciolo smerigliato.

« Da un lato la bocchetta era messa in comunicazione con la macchina pneumatica, dall'altro per mezzo d'un tubo sottile munito di un rubinetto, col recipiente contenente il liquido da studiare; fatto il vuoto nella bocchetta, si apriva il rubinetto, e così si operava il riempimento senza bisogno di ricorrere ad altro mezzo per espellere l'aria aderente alle pareti.

« Per ciò che concerne la temperatura abbiamo operato a temperatura ordinaria; però onde rendere le determinazioni comparabili abbiamo usato contemporaneamente almeno tre bocchette, contenente ciascuna i due liquidi da esaminarsi, l'altra o le altre il loro miscuglio. Le tre bocchette erano lasciate per una notte in un grande recipiente di acqua, l'indomani portate al punto di affioramento e pesate. Il volume delle bocchette era stato previamente determinato con acqua a temperature diverse, poco lontane, che comprendevano i limiti delle esperienze. Per evitare nelle pesate le correzioni dello spostamento dell'aria, abbiamo sempre usato come tara una bocchetta dello stesso volume delle altre.

« Il peso specifico teorico del miscuglio, esclusa ogni mutazione di volume, fu calcolato con la formola

$$D = \frac{dd_1(p + p_1)}{pd_1 + p, d}$$

nella quale p e p_1 indicano i pesi dei due liquidi che si mescolavano, d e d_1 le loro rispettive densità:

« I risultati ottenuti sono i seguenti :

Alcool metilico — Temperatura = 17°.88.

Alcool metilico per 100 di benzina	Densità calcolata	Densità trovata	Differenza
0,0	—	0,88075	—
10,5501	0,87076	0,87037	0,00039
100	—	0,79431	—

Alcool etilico — Temperatura = 16°.88.

0,0	—	0,88176	—
1.1760	0,88064	0,88019	0,00045
18,6146	0,86437	0,86336	0,00101
100,0	—	0,79535	—

Alcool etilico — Temperatura = 17°.45.

0,0	—	0,88138	—
5,9061	0,87580	0,87484	0,00096
7,2193	0,87457	0,87360	0,00097
100,0	—	0,79553	—

Alcool isopropilico — Temperatura = 18°.86.

0,0	—	0,87988	—
4,3287	0,87629	0,87488	0,00141
100,0	—	0,80391	—

Alcool isobutilico — Temperatura = 17°.88.

0,0	—	0,88075	—
6,8434	0,87503	0,87401	0,00103
100,0	—	0,80399	—

Alcool caproico — Temperatura = 18°.86.

0,0	—	0,87988	—
4,3625	0,87707	0,87626	0,00081
100,0	—	0,81976	—

Alcool benzoico — Temperatura = 18°.16.

0,0	—	0,88033	—
5,0794	0,88663	0,88759	—0,00096
100,0	—	1,02351	—

Alcool diossietilisopropilico — Temperatura = 18°.16.

0,0	—	0,88033	—
7,0807	0,88407	0,88443	0,00036
100,0	—	0,93644	—

Acido acetico — Temperatura = 17°.22.

0,0	—	0,88153	—
3,6332	0,88675	0,88544	0,00131
6,0167	0,89021	0,88793	0,00228
7,5223	0,89241	0,88992	0,00249
100,0	—	1,05208	—

Acido isobutirico — Temperatura = 18°.46

0,0	0,88023	—	—
19,2450	0,89069	0,88922	—0,00147
100,0	0,95069	—	—

Anetolo — Temperatura = 19°.43.

0,0	0,87952	—	—
3,5473	0,88264	0,88332	0,00068
11,5337	0,89108	0,89184	0,00076
26,8132	0,90733	0,90863	0,00130
100,0	0,99865	—	—

« A provare l'attendibilità dei numeri da noi ottenuti ci basti osservare che nel corso delle nostre esperienze, abbiamo dovuto determinare varie volte la densità della benzina e che i numeri ottenuti sono stati i seguenti:

0,88176	alla	temperatura	di	16°,88
0,88153	"	"	"	17°,22
0,88138	"	"	"	17°,45
0,88075	"	"	"	17°,86
0,88075	"	"	"	17°,88
0,88032	"	"	"	18°,16
0,88023	"	"	"	18°,46
0,87988	"	"	"	18°,86
0,87952	"	"	"	19°,43

« Ora sapendo per le determinazioni di Paternò e Pisati ⁽¹⁾ che la densità della benzina è a 19° = 0,883575 ed a 25° = 0,872627 si scorge subito che i dati oggi ottenuti sono degni di tutta fiducia. Ciò è anche confermato dalle due serie di determinazioni fatte con i miscugli di benzina ed alcool etilico.

« Poche conseguenze in vero possono trarsi dalle nostre esperienze. E se conformemente alle nostre previsioni abbiamo ottenuto (probabile indizio d'un disgregamento e però dell'esistenza di complessi molecolari) una piccola dilatazione nel miscuglio della benzina cogli alcoli metilico, etilico, isopropilico, isobutilico e caproico e con l'acido acetico, la generalità della nostra supposizione viene contraddetta dalla contrazione osservata nei miscugli di benzina con gli alcoli benzoico e diossietilisopropilico (etere bietilico della glicerina) e con l'acido isobutirico, sostanze tutte che crioscopicamente nella benzina si comportano quali formate da complessi molecolari.

« La dilatazione invece osservata nel miscuglio della benzina con l'acetolo, non contraddice le nostre idee perchè l'acetolo ha un comportamento crioscopico non del tutto regolare ⁽²⁾.

« È degno di nota che nelle esperienze sopraesposte, nei casi in cui abbiamo studiato miscugli di concentrazione varia, abbiamo osservato che la dilatazione cresce col crescere della quantità di altro liquido aggiunto alla benzina. Evidentemente dovrà pervenirsi ad un massimo che cercheremo di determinare.

« La natura preliminare delle esperienze che abbiamo esposto ed il loro numero relativamente piccolo non ci autorizza ad estenderci in altre considerazioni, ed a noi basta aver richiamato per ora l'attenzione dei Chimici sulla

⁽¹⁾ Gazzetta chimica, t. III, 576.

⁽²⁾ Paternò, Gazzetta chimica, XIX, 664; e Paternò e Nasini, Gazzetta chimica 1888.

possibilità di trarre dalla crioscopia, dalla termochimica e dai mutamenti di volumi che accompagnano le soluzioni, nuovi criteri per stabilire l'esistenza di aggregati molecolari e forse anche di determinare la massima complessità.

« Noi continueremo queste ricerche del resto appena iniziate e non solo ci occuperemo dei mutamenti di volumi che accompagnano il miscuglio dei vari liquidi, ma l'estenderemo al miscuglio di liquidi e solidi, studiando parallelamente i fenomeni termici, che senza dubbio molto varranno a chiarire l'argomento.

« Nelle ricerche sui miscugli dei liquidi, a rendere più facile la parte sperimentale, sostituiremo alla benzina il toluene il quale ha il vantaggio di bollire al disopra di 100° e di non solidificarsi a 0°. Ragioni di analogia ci fanno fondatamente supporre che il toluene, come la benzina, non ha potere disgregante sui complessi molecolari, tranne che in soluzioni molto diluite ».

Matematica. — *Altre osservazioni sulle assintotiche delle rigate appartenenti ad una congruenza lineare.* Nota del prof. GIULIO PITTARELLI, presentata dal Socio CREMONA.

Rigate qualunque.

Congruenza a direttrici coincidenti.

« Continuando alla Nota inserita a pag. 111 del fascicolo precedente, sia ora il fascio di complessi:

$$1) \quad z_{14} - z_{23} + kz_{12} = 0.$$

che si tagliano secondo una congruenza avente l'unica direttrice $z_{12} = 0$.

« In questo caso tra' determinanti $a_i b_j - a_j b_i$ dovranno passare le relazioni

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0, \quad a_1 b_4 - a_4 b_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2.$$

« La prima dà, come innanzi,

$$a_1 u + b_1 = \varphi_1 (au + b), \quad a_2 u + b_2 = \varphi_2 (au + b)$$

ed all'altra si può dare, con questi valori di $a_1 b_1, a_2 b_2$ la forma:

$$2) \quad \frac{ab_3 - a_3 b}{\varphi_1} = \frac{ab_4 - a_4 b}{\varphi_2} = \psi,$$

poniamo.

« Di qui possiamo ricavare, eliminando b_3 e b_4 ,

$$a_3 u + b_3 = \frac{a_3}{a} (au + b) + \varphi_1 \frac{\psi}{a}$$

$$a_4 u + b_4 = \frac{a_4}{a} (au + b) + \varphi_2 \frac{\psi}{a}.$$

« Nulla viene di porre

$$a_3 = a\varphi_3, a_4 = a\varphi_4, \psi = a\varphi;$$

ed allora le eq.ⁱ della superficie si scriveranno così, posto sempre $f = au + b$,

$$3) \quad x_1 = \varphi_1 f, x_2 = \varphi_2 f, x_3 = \varphi_3 f + \varphi_1 \varphi, x_4 = \varphi_4 f + \varphi_2 \varphi.$$

Quì pure è da avvertire che dev'essere

$$\varphi_1 \varphi_4 - \varphi_2 \varphi_3 \geq 0;$$

chè, altrimenti, si potrebbe scrivere,

$$\varphi_3 = \lambda \varphi_1, \varphi_4 = \lambda \varphi_2,$$

e così le 3) darebbero

$$x_1 = \varphi_1 f, x_2 = \varphi_2 f, x_3 = \varphi_1 (\lambda f + \varphi), x_4 = \varphi_2 (\lambda f + \varphi)$$

donde poi l'iperboloide

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0,$$

che escludiamo.

« L'eq.^a di un punto della sup. è

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4) f + (\varphi_1 \xi_3 + \varphi_2 \xi_4) \varphi = 0:$$

essa è dunque quella di un punto sulla retta che unisce i due punti

$$\varphi_1 \xi_3 + \varphi_2 \xi_4 = 0, \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_3 + \varphi_4 \xi_4 = 0.$$

« Il primo punto ha per coordinate $(0, 0, \varphi_1, \varphi_2)$ ed appartiene alla retta $x_1 = x_2 = 0$ direttrice della congruenza. Il secondo punto appartiene ad una curva gobba definita dalle

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$$

« Trasformando in altro modo le eq.ⁱ 2) potremo ottener formole che, se rispetto alle 3) perdono simmetria, guadagnano in semplicità per la scomparsa in esse di una funzione φ .

« Scriviamo la 2) così:

$$\frac{a_3 \varphi_2 - a_4 \varphi_1}{a} = \frac{b_3 \varphi_2 - b_4 \varphi_1}{b} = \varphi_2 \varphi_3, \text{ poniamo.}$$

« Se ne ricava

$$a_3 = \frac{a_4}{\varphi_2} \varphi_1 + a\varphi_3, b_3 = \frac{b_4}{\varphi_2} \varphi_1 + b\varphi_3;$$

e ponendo

$$c = \frac{a_4}{\varphi_2}, d = \frac{b_4}{\varphi_2}, g = cu + d,$$

le eq.ⁱ della superficie si scriveranno così:

$$4) \quad x_1 = \varphi_1 f, x_2 = \varphi_2 f, x_3 = \varphi_3 f + \varphi_1 g, x_4 = \varphi_2 g.$$

« Onde poi l'eq.ⁱ del punto è

$$(\varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_3) f + (\varphi_1 \xi_3 + \varphi_2 \xi_4) g = 0,$$

ch'è un punto della congiungente i due punti

$$5) \quad \varphi_1 \xi_3 + \varphi_2 \xi_4 = 0, \quad \varphi_1 \xi_1 + \varphi_2 \xi_2 + \varphi_3 \xi_3 = 0,$$

l'uno (lo stesso di quello di prima) appartenente alla direttrice rettilinea $x_1 = x_2$, l'altro di coordinate

$$6) \quad x_1 = \varphi_1, \quad x_2 = \varphi_2, \quad x_3 = \varphi_3, \quad x_4 = 0$$

appartenente ad una curva piana definita da queste ultime eq.ⁱ La curva poi taglia la retta $x_1 = x_2 = 0$ nel punto $(0, 0, 1, 0)$, e per quei valori di v per i quali $\varphi_3 = \infty$.

« Dalle eq.ⁱ 5) si vede che la natura della superficie dipende dalle tre funzioni φ o meglio da' loro rapporti. Ricaviamo dalle eq.ⁱ 5)

$$7) \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{\xi_4}{\xi_3}, \quad \frac{\varphi_1}{\varphi_3} = \frac{-\xi_3 \xi_4}{\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3}, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = \frac{\xi_3^2}{\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3};$$

onde si scorge che nel risultato dell'eliminazione comparirà il determinante $\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3$, ch'è proprietà caratteristica non solo delle superficie rigate algebriche di Cayley (¹), ma delle trascendenti purchè contenute in una congruenza della specie considerata.

« Dalle 4) si traggono anche le:

$$8) \quad \varphi_2 x_1 - \varphi_1 x_2 = 0, \quad \varphi_3 x_2 - \varphi_2 x_3 + \varphi_1 x_4 = 0$$

le quali danno la costruzione correlativa della superficie mediante rette comuni ai piani del fascio $\varphi_2 x_1 - \varphi_1 x_2 = 0$ per la direttrice rettilinea ed ai piani tangenti di coordinate

$$9) \quad \xi_2 = \varphi_3, \quad \xi_3 = -\varphi_2, \quad \xi_4 = \varphi_1$$

che involuppano un cono di vertice $\xi_1 = 0$; il quale tocca il piano $x_2 = 0$ passante per la direttrice per quei valori di v che danno $\varphi_3 = \infty$.

« Guardando le 5) e 7) si vede come la sostituzione $\begin{pmatrix} x_4 - x_3 & x_2 - x_1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{pmatrix}$ conduca dall'eq.^o tangenziale a quella in coordinate di punti, nella quale comparirà anche la funzione $x_1 x_4 - x_2 x_3$: perchè si trova

$$10) \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_2^2} = -\frac{\varphi_3}{\varphi_2}$$

« L'eq.^o del piano tangente nel punto x è:

$$11) \quad (Gf - Fg)(\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - Ff(\varphi_3 y_2 - \varphi_2 y_3 + \varphi_1 y_4) = 0$$

dove

$$F = \varphi_2 \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_2, \quad G = \varphi_3 \varphi'_2 - \varphi_2 \varphi'_3,$$

(¹) Cayley, *A second Memoir on skew Surfaces* nelle Phil. Transactions di Londra pag. 563, anno 1864; Cremona, Istituto Lombardo 1868. Una classe particolare di queste sup. algebriche s'era già nel 1861 presentata allo Chasles, tomo 53 de' Comptes Rendus.

e quella del piano polare dello stesso punto rispetto al complesso 1) è

$$12) \quad (g + hf)(\varphi_2 y_1 - \varphi_1 y_2) - f(\varphi_3 y_2 - \varphi_2 y_3 + \varphi_1 y_4) = 0.$$

« Identificando le due eq.ⁱ 11) e 12) si ha la relazione

$$13) \quad 2Fg + (hF - G)f = 0$$

che è l'eq.^e in coordinate curvilinee dell'assintotica A_k per questa superficie. Da essa si vede, poichè è di 1° grado in $f:g$, che l' A_k è incontrata in un sol punto da qualunque generatrice. Siccome poi per i punti della direttrice rettilinea $x_1 = x_2 = 0$ è $f = 0$ (e g qualunque), così la A_k incontra la direttrice rettilinea ne' punti per i quali $F = 0$. I valori di v tratti da questa eq.^e forniscono le generatrici singolari della superficie. Infatti se la generatrice 5) (o, ch'è lo stesso, 8)) incontra la consecutiva, dovranno, insieme alle 5), valere le loro derivate rispetto a v :

$$\varphi'_1 \xi_1 + \varphi'_2 \xi_2 + \varphi'_3 \xi_3 = 0, \quad \varphi'_1 \xi_3 + \varphi'_2 \xi_4 = 0$$

« Eliminando le ξ_i tra queste due eq.ⁱ e le due 19) si ha

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 \\ 0 & 0 & \varphi'_1 & \varphi'_2 \end{vmatrix} = 0$$

onde

$$(\varphi_1 \varphi'_2 - \varphi'_1 \varphi_2)^2 = F^2 = 0.$$

È anche qui da avvertire che le funzioni F e G non possono essere identicamente nulle, nè contemporaneamente nè separatamente. Infatti se così fosse, se ne trarrebbe intanto

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \text{cost} = a, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \text{cost} = b.$$

Supposto soltanto F nullo il primo rapporto darebbe il punto fisso $\xi_3 + a\xi_4 = 0$ (o il piano fisso $ax_1 - x_2 = 0$), ed essendo G diverso da zero, la superficie si ridurrebbe alle rette proiettanti da quel punto i punti della curva 6) cioè ad un cono (ovvero alle rette intersezione del piano fisso coi piani tangenti al cono 9) cioè ad una curva piana invilupata dalle sue tangenti). Se anche $G \equiv 0$, si ha una retta fissa congiungenti i due punti fissi

$$\xi_3 + a\xi_4 = 0, \quad \xi_1 + a\xi_2 + ab\xi_3 = 0$$

(ovvero intersezione dei due piani fissi

$$ax_1 - x_2 = 0 \quad abx_2 - ax_3 + x_4 = 0).$$

« Se fosse solo $G \equiv 0$, la terza della 21) mostra che si avrebbe la quadrica rigata

$$\xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3 = \mu \xi_3^2$$

« Consideriamo ora sopra una generatrice $v = \text{costante}$ il punto u_d in cui essa taglia la direttrice rettilinea e il punto u_k dove taglia l'assintotica A_k . Poichè pel primo punto si ha $f = 0$ e pel secondo punto si ha la 13), così l'eq.¹ complessiva dei due punti sarà

$$14) \quad 2Fgf + (kF - G)f^2 = 0.$$

« I parametri u, u_1 della coppia coniugata armonica alla 14) saranno ligati dall'eq.^e polare

$$15) \quad F(g_1f + f_1g) + (kF - G)f_1f = 0.$$

« Questa permette di scrivere l'eq.^e del piano tangente nel punto u, v co' parametri u_1, v . Da essa infatti si trae

$$Ff(g_1 + kf_1) - (Gf - Fg)f_1 = 0$$

ed eliminando con l'aiuto di essa il rapporto $\frac{Gf - Fg}{Ff}$ dalla 11) si ha per l'eq.^e del piano tangente

$$(g_1 + kf_1)(g_2y_1 - g_1y_2) - f_1(g_3y_2 - g_2y_3 + g_1y_4) = 0.$$

« Or questa è l'eq.^e del piano polare del punto u_1, v rispetto al complesso. Da questo istante noi possiamo trarre per la superficie di Cayley le stesse conclusioni che per quelle a direttrici distinte; soltanto quì la trasformazione è data dalla 15) con la curva unita 14). È inutile trascrivere queste conclusioni. Soltanto faccio osservare che, analogamente alla 14^{bis}) della Nota precedente possiamo quì scrivere

$$x_1 = -\eta_4, x_2 = \eta_3, x_3 = -\eta_2 + k\eta_4, x_4 = \eta_1 - k\eta_3$$

che è la più generale reciprocità che muta l'assintotica A_k e la superficie in se stessa (1) ».

Elettrotecnica. — *Sull'impiego dell'elettrometro a quadranti come strumento differenziale* (2). Nota dell'ing. RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio G. FERRARIS.

« Siano A, B e C tre punti di un circuito in cui agisce una forza elettromotrice e siano A e B le estremità di una resistenza r inserita nel circuito stesso. Se, per mezzo della variazione di tale resistenza, si fanno successivamente variare le due differenze di potenziali $V_A - V_B$ e $V_B - V_C$, esistenti rispettivamente fra i punti A, B e B, C, è sempre possibile, per mezzo di

(1) Un caso particolare fu trovato a proposito delle 5) e 7); esso corrisponde a $k = 0$.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Museo industriale italiano in Torino.

una sola esperienza, con un elettrometro a quadranti ordinario, che non ha bisogno di essere tarato, e con un metodo di riduzione allo zero, di constatare quando, corrispondentemente ad un determinato valore della resistenza AB, quelle due differenze di potenziali risultano uguali fra di loro.

« Se si pongono infatti i due punti A e C rispettivamente in comunicazione con le due coppie Q_1 , Q'_1 , e Q_2 , Q'_2 di quadranti opposti dell'elettrometro ed il punto B in comunicazione con l'ago h dell'elettrometro stesso, e se si indica con W il momento della coppia deviatrice, si può scrivere:

$$W = k \left[(V_A - V_B)^2 - (V_C - V_B)^2 \right],$$

ove k è una costante. Donde si vede che $W = 0$, e che non si ha quindi alcuna deviazione dell'equipaggio mobile dell'apparecchio, allorchando

$$V_A - V_B = \pm (V_B - V_C).$$

« Dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè le due differenze di potenziali in questione siano uguali è che, pur facendo le connessioni di cui si è detto, l'ago dell'elettrometro rimanga nella sua posizione di equilibrio.

« È facile dimostrare, e ciò è più importante, che il metodo ora esposto si applica anche allorchando si tratta di constatare l'uguaglianza di due differenze di potenziali alternative efficaci $V_A - V_B$ e $V_B - V_C$, esistenti rispettivamente fra i punti A, B e B, C di un circuito in cui agisce una forza elettromotrice alternativa.

« Dicendo infatti w il momento della coppia deviatrice in un determinato istante, alla fine di un certo tempo t , e v_a , v_b , v_c rispettivamente i valori dei potenziali in A, B, C nel medesimo istante, si può scrivere:

$$w = k \left[(v_a - v_b)^2 - (v_c - v_b)^2 \right].$$

Ciò posto, moltiplicando ambo i membri di questa equazione per dt ed integrando fra i limiti 0 e T, ove T è il periodo della forza elettromotrice alternativa, si ha:

$$\int_0^T w dt = k \left[\int_0^T (v_a - v_b)^2 dt - \int_0^T (v_c - v_b)^2 dt \right],$$

od ancora, dividendo ambo i membri per T:

$$\frac{1}{T} \int_0^T w dt = k \left[\frac{1}{T} \int_0^T (v_a - v_b)^2 dt - \frac{1}{T} \int_0^T (v_c - v_b)^2 dt \right].$$

Indicando quindi con W il valore medio del momento della coppia deviatrice, si ha finalmente:

$$W = k \left[(V_A - V_B)^2 - (V_C - V_B)^2 \right],$$

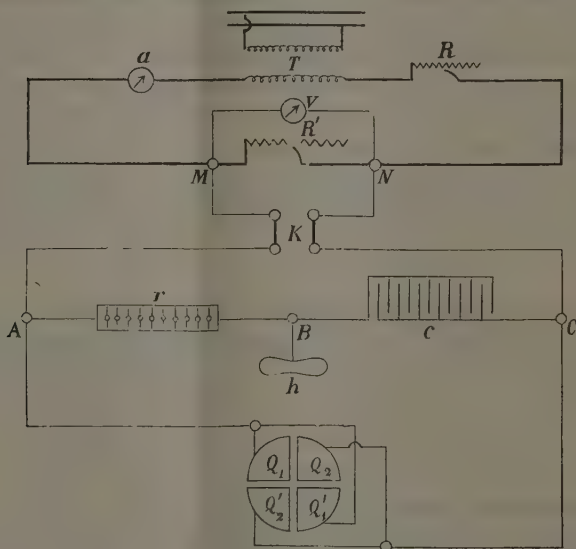
dalla quale equazione si deduce che $W = 0$ quando

$$V_A - V_B = \pm (V_B - V_C).$$

« Dunque anche in questo caso la condizione necessaria e sufficiente perchè le due differenze di potenziali alternative efficaci di cui si tratta siano uguali è che non si abbia alcuna deviazione dell'equipaggio mobile dello strumento.

« Il modo stesso, con cui è stata dimostrata l'applicabilità del metodo nel caso di differenze di potenziali alternative, pone in evidenza un fatto notevole, quello cioè che il metodo stesso, lungi dall'essere soltanto applicabile nel caso in cui la forza elettromotrice che si prende a considerare sia sinusoidale, è affatto generale e quindi rigorosamente applicabile qualunque sia la legge con cui varia la forza elettromotrice medesima in funzione del tempo.

« Il metodo suesposto, che molto opportunamente si potrebbe denominare *metodo dell'elettrometro differenziale*, può ricevere varie utili applicazioni, tra le quali, per esempio, quelle che si riferiscono alla misura delle capacità



elettrostatiche e delle induttanze, nel qual caso basta avere a disposizione, oltre all'elettrometro a quadranti, adoperato nel modo che è stato detto, una differenza di potenziale alternativa fra due punti A e C ed un reostato AB privo di autoinduzione, come ad esempio un'ordinaria cassa di resistenza.

« Per sperimentare, dopo aver disposto quest'ultima tra i due punti A e C ed in serie col condensatore o con la spirale, di cui si deve determinare rispettivamente la capacità e l'induttanza, si pongono i due punti A e C in comunicazione con ciascuna coppia di quadranti opposti dell'elettrometro ed il punto B in comunicazione con l'ago dell'elettrometro stesso. Così disposte le cose, in generale l'equipaggio mobile dell'apparecchio devierà di un certo angolo, ma si potrà sempre far variare per tentativi la resistenza AB fino a che l'ago ritorni nella sua posizione di equilibrio. Dal valore r della resistenza, che si trova inserita tra A e B quando tale condizione è soddisfatta, si deduce allora immediatamente la capacità c del condensatore o l'induttanza L della spirale, su cui si esperimenta.

« Detta infatti I l'intensità efficace della corrente alternativa si può scrivere:

$$V_A - V_B = r I.$$

Inoltre, incominciando a considerare il caso della misura della capacità elettrostatica di un condensatore, si ha pure, trattando la forza elettromotrice alternativa che agisce nel circuito come sinusoidale:

$$V_B - V_C = \frac{1}{2\pi n c} I,$$

ove π è il rapporto della circonferenza al diametro, ed n la frequenza della corrente alternativa. E poichè, quando l'ago dell'elettrometro è a zero:

$$V_A - V_B = V_B - V_C,$$

si deduce immediatamente:

$$r = \frac{1}{2\pi n c},$$

ossia:

$$c = \frac{1}{2\pi n r}.$$

Se r è espresso in ohm, c risulta espresso in farad. Volendo invece c espresso, come torna più comodo nella pratica, in microfarad, si scriverà:

$$c = \frac{10^6}{2\pi n r}.$$

« Nel caso della misura dell'induttanza di una spirale si ha invece, trattando ancora come sinusoidale la forza elettromotrice alternativa che agisce nel circuito e dicendo r' la resistenza reale della spirale che si considera:

$$V_B - V_C = \sqrt{r'^2 + 4\pi^2 n^2 L^2} I.$$

E quindi:

$$\sqrt{r'^2 + 4\pi^2 n^2 L^2} = r,$$

donde si ricava:

$$L = \frac{1}{2\pi n} \sqrt{r^2 - r'^2}.$$

Se r ed r' sono espressi in ohm, L risulta espresso in henry.

« Come esempio di applicazione del metodo suesposto credo utile dare i risultati di due esperienze, che ho eseguite, per verificare l'esattezza del metodo stesso, sopra due condensatori a mica, l'uno di $\frac{1}{3}$ microfarad della Casa Elliott di Londra e l'altro di $\frac{1}{2}$ microfarad della Casa Carpentier di Parigi.

« La forza elettromotrice alternativa, necessaria per produrre la differenza di potenziale alternativa efficace $V_A - V_C$, necessaria per i miei esperimenti, era generata nella spirale secondaria di un trasformatore Ganz T, la spirale primaria del quale era alimentata dalla corrente alternativa fornita da un alternatore Thury della Società Piemontese di Elettricità. Come si vede dalla figura, le cose erano disposte in guisa che, pur avendo fra le estremità della spirale secondaria di T una differenza di potenziale costante, si potesse, mediante due reostati R ed R', variare a piacimento la differenza di potenziale alternativa efficace $V_A - V_C$, rappresentata dalla differenza di potenziale fra le estremità M ed N del reostato R' e misurata per mezzo di un voltmetro di Cardew *v*. In *a* è rappresentato un amperometro, in K un interruttore a mercurio, in *r* una cassa di resistenza della Casa Carpentier, in *c* il condensatore da sperimentare, in Q_1 , Q'_1 e Q_2 , Q'_2 le due coppie di quadranti opposti di un elettrometro a quadranti di Mascart ed in *h* l'ago dell'elettrometro stesso, supposto, per maggior chiarezza della figura, portato fuori dell'apparecchio. La lettura era fatta col metodo di Thomson con specchio concavo e scala trasparente, la cassa metallica dello strumento era posta in comunicazione con la terra e tutti gli apparecchi erano, per mezzo di blocchi di paraffina e di lastre di ebanite, accuratamente isolati.

« Le esperienze furono eseguite con una differenza di potenziale alternativa efficace fra i due punti A e C uguale a 100 volt. La frequenza della corrente alternativa era 42. In tali condizioni l'ago dell'elettrometro rimaneva nella sua posizione di equilibrio in corrispondenza di un valore di *r* uguale a 11.180 ohm per il condensatore di $\frac{1}{3}$ microfarad, ed uguale a 7.820 ohm per il condensatore di $\frac{1}{2}$ microfarad.

« Si ricava quindi, nel primo caso:

$$c = 0,339 \text{ microfarad,}$$

e nel secondo caso:

$$c = 0,485 \text{ microfarad.}$$

« E poichè, tanto nella prima quanto nella seconda esperienza, si osservava una deviazione sensibile dell'immagine luminosa sulla scala allorchando si faceva variare la resistenza *r* di 10 ohm, ne risulta che le approssimazioni con cui quei risultati furono ottenuti sono di 0,0004 microfarad (0,12 %) per la prima esperienza e 0,0006 microfarad (0,12 %) per la seconda esperienza ».

Fisica. — *Sulla distribuzione del magnetismo indotto nel ferro.*

Nota di M. ASCOLI e F. LORI, presentata dal Socio BLASERNA.

« 1. Coi metodi e gli strumenti descritti in alcune Note precedenti ⁽¹⁾, abbiamo ripreso lo studio della distribuzione del magnetismo nell'interno di un cilindro di ferro immerso in un campo uniforme. Nostro scopo era di precisare, meglio che non sia stato fatto nell'unico caso considerato nell'ultima delle dette Note, la legge di variazione dell'intensità indotta al variare della distanza dall'asse del cilindro, di esaminare come tale legge si modifichi al variare del rapporto tra la lunghezza e il diametro del cilindro, di studiare infine l'andamento della forza magnetizzante risultante e del fattore smagnetizzante.

« 2. Il cilindro è costituito di 127 fili di ferro del diametro medio di cm. 0,095. Intorno ad un filo centrale è collocato un primo strato di 6 fili, su questo un 2° di 12 e così via altri 4 di 18, 24, 30, 36. Al centro di ciascuno di questi 6 strati è avvolta una spirale di filo di rame sottilissimo (diam. 0,01) formata di 50 spire sopra un solo strato. Le 6 spirali, che dovevano introdursi successivamente nel circuito del galvanometro balistico, avevano tutte, insieme ai fili di congiunzione, la medesima resistenza elettrica, in modo che potevano venir sostituite l'una all'altra senza alterare la resistenza totale del circuito secondario. Questa disposizione permetteva di eseguire rapidamente le misure e i calcoli. Il cilindro, nella prima esperienza, aveva la lunghezza di cm. 58,5, nelle successive veniva man mano accorciate tagliandone, con una sottile sega di acciaio, due lunghezze uguali alle estremità, in modo che le 6 eliche rimanessero sempre al centro. Le esperienze furono fatte sopra 9 lunghezze diverse. Il sistema delle 6 eliche, malgrado la sottigliezza del filo, produceva al centro un sensibile rigonfiamento, abbiamo tuttavia dovuto preferire questo metodo a quello descritto nella citata Nota, che ci avrebbe obbligato a sfasciare e ricomporre il fascio e l'elica secondaria più di 50 volte; ciò non solo avrebbe richiesto lunghissimo tempo ma avrebbe prodotto facilmente qualche alterazione nelle proprietà magnetiche del metallo troppo maneggiato. Non abbiamo però mancato di verificare, come ora diremo, che questa deformazione del cilindro è senza sensibile effetto sul risultato.

« Nella ora accennata disposizione ciascuno strato di ferro è compreso tra due eliche secondarie, la prima di queste comprende un nucleo di 7 fili. Agli estremi di ciascuna elica sono saldati due grossi fili di rame amalga-

(¹) V. M. Ascoli, Rendiconti, vol. III, pag. 176, 279, 314, 377.

mato immersi in una serie di 7 bicchierini di mercurio, come è indicato schematicamente nella fig. 1. Paralleli a questa serie stanno due canaletti di mercurio c, c' in comunicazione col galvanometro balistico G . Due grossi fili di rame a, b servono a mettere in comunicazione col galvanometro una

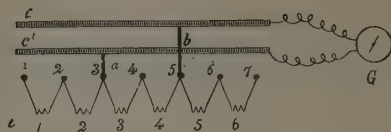


FIG. 1.

qualunque delle eliche o due successive (come la 3^a e 4^a della figura). Le estremità delle eliche sono disposte in modo da dare al galvanometro deviazioni balistiche opposte, per modo che quando due successive sono in circuito il galvanometro misura il flusso magnetico che attraversa l'area anulare compresa tra di esse. Durante la prima misura si introduce nel circuito la sola elica 1^a (aggiungendo, mediante una cassetta, una resistenza uguale a quella di un'elica); nelle altre 5 misure se ne introducono due successive (1^a e 2^a, 2^a e 3^a, ecc.); colla 1^a si ha il flusso passante attraverso il nucleo centrale di 7 fili, colle altre 5 il flusso passante pei 5 strati.

« La deviazione balistica era ottenuta invertendo la corrente nell'elica magnetizzante; questa era lunghissima (2 m.) del diam. interno di 5 cm. e portava 15,25 spire per cm. La corrente, data da 30 elementi Daniell, era misurata da un amperometro Siemens a torsione.

« Scopo delle misure è di determinare la intensità della magnetizzazione indotta. Perciò bisogna anzitutto riferire a uguali sezioni i valori del flusso misurati per sezioni diverse, cioè di 7, 12, 18, 24, 30 e 36 fili. Abbiamo riferito tutto alla sezione di 6 fili cioè divisa la 1^a deviazione per $\frac{7}{6}$, le altre per 2, 3, 4, 5 e 6. I numeri così ottenuti sono proporzionati alla *induzione* magnetica, ed anche, molto approssimativamente, all'intensità.

« Trattandosi di studiare delle variazioni, non è necessario ridurre i numeri in misura assoluta, e perciò nella maggior parte delle tabelle che seguono l'unità è il millimetro della scala galvanometrica. Tuttavia, per confrontare alcuni dei nostri risultati con quelli di altri autori, si credette di determinare anche il coefficiente di riduzione in misura assoluta.

« Il diametro del nucleo di n fili contenuto entro ciascuna elica indotta si calcola, come quello di un cilindro compatto di egual sezione, colla formula $0,095\sqrt{n}$.

« Per i 6 nuclei abbiamo

$$n = \quad 7 \quad 19 \quad 37 \quad 61 \quad 91 \quad 127$$

ai quali corrispondono i semidiametri

$$r = \quad 0,125 \quad 0,207 \quad 0,289 \quad 0,371 \quad 0,453 \quad 0,535$$

« Le circonferenze che hanno questi raggi dividono la sezione in 6 regioni, per ciascuna delle quali l'esperienza misura il flusso medio. Tale valor medio, va attribuito a punti la cui distanza dall'asse si calcola come è detto nella Nota citata. Le distanze così calcolate sono

$$q' = 0,083 \quad 0,166 \quad 0,248 \quad 0,330 \quad 0,411 \quad 0,494$$

che, espresse in frazione del raggio del cilindro (0,533), diventano

$$q = 0,155 \quad 0,310 \quad 0,464 \quad 0,617 \quad 0,768 \quad 0,923$$

« Le lunghezze esaminate sono 9, cioè

$$l = \text{cm. } 58,5 \quad 39,5 \quad 29,7 \quad 23,7 \quad 18,7 \quad 13,9 \quad 10,7 \quad 8,6 \quad 6,0.$$

« Queste, espresse in diametri del cilindro (1,071) diventano

$$\lambda = 54,6 \quad 36,9 \quad 27,7 \quad 22,1 \quad 17,5 \quad 13,0 \quad 10,0 \quad 8,0 \quad 5,6$$

« Chiudiamo questo cenno descrittivo ricordando che, prima di far la lettura del galvanometro, la corrente veniva invertita gran numero di volte; la lettura era poi sempre fatta per le due inversioni opposte della corrente; delle due, sempre concordantissime, si prendeva la media.

« Osserviamo infine che la inversione dà il doppio del flusso esistente; ma, siccome ciò si ripete in tutte le misure, è inutile tenerne conto.

« 3. *Verifiche e correzioni.* L'influenza della deformazione sopra notata e dovuta alle eliche interne, deve essere esaminata. In tre modi abbiamo potuto constatare che essa, per l'attuale lavoro, è trascurabile.

« In primo luogo abbiamo fatto una verifica diretta, misurando il flusso totale passante per un cilindro di 127 fili lunghi 8 cm. e non contenente eliche, e ripetendo la stessa misura per lo stesso fascio colle 5 eliche interne. Ecco i risultati ottenuti per due diverse correnti magnetizzanti (espresse in amp.)

$$\text{Corrente } 0,15 \text{ senza eliche } 31,6 \text{ colle eliche } 32,8$$

$$\text{ " } 1,00 \text{ " " } 234,1 \text{ " " } 242,9$$

La differenza, nel senso prevedibile (¹), è sensibile ma piccola e trascurabile per noi che più che i valori assoluti, abbiamo di mira le loro variazioni. Per maggiori lunghezze questa differenza andrebbe poi diminuendo rapidamente (²).

« In secondo luogo, come si vedrà, i risultati delle presenti ricerche si collegano molto bene con quello della Nota citata; ora, in quelle esperienze, il cilindro non conteneva che una sola elica ed era di sezione quasi tripla.

« In terzo luogo, come noteremo in seguito, un accordo perfetto si constatava, per quanto riguarda il fattore smagnetizzante, tra i nostri e i risultati del sig. Du Bois (²).

(¹) V. Rendic. Vol. III pag. 314.

(²) *Magnetische Kreise*. Berlin 1894 e Wied. Ann. 1892.

« Possiamo dunque senz'altro estendere ai cilindri compatti i risultati che otterremo per nostri fasci.

« 4. Una correzione importante è quella riguardante l'imperfetta omogeneità del materiale. Per eseguirla seguiremo il seguente metodo. Prima di formare il fascio, i 127 fili lunghi cm. 58,5, venivano divisi in 6 gruppi di 36, 30, 24, 18, 12, 7, ciascuno dei quali era destinato a formare uno degli strati del cilindro. Ciascun gruppo veniva diviso in fasci di 6 fili legati strettamente tra loro; per il gruppo di 7 i fasci di 6 fili si ottenevano rifacendo il fascio 7 volte ed escludendo ogni volta uno dei fili. Ciascun fascio rappresenta un cilindro avente la sezione di 6 fili e lungo circa 250 diametri. Avvolta una piccola elica secondaria di 100 spire sopra un tubo sottile di vetro, entro il quale si poneva il fascio in modo che l'elica corrispondesse al suo centro, e collocato tutto nel campo dell'elica induttrice, si determinava col variar della corrente in questa, la curva magnetica, avente per ascisse le intensità della corrente magnetizzante e per ordinate le letture al galvanometro (divise per 2 per esser confrontabili colle misure fatte con 50 spire). Queste curve, vista la lunghezza del fascio, si possono confondere sensibilmente colle curve normali. I punti ottenuti per i fasci appartenenti al medesimo gruppo erano segnati come appartenenti ad una medesima curva; questa veniva tracciata in modo da rappresentare il risultato medio per i detti fasci. Si ottennero così 6 curve le cui differenze dipendevano dalla non omogeneità del materiale. Si fecero poi le medie delle 6 ordinate corrispondenti alle medesime ascisse, e si tracciò con esse la *curva media*. Le differenze tra le ordinate della curva media e quelle delle singole 6 curve, danno le correzioni da farsi alle ordinate di queste per ridurle ai valori che si otterrebbero se il materiale desse tutto una curva uguale alla media. Per facilitare la riduzione si costruirono le curve aventi le correzioni per ordinate e le ordinate delle precedenti curve per ascisse. Così per ciascuna lettura al galvanometro balistico (ridotta alla sezione di 6 fili) e per ciascun strato del fascio, si ha immediatamente la correzione.

Questo metodo non è del tutto rigoroso, perchè, quando i fili sono riuniti, il magnetismo di ciascuno dipende a rigore anche da quello di tutti gli altri; tuttavia è certo che predomina di gran lunga l'influenza delle qualità proprie a ciascun strato. I seguenti esempi mostrano l'efficacia della correzione. Sono due esperienze fatte pel fascio più lungo colle correnti 0,8 e 1,6. Per tale lunghezza la distribuzione è quasi esattamente uniforme :

	$i = 0,8$					
Valori non corretti	71,0	78,7	81,1	78,4	79,7	72,6
" corretti	76,7	75,0	77,5	76,9	77,6	77,1

	$i = 1,6$					
Valori non corretti	148,1	152,6	157,2	151,8	153,6	140,9
" corretti	149,8	146,9	153,8	151,6	151,3	150,3

Come si vede, differenze di circa 13 unità sono ridotte a 1.

« 5. *Riduzione in misura assoluta.* Il coefficiente di riduzione si ottenne determinando la deviazione balistica data dall'induzione di una elica primaria sopra una secondaria senza nucleo posta nel suo campo. L'elica primaria, lunga 2 m., aveva il diametro interno di 5 cm. e portava 15,25 spire per cm. Per lungo tratto il suo campo era uniforme. L'elica secondaria, composta di filo di rame del diam. di cm. 0,01, portava 224 spire sopra 4 strati; il suo diametro medio era di cm. 3,122. Lo si determinò misurando, coll'approssimazione di circa 1 mm., la lunghezza totale delle 224 spire (m. 21,971). Il flusso, attraverso una sezione S di questa elica, proveniente dall'elica induttrice percorsa da una corrente i (c. g. s.) è

$$4 \cdot \pi \cdot 15,255 \cdot i \cdot S = \pi^2 \cdot 15,255 \cdot (3,122)^2 = 1467 \cdot i$$

« Il medesimo flusso veniva espresso in parti (mm.) della scala galvanometrica coll'inversione della corrente primaria. Con 5 correnti induttrici diverse si ottenne, per il rapporto tra la deviazione in mm. e l'intensità c. g. s., i 5 seguenti valori, la cui concordanza è soddisfacente

$$1757, 1761, 1755, 1749, 1756;$$

la loro media è

$$1756$$

« Per una sola spira si avrebbe $\frac{1756}{224}$, e quindi, indicando con k la costante del galvanometro e con R la resistenza del circuito secondario, avremo

$$K \frac{1756}{224} = \frac{1467}{R} \quad (1)$$

« Come abbiamo già osservato, è inutile tener conto del fattore 2 dipendente dall'inversione che dà una variazione del flusso doppia del valore di questo.

« La resistenza R , che comprende il galvanometro, fu determinata mediante il ponte di W col metodo di Thomson, ecco i diversi valori ottenuti in ohm.

$$389,5 \quad 390,8 \quad 390,7 \quad \text{media } 390,3$$

le differenze, dipendenti dal non aver preso speciali cautele durante la misura, sono insignificanti pel nostro scopo. La (1) dà

$$K = 0,381$$

« Le deviazioni del galvanometro balistico espresse in millim., moltiplicate per K e per la resistenza del circuito secondario in ohm., e divise pel numero delle spire dell'elica secondaria, danno il flusso in misura assoluta c. g. s.

« Nel caso nostro la resistenza del circuito secondario, determinata col metodo accennato, era 369,2 (con due eliche secondarie), il numero delle spire 50. Il flusso si ridurrà in misura assoluta col coefficiente

$$\frac{0,381 \cdot 369,2}{50} = 2,813$$

« Si riduce all'unità di sezione dividendo per la sezione dei fasci studiati, sempre ridotta, come abbiamo detto, a 6 fili, del diametro di 0,095 ciascuno

$$\frac{2,813}{6 \frac{\pi}{4} (0,095)^2} = 66,15$$

« Con questo coefficiente si ottiene l'*induzione* magnetica. L'*intensità* si deduce sottraendo il valore del campo e dividendo per 4π ; noi possiamo sempre trascurare il campo rispetto all'induzione e adoperare, nel calcolo dell'intensità, il coefficiente

$$\frac{66,15}{4\pi} = 5,264$$

« Quanto alle forze magnetizzanti e smagnetizzanti che, nelle tabelle, sono espresse in centesimi di ampère, la riduzione in misura assoluta si fa moltiplicando per

$$\frac{4\pi \cdot 15,25}{1000} = 0,1916$$

« Finalmente i numeri esprimanti i fattori smagnetizzanti, essendo rapporti tra una forza smagnetizzante e una intensità, vanno moltiplicati per

$$\frac{0,1916}{5,264} = 0,0364$$

« 6. *Risultati*. Sono riassunti nella tabella I, che dà, per le diverse intensità della corrente magnetizzante (i) e per diversi rapporti tra la lunghezza e il diametro del cilindro (λ), l'intensità della magnetizzazione a diverse distanze dell'asse (ρ), espresse in frazione del raggio del cilindro.

TABELLA I.

$\lambda =$	54,6	36,9	27,7	22,1	17,5	13,0	10,0	8,0	5,6
$i = 10$									
$\rho = 0,155$	3,7	3,1	2,7	2,5	1,9	1,4	1,1	0,9	0,5
0,310	3,5	3,1	2,5	2,2	1,7	1,4	1,0	0,8	0,6
0,464	3,9	3,2	2,6	2,4	1,9	1,6	1,2	1,3	0,6
0,617	3,5	3,0	2,4	2,3	1,8	1,4	1,1	1,2	0,6
0,768	4,2	3,4	2,7	2,6	2,0	1,6	1,3	1,2	0,7
0,923	3,8	3,2	2,6	2,4	1,9	1,6	1,2	1,0	0,7

$\lambda =$	54,6	56,9	57,7	52,1	17,5	13,0	10,1	8,0	5,6
$i = 20$									
$q = 0,155$	8,9	8,0	5,9	4,3	4,3	3,0	2,5	1,7	1,0
0,310	9,6	8,4	5,7	5,1	3,9	3,1	2,1	1,6	1,1
0,464	11,2	8,9	6,1	5,7	4,2	3,2	2,4	1,9	1,2
0,617	9,3	7,6	5,2	4,7	3,8	3,1	2,3	1,8	1,3
0,768	11,3	9,2	6,8	5,7	4,4	3,0	2,6	2,1	1,5
0,923	11,9	9,5	6,3	5,9	4,4	3,3	2,6	2,2	1,8
$i = 50$									
$q = 0,155$	40,5	27,9	20,6	17,3	11,7	8,3	6,2	4,5	2,5
0,310	38,3	27,1	19,2	15,9	11,1	8,1	6,0	4,4	2,5
0,464	40,9	27,7	21,2	17,9	12,7	9,2	6,7	5,0	3,0
0,617	42,6	29,0	19,9	16,6	11,0	7,8	5,7	4,4	3,0
0,768	42,5	29,0	23,3	20,1	12,8	9,5	7,2	5,7	3,9
0,923	43,9	31,4	23,5	22,1	14,3	10,5	8,0	6,5	4,6
$i = 80$									
$q = 0,155$	76,7	52,0	38,2	29,9	19,7	13,6	9,6	6,8	4,1
0,310	75,0	50,3	35,8	27,6	18,8	13,0	9,0	6,6	4,0
0,464	76,9	52,9	38,7	30,0	21,0	15,2	10,6	7,9	4,7
0,617	77,6	54,7	39,5	30,3	20,3	14,0	12,1	7,0	4,4
0,768	77,1	53,9	38,0	31,7	22,0	16,0	11,9	9,3	6,1
0,923	77,8	56,0	42,3	34,6	25,5	19,1	14,5	11,9	8,0
$i = 160$									
$q = 0,155$	149,8	113,4	83,9	68,4	42,8	29,0	19,9	12,9	6,9
0,310	153,8	109,7	81,0	64,7	42,0	28,0	18,1	12,9	6,9
0,464	151,6	114,0	84,1	68,6	44,7	30,4	20,8	15,5	8,8
0,617	148,3	114,8	86,7	69,7	47,8	32,7	21,5	15,1	8,6
0,768	151,3	114,1	79,0	73,0	49,1	35,0	24,9	19,1	12,4
0,923	150,3	112,6	86,7	72,9	54,1	40,5	31,3	25,6	18,8
$i = 286$									
$q = 0,155$	123,8	83,8	54,8	37,8	24,7	11,0
0,310	121,1	84,6	56,0	35,0	23,9	11,3
0,464	128,0	83,9	59,4	39,7	28,1	14,6
0,617	130,4	90,7	64,0	44,1	31,7	16,9
0,768	131,2	92,7	68,0	48,7	37,5	23,3
0,923	132,1	96,8	74,2	57,3	47,2	34,5

« Coefficiente di riduzione in misura assoluta, per le intensità della magnetizzazione 5,264.

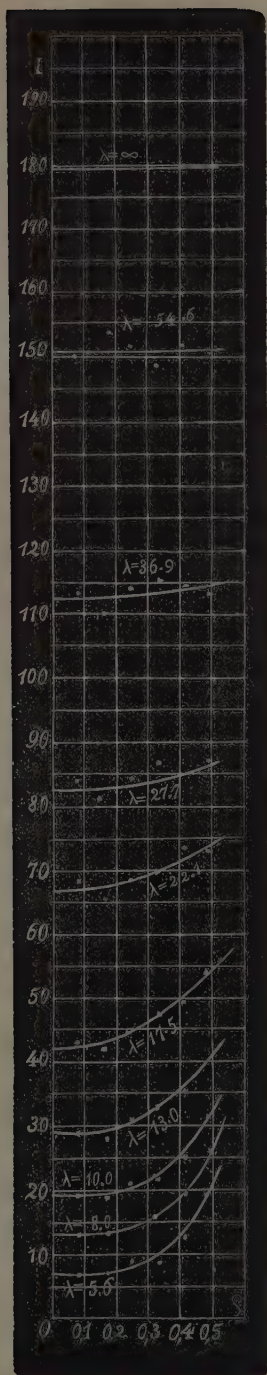
« I risultati generali che appariscono da questi numeri sono: Distribuzione sensibilmente uniforme per le maggiori lunghezze.

« Aumento dell'intensità dal centro alla periferia quando la lunghezza decresce; aumento grandissimo e rapido per le minori lunghezze.

« Per le minori lunghezze l'aumento dell'intensità è più sensibile colle correnti forti, colle maggiori è più sensibile colle deboli. Ad esempio per $\lambda = 54,6$ la distribuzione è quasi uniforme se $i = 160$ o 80 , l'aumento è invece sensibile se $i = 50$ o 20 ; invece per le minori lunghezze l'aumento si fa sempre più sensibile al crescer dell'intensità della corrente. Questo comportamento ha ragione nella forma della curva normale come è spiegato al § 16 della Nota citata; e dimostra che, se le correnti si fossero spinte a valori maggiori, tali che anche per i cilindri più corti, la f. m. vera fosse stata compresa tra le ascisse del 3° tratto della curva normale, si sarebbe trovato di nuovo una variazione più piccola che per le correnti più deboli.

« Nella figura 2 sono disegnate per $i = 160$ le linee aventi per ascisse q e per ordinate l'intensità della magnetizzazione. L'ultima linea, corrispondente alla lunghezza $\lambda = 5,6$, si accorda bene con quella riportata nella Nota citata; solo non vi appare alcun minimo; ciò fa credere che quello trovato nel caso contemplato nel lavoro precedente fosse dovuto alla non omogeneità del materiale. A dir vero un minimo si manifesterebbe in quasi tutte le linee per $q = 0,31$, ma certamente è dovuto a insufficienza della correzione accennata al § 4 od a qualche errore commesso nel determinare la curva del 2° strato; giacchè si verifica press'a poco nella stessa misura per tutte le lunghezze.

« In una prossima Nota studieremo l'andamento della forza e del fattore smagnetizzante ».



Fisica terrestre. — *Orientazione ed intensità del magnetismo permanente nelle rocce vulcaniche del Lazio* ⁽¹⁾. Nota del dott. GIUSEPPE FOLGHERAITER, presentata dal Socio BLASERNA.

« La sistematica distribuzione del magnetismo nei giacimenti vulcanici del Lazio nel senso voluto dall'azione induttrice della Terra è l'effetto della risultante del magnetismo permanente di essi e di quello temporaneo. Ora può darsi, che tale distribuzione sia dovuta alla prevalenza del magnetismo temporaneo, mentre il magnetismo permanente può avere un'orientazione bensì sistematica ma diversa, o può essere distribuito irregolarmente e mascherato da quello indotto, o non esistere affatto; può però anche darsi che la sua orientazione sia identica a quella del magnetismo temporaneo, e che le due azioni si sommino.

« Naturalmente per risolvere tale questione si devono dividere gli effetti dovuti alle due diverse cause. A tal uopo ho staccato dalle rocce delle piccole colonnette di forma più o meno regolare avendo l'unica avvertenza, che la dimensione nel senso dell'altezza, o se mi era possibile, nella direzione dell'ago d'inclinazione fosse più marcata che quelle nelle altre direzioni.

« Merita appena che io accenni, che nello staccare le colonnette ho usate tutte le precauzioni per evitare scosse od urti, che per conto loro avrebbero potuto influire molto sulla magnetizzazione: e per questo vennero presi quasi sempre dei pezzi, che o per l'azione delle vicende atmosferiche o per altre cause si sono un po' staccati dal resto della massa rocciosa.

« Appena staccata una colonnetta, aveva l'avvertenza di segnarne subito col gesso la parte superiore, e notava poi l'orientazione e l'altezza nel banco del punto da cui era stata levata.

« Le colonnette raccolte sono 75 e provengono dalle moltissime cave e giacimenti di rocce, che si trovano sparpagiate per la Campagna romana e sui Colli laziali. Ve ne sono di tutte le categorie, nelle quali il Keller ha suddiviso le rocce vulcaniche del Lazio: la loro lunghezza varia tra 9 e 16 cm.; il peso da 100 gr. ad un kilogrammo. Nella forma non sono punto confrontabili fra loro: ora terminano verso le estremità superiore ed inferiore (stabilite dalla loro posizione sulla roccia) in superfici grossolanamente piane, ora in piramidi od altre forme, in modo che non è certamente lecito fare dei seri confronti quantitativi sulla loro intensità magnetica. Del resto per me questa è una questione di poca importanza, ed ho rinunciato assai volentieri alla forma regolare delle colonnette piuttosto che potesse sorgere il dubbio,

(1) Vedi questi Rendiconti pag. 117.

se la lavorazione e pulitura abbia alterato la distribuzione ed intensità magnetica.

« L'esame dell'orientazione del magnetismo nelle colonnette venne fatto coll'avvicinarle ad un ago calamitato liberamente sospeso in modo, che il loro presunto asse magnetico fosse normale all'asse dell'ago, come si usa nella misura dell'intensità magnetica col metodo delle deflessioni (est-ovest); in tal maniera si evita completamente il pericolo di un'induzione reciproca tra l'ago calamitato e le colonnette.

« Il risultato di tale esame fu uniforme per tutte le colonnette raccolte, *senza alcuna eccezione*: esse si manifestarono perfette calamite col polo Nord dalla parte, che sulla roccia stava in basso e col polo Sud in alto. Questa uniformità e regolarità non mi sorpresero punto, anzi si dovevano aspettare, perchè sono conformi e corrispondenti alla distribuzione del magnetismo nei giacimenti vulcanici.

« Eseguito questo primo esame, e segnata la deflessione prodotta dall'avvicinamento all'intensimetro dei due poli di ciascuna colonnetta, rovesciai quasi tutte le colonnette in modo, che il loro polo Sud venisse a trovarsi in basso ed il loro polo Nord in alto. Dopo alcuni giorni determinai nuovamente la polarità e l'intensità magnetica delle diverse colonnette, e continuai poi ad intervalli questo esame per circa tre mesi, e tuttora continua.

« Non posso quì riportare la lunghissima tabella di valori avuti dall'esame di tutte le colonnette, ma per mostrare come sia variata l'intensità magnetica per effetto del loro rovesciamento, riassumerò nella Tabella I i risultati ottenuti dall'esame assai accurato di 4 colonnette, scelte fra quelle che mostrarono maggior intensità magnetica. Ciascuna di queste colonnette venne fissata solidamente sopra una propria tavoletta, e questa poi si faceva terminare ad un punto fisso e costante del braccio dell'intensimetro a deflessione, sul quale poteva scorrere a coulisse. In questo modo era sicuro, che la distanza e la posizione relativa tra l'ago e le colonnette restavano nelle varie misure fatte ad epoche diverse sempre costanti ed invariate, e quindi le varie misure erano paragonabili tra loro.

« Per avere un'idea dell'errore che si poteva commettere nella misura dell'angolo di deflessione nel togliere e rimettere allo stesso punto le colonnette, feci una serie di 6 misure, dalla quale mi risulta, che l'errore medio di ciascuna determinazione ha il valore angolare di $0',38$. L'esattezza che si raggiunge è più che sufficiente, come vedremo, per dedurre con certezza in che rapporto stiano il magnetismo permanente ed il magnetismo indotto dalla Terra nelle rocce.

« Le determinazioni fatte della deflessione prodotta dalle colonnette furono rese indipendenti dalle variazioni della declinazione procedendo nel seguente modo: si leggeva con cannocchiale e scala la posizione d'equilibrio dell'ago dell'intensimetro: veniva avvicinato alla voluta distanza un polo della

colonna e si notava la nuova posizione del reticolo sulla scala: si allontanava la colonna e si rileggeva la posizione d'equilibrio dell'ago. La differenza tra la media delle due posizioni d'equilibrio dell'ago senza colonna e la sua posizione sotto l'influenza di questa dà lo spostamento dovuto al magnetismo della roccia. Il processo si ripeteva per lo stesso polo tre volte, e dalla media dei tre spostamenti veniva calcolato l'angolo di deflessione.

« Coll' identico procedimento veniva determinato l'angolo di deflessione prodotto dall'altro polo della colonna.

« I risultati ottenuti sono raccolti nella seguente:

TABELLA I.

	30 Marzo	2 Aprile	6 Aprile	10 Apr.	17 Apr.	28 Apr.	10 Mag.	11 Ging.
A	0° 58.63	0° 57.50	0° 56.62	0° 55.53	0° 53.93	0° 54.40	0° 54.45	0° 54.1
B	0.56.77	0.56.87	0.55.87	0.54.50	0.53.60	0.53.93	0.53.99	0.53.8
C	1.47.77	1.47.02	1.45.22	1.42.66	1.40.20	1.41.06	1.41.05	1.40.35
D	—	—	3.47.47	3.39.07	3.39.27	3.39.32	3.39.32	3.39.0

« Nella 1^a riga sono segnate le varie date dell'esame: le righe successive contengono i valori ottenuti nelle diverse date per ciascuna delle 4 colonne; questi rappresentano la somma dei due angoli di deflessione dovuti all'avvicinamento dei due poli, e quindi sono sensibilmente proporzionali all'intensità magnetica. Le colonne A, B, C sono di tufo litoide, la D è di lava basaltina.

« Da questa tabella si scorge chiaramente, che col rovesciamento l'intensità magnetica delle colonne ha diminuito sensibilmente, e sembra per di più che ora tale diminuzione si sia quasi arrestata. Il magnetismo permanente è quindi di gran lunga più intenso del magnetismo temporaneo, ed ha la stessa orientazione di questo, come se anch'esso fosse dovuto all'azione induttrice della Terra.

« Per accertarmi che l'indebolimento subito dalle colonne è dovuto realmente al fatto, che nelle colonne rovesciate il magnetismo indotto dalla Terra agisce in senso contrario al magnetismo permanente, mentre prima del rovesciamento agiva nello stesso senso, e non dipende in modo sensibile da altre cause, ho determinato collo stesso metodo più sopra esposto l'intensità magnetica di altre due colonne di tufo, che ebbi cura di tenere sempre verticali e dritte, come cioè erano disposte sulla roccia viva. I risultati ot-

tenuti nelle varie date sono esposte nella seguente tabella: il significato delle cifre raccolte nelle diverse righe è eguale a quello della tabella antecedente.

TABELLA II.

	6 Aprile	10 Aprile	17 Aprile	28 Aprile	10 Maggio	11 Giugno
A'	0.54.65	0.55.15	0.54.40	0.54.40	0.54.52	0.54.18
B'	1.26.63	1.26.87	1.25.97	1.26.63	1.26.73	1.26.0

« Da questa tabella si scorge, che l'intensità magnetica non ha in questo caso variato, o al più le variazioni sono così piccole, che cadono entro i limiti degli errori d'osservazione: però con ciò non viene escluso il caso, che a periodo più lungo possa aver luogo qualche diminuzione, come succede nelle calamite comuni.

« Senza volere dare troppo peso o troppa generalità ai risultati sopra esposti faccio notare, che il rapporto fra le intensità magnetiche delle colonnette di tufo prima e dopo il rovesciamento è in media 16:15 mentre che per la lava basaltina è 28:27; queste cifre possono dare luce del rapporto, che esiste tra il magnetismo permanente e quello indotto dalla Terra, in queste due specie di rocce vulcaniche.

« Come è stato di già detto, le colonnette scelte per questo accurato esame del loro magnetismo sono fortemente magnetiche: ma anche tutte le altre colonnette di queste due specie di rocce (30 di tufo e 12 di lava basaltina ⁽¹⁾) sono state trovate abbastanza fortemente magnetizzate, e si sono comportate tutte nel medesimo modo: il rapporto cioè tra il magnetismo temporaneo e quello permanente è piccolo, ed il magnetismo permanente è indistintamente per tutte le colonnette orientato, come se fosse stato prodotto sotto l'azione del magnetismo terrestre.

« Anche i vari campioni (in numero di 5) di sperone si sono comportati perfettamente nello stesso modo, e furono trovati di un'intensità magnetica abbastanza grande. Ho fatto pure alcune misure con delle piccole colonnette di pozzolana, che con grande difficoltà ho potuto trasportare intere dalla cava in laboratorio attesa la loro grande friabilità, ed ho riscontrato anche per questa specie di prodotto vulcanico la stessa orientazione nel magnetismo ed il rapporto tra il magnetismo indotto e permanente a presso a poco della grandezza di quello del tufo.

(1) Riguardo alla lava basaltina devo ricordare, che non ho mai sperimentato su pezzi staccati in vicinanza a punti distinti.

« I campioni di peperino (in numero di 6) furono trovati magnetizzati assai debolmente (viene così confermata completamente la tabella di graduazione stabilita dal Keller per l'intensità magnetica delle varie specie di rocce vulcaniche) ⁽¹⁾, ed anche quì si verificò una diminuzione di intensità dopo che sono stati capovolti. Ora dopo tre mesi e mezzo dacchè queste colonnette furono sottoposte ad esame, tre di esse sono talmente indebolite, che è difficile stabilire con precisione, se il magnetismo attuale sia ancora orientato come sulla roccia viva o se i poli siano invertiti. Ad ogni modo il magnetismo permanente, se pure esiste nel peperino, è ora quasi completamente mascherato, se non superato dal magnetismo indotto dalla Terra.

« Resta così accertato, che una delle cause che ha prodotto il magnetismo permanente nelle rocce vulcaniche del Lazio, è stata l'induzione terrestre, e se essa non è l'unica, perchè non spiega la formazione dei punti distinti, è però certamente la più potente delle cause: sarebbe altrimenti assai difficile il trovare la ragione di una orientazione del magnetismo così sistematica.

« Ora l'azione induttrice della Terra può aver agito sulle rocce vulcaniche in due modi diversi: o nel periodo del raffreddamento e consolidamento delle materie vulcaniche eruttate, e quindi in un tempo relativamente breve dopo avvenuta l'eruzione, oppure per effetto della lenta ma continuata induzione del magnetismo terrestre sulle rocce di già raffreddate. Il Melloni ⁽²⁾ era dell'opinione, che il magnetismo delle lave fosse dovuto all'induzione della

(1) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. V, 1° sem. 1889, pag. 519.

(2) Memorie della R. Accad. delle Scienze di Napoli, vol. I, 1853, pag. 121; C. R., vol. XXXVII, 1853, pag. 229. A proposito della calamitazione, che acquistano le rocce vulcaniche durante il loro raffreddamento, voglio ricordare una lettera di C. Romme inserita nel giornale « Observations sur la Physique ecc. », vol. X, 1777, pag. 14, nella quale l'A. rivendica a Roberto Boyle la scoperta della calamitazione dei mattoni, durante il loro raffreddamento, per effetto dell'induzione terrestre. Ecco l'esperienza di Boyle tradotta da Romme letteralmente dall'inglese:

« Une brique qui n'avoit point servi, fut sciée dans sa longueur en deux parties égales. « Chacune d'elles (en différens tems), fut poussée au feu, jusqu'au rouge, pendant un tems « assez long, et ensuite refroidie, en la dirigeant du Nord au Sud. Elle acquit par là, « comme je l'attendois, une vertu magnétique. Son extrémité, qui, en refroidissant, regardoit le Sud, attira un peu, quoique foiblement, la fleur-de-lys, dirigée au Nord d'une « aiguille de boussole. Son autre extrémité repoussoit un peu plus vigoureusement la fleur-de-lys, et attiroit un peu l'autre pointe de l'aiguille ».

Per quante ricerche io abbia fatto nelle opere di R. Boyle, non ho potuto ritrovare questo brano, che secondo il Romme sarebbe stato pubblicato in un'Opera scritta in inglese nel 1691, un anno dopo che Boyle fece l'esperienza citata. Neppure nell'edizione dell'« Opera Omnia R. Boyli » Venetiis, sumptibus Io: Iacob: Hertz, 1697 si parla di quest'esperienza; soltanto nel vol. III al capitolo « Experimenta et notae circa mechanicam magneticarum qualitatum productionem » pag. 404, viene citato un altro trattato, che non trovai da consultare « De magnetismo Terrae ».

Terra nel periodo del loro consolidamento e raffreddamento, e non all'azione secolare di essa sulle rocce già fredde. Egli ha basato la sua ipotesi sul fatto, che le lave consolidate ai suoi giorni non erano punto inferiori in forza magnetica a quelle dei vulcani estinti dalla più remota antichità, e riteneva come altra prova evidente della calamitazione delle lave nei primi tempi della loro formazione la *tenacità* colla quale conservano il proprio stato magnetico. Egli ha a questo proposito ricordato che dei pezzi di leucitifiro e di altre qualità di lave estratti dalle pareti dell'Anfiteatro di Pompei si mostravano calamitati sotto qualunque inclinazione rispetto all'orizzonte: prova questa che essi conservarono i loro assi magnetici nelle posizioni primitive indipendentemente dalla nuova orientazione, in cui furono posti come materiali di fabbrica.

« Io credo che l'ipotesi di Melloni sia giusta fino a che si parla di lave, ossia di rocce vulcaniche, le quali a forma di colate sono scese dalle pendici dei vulcani, poi si sono ancora caldissime fermate e consolidate e quindi si sono lentamente raffreddate, conservando la posizione già presa, e che ancora conservano. Se invece si prende in considerazione il modo di formazione delle altre specie di rocce vulcaniche non si può in generale ammettere tale ipotesi, e per spiegare l'orientazione attuale del loro magnetismo, si deve ricorrere anche alla secolare azione induttrice della Terra sulle rocce già fredde.

« I tufi e le pozzolane sono generalmente originate dalle ceneri vulcaniche, che durante un'eruzione vengono lanciate ad enorme altezza, e che poi vengono dal vento trasportate a distanze, che talvolta superano il centinaio di chilometri ⁽¹⁾. È poco ammissibile che queste ceneri vulcaniche si siano conservate, durante tutto il tempo che rimasero in balia del vento in regioni relativamente fredde, ad una temperatura sufficientemente alta, perchè dopo depositate abbiano potuto subire la calamitazione, dirò così, istantanea; nè è possibile, che se esse furono magnetizzate dall'azione induttrice della Terra ancor quando si trovavano nell'aria a temperatura alta, si siano poi cadendo depositate tutte in modo così uniforme da costituire una calamita: a maggior ragione poi non è possibile attribuire all'induzione del magnetismo terrestre durante il periodo di raffreddamento, in epoca quindi poco posteriore all'eruzione, l'orientazione attuale del magnetismo nelle rocce che provengono dal trasporto e deposito delle acque: chi sa quante volte per il rimescolamento delle ceneri è stato distrutto ed orientato diversamente il loro magnetismo.

« È necessario come ben si vede, ammettere che alcune specie di rocce vulcaniche, non hanno una forza coercitiva così grande come la lava del Ve-

(1) Si ha una prova di ciò nel fatto, che talvolta trovansi dei giacimenti più o meno considerevoli di rocce vulcaniche a distanze grandissime dal focolare eruttivo. Così per esempio nei dintorni di Roma, a Scureola, nel bacino del Fucino ed a Papigno trovansi dei banchi di pozzolana; e questi luoghi son ben distanti dai vulcani.

suvio, ma che in esse tale forza ha ceduto all'azione continuata dell'induzione terrestre: in caso contrario l'orientazione attuale del loro magnetismo sarebbe inesplicabile. Del resto vi sono dei fatti, che danno valore a quest'ipotesi: dalle mie ricerche più sopra riportate risulta, che 3 fra le sei colonnette di peperino tenute rovesciate hanno perduto completamente il loro magnetismo dopo soli 3 mesi, dacchè furono staccate dalla roccia: dal prof. Keller ⁽¹⁾ ebbi un frammento di tufo terroso formato entro una fessura naturale di un giacimento di pozzolana presso il ponte della Foce sulla strada Tivoli-Zagarolo. L'origine di questo tufo è dovuta alla terra tufacea sovrapposta alla pozzolana, che per l'azione delle acque andò riempiendo gradatamente la fenditura. Quel frammento fu trovato calamitato come al solito col polo Nord alla parte inferiore e col polo Sud alla parte superiore; e qui non può cader dubbio che quel tufo si sia ricomposto lì dentro in tempi relativamente recenti rispetto all'epoca dell'eruzione.

« Come si vede da questi esempi non si deve prendere come regola fissa, che la calamitazione delle rocce abbia avuto luogo prima del loro completo raffreddamento, ma in molti casi bisogna ammettere, che la calamitazione ha avuto luogo a freddo. Io ho voluto insistere su questo punto per mostrare che non vi è motivo di concludere, che la regolare orientazione del magnetismo nei tufi, pozzolane e peperino si possa ritenere come un indizio, che tali rocce si trovino ora, ove originariamente caddero le ceneri vulcaniche di cui sono formate.

« Una questione che ancora non è stata risolta, e che io pure lascierò senza tentare di darne una spiegazione, è quella della formazione dei punti distinti nelle lave.

« Colla *Guida itineraria* del prof. Keller ⁽²⁾ ritrovai molti punti distinti da lui descritti, ed esaminai l'orientazione del loro magnetismo. Mi resi così persuaso che non era possibile stabilire per essi una relazione qualsiasi colla direzione del campo terrestre. Voglio qui riportare due soli esempi assai caratteristici. Il blocco con punto distinto presso il ponte Buttero ha superiormente una superficie quasi piana ed orizzontale: a press'a poco nel mezzo di questa trovasi un punto distinto Nord: nella penultima grande cava a sinistra della via Appia Antica a circa km. 4,6 dalla Porta S. Sebastiano ho trovato un punto distinto Sud a circa cm. 40 dalla base di una parete di lava alta circa m. 9; questo punto distinto è venuto alla luce forse un anno fa in seguito all'escavazione della selce: non è possibile spiegare la sua formazione neppure coll'azione delle scariche elettriche dell'atmosfera; e se quest'ipotesi può valere per i punti che si trovano in cima ad alture, e che possono per la loro ubi-

(1) Devo ringraziare vivamente il chiarissimo prof. Keller dei molti favori e consigli, di cui mi è stato largo nel condurre a termine questo mio lavoro.

(2) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. VI, 2° sem., 1890, pag. 17.

cazione venire facilmente fulminati, non è ammissibile per questo punto nè per altri pochi, che trovansi in simili condizioni.

« Non sembra probabile neppure, che l'ipotesi di una diversa costituzione chimica e mineralogica e di proprietà fisiche diverse sia sufficiente a spiegare la formazione di questi punti distinti, che occupano una regione talvolta pochissimo estesa in mezzo ad una massa rocciosa assai grande originata tutta in modo uniforme e che ha ovunque lo stesso aspetto.

« *Conclusione.* — Da quanto ho esposto risulta:

« 1° Tutte le rocce vulcaniche del Lazio esaminate posseggono una certa quantità di magnetismo indotto dalla Terra, che come nel ferro dolce, sebbene più lentamente, varia di posizione col variare l'orientazione delle rocce.

« 2° Tutte le rocce vulcaniche in parola posseggono una certa quantità di magnetismo permanente, che in generale è distribuito come se fosse dovuto all'induzione terrestre. Nella lava basaltina, sperone, tufo e pozzolana ed in generale nelle rocce fortemente calamitate la quantità di magnetismo permanente è di gran lunga maggiore di quella di posizione. Nelle rocce invece debolmente magnetiche, come il peperino, il magnetismo temporaneo può essere in quantità maggiore del magnetismo permanente, e forse questo talvolta nel vero senso della parola non esiste.

« 3. Tutte le rocce vulcaniche sono dotate di forza coercitiva come l'acciaio, ma in grado assai diverso: nelle lave essa ha impedito, che si rovesci anche dopo molti secoli il magnetismo in origine indotto dalla Terra; nelle pozzolane tufi ecc., la forza coercitiva è in grado minore, ed in molti casi il magnetismo in origine indotto dalla Terra è stato certamente rovesciato. Nel peperino tale forza è in grado assai piccolo.

« 4. Il magnetismo delle rocce vulcaniche (se si eccettuano i punti distinti) è dovuto unicamente all'azione induttrice della Terra. Talvolta come nelle lave tale azione è stata assai rapida, mentre esse trovavansi ancora a temperatura elevata; talvolta tale azione ha dovuto agire forse per molti secoli ed a freddo.

5. Il modo in cui si sono formati i punti distinti non è ancora noto. Le ipotesi finora emesse non spiegano l'origine di tutti questi punti ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 6 agosto al 2 settembre 1894.

- D'Achiardi G.* — Rocce eruttive del Bacino Boratifero di Sultan-Tchair. Pisa, 1894. 8°.
- Arcangeli G.* — La flora italiana. 2ª ediz. Torino, 1894. 8°.
- Atti del primo Congresso geografico italiano tenuto in Genova dal 18 al 25 settembre 1892. Vol. I, 1, 2; II, 1. Genova, 1894. 8°.
- Baculo B.* — Nouvelles recherches sur les Centres thermiques au sujet de la thermo-dynamique. Naples, 1894. 8°.
- Id.* — Saggi sperimentali sui centri termici in alcuni pecilotermi. Napoli, 1894. 4°.
- Centénaire de la fondation du Muséum d'histoire naturelle 10 juin 1793 a 10 juin 1893. Volume commémoratif publié par les professeurs du Muséum. Paris, 1893. 4°.
- Feliu y Perez B.* — Influencia de la filosofía en la constitución de la física. Barcelona, 1894. 8°.
- Langley S. P.* — The internal Work of the Wind. Washington, 1893. 4°.
- Massalongo C.* — Nuova contribuzione alla micologia veronese. Genova, 1894. 8°.
- Palazzo L.* — Un piccolo magnetometro da viaggio per lo studio delle perturbazioni magnetiche locali. Roma, 1894. 4°.
- Prestwich J.* — On the evidences of a submergence of western Europe, and of mediterranean coasts, at the close of the glacial or so called post-glacial period, and immediately preceding the neolithic or recent period. London, 1893. 4°.
- Romiti G.* — Sopra la incompiutezza dell'arco zigomatico di un cranio umano notevole per altre varietà. Pisa, 1894. 8°.
- Statuto organico e regolamento della R. Scuola navale Superiore in Genova. Genova, 1894. 8°.
- Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures. T. X. Paris, 1894. 4°.
- Verson E.* — Zur Spermatogenesis bei der Seidenraupe. Leipzig, 1894. 8°.
- Virchow R.* — Morgagni und der anatomische Gedanke. 2° Aufl. Berlin, 1894. 8°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 16 settembre 1894.

Chimica. — *Il paraxilene quale solvente nelle ricerche crioscopiche.* Nota del Socio E. PATERNÒ e del dott. C. MONTEMARTINI.

« Nella Nota sui mutamenti di volume nei miscugli dei liquidi abbiamo accennato, che allo scopo di poter fare le esperienze a 0°, ci eravamo proposti di sostituire alla benzina il toluene. Era però necessario prima di tutto di assicurarci se rispetto al toluene le sostanze di varia funzione chimica avessero presentato lo stesso comportamento che presentano con la benzina. Ed essendo impossibile adoperare il toluene come solvente nelle ricerche crioscopiche, perchè esso si mantiene liquido a bassa temperatura, abbiamo voluto esaminare qualche altro omologo della benzina, sembrandoci che ove gli omologhi della benzina si fossero comportati in modo analogo, non vi era ragione per ammettere che il solo toluene facesse eccezione.

« Il primo idrocarburo scelto a questo scopo fu la paradimetilbenzina, che per il suo punto di fusione nè troppo alto, nè troppo basso e per il suo esteso potere solvente, presentava tutti i requisiti di ottimo solvente nella crioscopia.

« Il paraxilene si fonde a 16°; il suo calore latente di fusione determinato da Colson è stato trovato 39,3, onde con la formula di van t'Hoff $m = G \frac{p}{A}$ si calcola che la costante dell'abbassamento molecolare deve essere eguale a 42,5.

« Il *p*-xilene da noi adoperato proveniva dalla fabbrica di Kahbaum. Prima di adoperarlo lo abbiamo distillato sul sodio e presentava punto di ebollizione costante. Il suo punto di congelamento fu trovato a 13°,23; purificandolo per cristallizzazione, secondo ogni probabilità, avremmo potuto

ottenere un prodotto a punto di congelamento più elevato, ma le considerevoli perdite di prodotto che si hanno in queste operazioni, ed il prezzo del paraxilene ci consigliarono ad impiegarlo tal quale, tanto più che per lo scopo da noi prefissoci non era indispensabile l'assoluta purezza del prodotto.

« I risultati ottenuti sono compresi nelle seguenti tavole:

I. Sostanze varie.

Num. d'ordine	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare
<i>Benzina</i> , P. m. = 78.				
1	0,491	0,265	0,539	42,04
2	1,066	0,60	0,562	43,84
3	1,812	1,01	0,556	43,37
4	2,945	1,64	0,556	43,37
5	3,708	2,04	0,550	42,90
6	4,569	2,47	0,540	42,12
7	5,426	2,88	0,531	41,42
8	6,151	3,265	0,531	41,42
9	6,958	3,645	0,523	40,79
<i>Naftalina</i> , P. m. = 128.				
10	0,825	0,32	0,388	49,66
11	2,179	0,80	0,364	46,59
12	6,560	2,12	0,323	41,34
13	12,207	3,87	0,317	40,53
41	24,284	7,12	0,293	39,50
<i>Difenile</i> , P. m. = 154.				
15	0,933	0,38	0,407	61,48
16	1,853	0,535	0,288	44,38
17	4,381	1,26	0,287	44,20
<i>Fenantrene</i> , P. m. = 178.				
18	0,639	0,23	0,360	64,08
19	1,246	0,37	0,296	52,69
20	3,186	0,83	0,260	46,28
21	6,235	1,55	0,248	44,14

Num. d'ordine	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare
<i>Ossalato dietilico</i> , P. m. = 146.				
22	0,657	0,18	0,274	40,00
23	1,546	0,49	0,316	46,14
24	2,959	0,90	0,304	44,38
25	4,341	1,27	0,292	42,63
26	5,933	1,65	0,278	40,59
27	7,619	2,07	0,271	39,57
28	9,341	2,47	0,264	38,54
29	11,947	3,06	0,256	37,38
30	13,695	3,44	0,251	36,65
<i>Anidride acetica</i> , P. m. = 102.				
31	0,743	0,35	0,471	48,04
32	1,841	0,77	0,418	42,64
33	4,333	1,585	0,366	37,33
34	8,435	2,755	0,326	33,25
35	12,809	3,82	0,298	30,40
36	21,067	5,40	0,256	26,11
<i>Pirrolo</i> , P. m. = 67.				
37	1,251	0,795	0,635	42,54
38	2,697	1,60	0,509	34,10
39	3,912	2,195	0,506	33,60
40	6,512	3,33	0,511	34,24
<i>Tiofene</i> , P. m. = 84.				
41	0,573	0,32	0,558	46,87
42	1,376	0,77	0,537	45,11
43	2,417	1,27	0,525	44,10
44	3,624	1,84	0,507	42,59
45	5,663	2,805	0,495	41,58
46	7,731	3,78	0,489	41,08

II. Alcaloidi.

Num. d'ordine	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare
<i>Anilina</i> , P. m. = 93.				
47	0,592	0,28	0,473	43,99
48	1,628	0,80	0,491	45,66
49	2,683	1,225	0,456	42,41
50	3,662	1,61	0,439	40,83
51	4,633	2,91	0,412	38,32
52	6,285	2,54	0,404	37,57
53	7,997	3,09	0,399	37,11
54	9,309	3,53	0,379	35,25
55	10,698	3,89	0,363	33,76
<i>Piridina</i> , P. m. = 79.				
56	0,488	0,265	0,543	42,90
57	0,955	0,54	0,565	
58	1,805	0,955	0,529	41,79
59	2,800	1,43	0,511	40,37
60	3,677	1,86	0,506	39,97
61	4,722	2,335	0,490	38,71
62	5,572	2,755	0,494	39,03
63	6,460	3,145	0,486	38,39
64	7,528	3,625	0,481	38,00
65	8,684	4,07	0,468	36,97
<i>Piperidina</i> , P. m. = 85.				
66	0,564	0,27	0,461	29,18
67	1,054	0,50	0,474	40,29
68	1,765	0,86	0,487	41,39
69	2,707	1,315	0,485	41,22
70	3,757	1,81	0,482	40,97
71	4,880	2,31	0,472	40,20
72	6,202	2,85	0,459	39,01
73	7,124	3,25	0,456	38,76
74	8,459	3,80	0,449	38,16
<i>Conina</i> , P. m. = 127.				
75	0,718	0,26	0,362	45,97
76	1,540	0,545	0,354	44,96
77	4,023	0,35	0,335	42,54
78	6,805	0,275	0,334	42,42
79	9,936	0,18	0,321	40,77

Num. d'ordine	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare
<i>Tribenzilamina</i> , P. m. = 287.				
80	0,872	0,145 ^o	0,166	47,64
81	4,366	0,68	0,155	44,48
82	7,849	1,195	0,150	43,03
83	13,029	1,945	0,140	42,76
84	24,282	3,52	0,145	41,61
III. Alcoli.				
<i>Alcool etilico</i> , P. m. = 46.				
85	0,310	0,27 ^o	0,871	40,06
86	1,231	0,77	0,625	28,75
87	2,496	1,165	0,623	28,66
88	4,022	1,47	0,365	16,76
89	7,772	1,99	0,256	11,77
90	15,715	2,73	0,173	7,96
91	26,503	3,395	0,128	5,85
<i>Alcool isobutilico</i> , P. m. = 74.				
92	0,364	0,21 ^o	0,577	42,70
93	1,001	0,525	0,524	38,78
94	2,317	0,98	0,426	31,52
95	4,523	1,465	0,324	23,98
96	11,038	2,445	0,221	16,35
97	23,395	3,67	0,156	11,54
<i>Trimetilcarbinol</i> , P. m. = 74.				
98	0,449	0,24 ^o	0,534	39,52
99	1,455	0,705	0,484	35,82
100	3,092	1,21	0,391	28,93
101	4,127	1,45	0,351	25,97
102	6,385	1,91	0,299	22,13
103	9,463	2,47	0,261	19,31
104	14,631	3,22	0,220	15,28
105	18,754	3,76	0,200	14,80
106	38,266	5,945	0,155	11,47

Num. d'ordine	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare
<i>Etere dietitico della glicerina, P. m. = 148.</i>				
107	0,471	0,18	0,382	56,53
108	1,924	0,59	0,306	45,29
109	3,475	0,865	0,249	36,85
110	7,023	1,60	0,228	33,74
111	9,691	2,02	0,208	30,78
112	14,068	2,71	0,192	28,42
113	19,052	3,38	0,177	26,20
114	26,609	4,33	0,163	24,02
<i>Alcool benzoico, P. m. 108.</i>				
115	0,445	0,20	0,449	48,49
116	2,084	0,79	0,383	41,36
117	3,503	1,02	0,291	31,43
118	6,811	1,54	0,226	24,41
119	10,844	1,985	0,183	19,76
120	14,187	2,325	0,164	17,71
121	18,136	2,66	0,147	16,88
122	25,912	3,25	0,125	13,50
IV. Acidi.				
<i>Acido acetico, P. m. = 60.</i>				
123	0,767	0,32	0,417	25,62
124	1,221	0,46	0,377	22,62
125	2,151	0,78	0,362	21,72
126	3,371	1,335	0,350	21,00
127	5,161	1,74	0,337	20,22
128	6,926	2,25	0,324	19,44
129	8,311	2,61	0,314	18,84
130	10,948	3,14	0,289	17,34
131	11,928	3,54	0,296	17,76
132	14,250	4,11	0,281	16,68
<i>Acido benzoico, P. m. = 122.</i>				
133	0,626	0,16	0,255	31,11
134	1,242	0,25	0,201	24,52
135	3,023	0,59	0,195	23,79
136	6,092	1,00	0,164	20,01

Num. d'ordine	Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare
<i>Acido stearico</i> , P. m. = 284.				
137	1,199	0,145	0,129	36,64
138	2,421	0,22	0,091	25,84
V. Fenoli.				
<i>Fenol ordinario</i> , P. m. = 94.				
139	1,251	0,55	0,439	41,27
140	2,765	1,115	0,403	37,88
141	4,874	1,745	0,358	33,65
142	6,813	2,26	0,332	31,21
143	9,759	2,865	0,293	27,54
144	13,117	3,44	0,262	24,63
145	19,235	4,245	0,221	20,77
146	25,094	5,03	0,200	18,80
147	34,051	5,925	0,172	16,17
<i>Timol</i> , P. m. — 150.				
148	1,116	0,34	0,304	45,60
149	2,092	0,615	0,294	44,10
150	3,151	0,925	0,290	43,50
161	5,589	1,53	0,273	40,95
152	10,227	2,57	0,251	37,65
153	15,341	3,62	0,235	35,25
154	23,212	5,125	0,220	33,00
155	39,335	7,635	0,194	29,10
156	48,335	8,805	0,120	18,00
<i>Salicilato metilico</i> , P. m. — 152.				
157	0,732	0,225	0,302	45,90
158	2,529	0,77	0,304	46,21
159	4,473	1,34	0,299	46,45
160	6,443	1,84	0,285	43,32
161	8,343	2,29	0,274	41,65
162	10,533	2,78	0,264	40,13
163	12,330	3,23	0,261	39,67
164	14,836	3,84	0,259	39,37

« Basta un esame, anche superficiale, dei risultati che precedono per scorgere che lo xilene, come solvente nelle ricerche crioscopiche, ha un comportamento perfettamente simile a quello della benzina, quale è stato provato dalle ricerche pubblicate da uno di noi nel 1889 e confermato da quelle più recenti di K. Auwers ⁽¹⁾. Gli idrocarburi, gli eteri, le anidridi ed in generale le sostanze neutre si comportano in modo normale; similmente si comportano gli alcaloidi. Gli acidi danno invece un abbassamento molecolare circa metà del normale. Gli alcoli danno un abbassamento normale o quasi in soluzioni diluite, che però diminuisce rapidamente con la concentrazione, ed i fenoli presentano, ma molto meno pronunziato, lo stesso comportamento degli alcoli. Soltanto il tiofene e il pirrolo si comportano in modo diverso che nella benzina; perchè mentre nella benzina danno risultati anormali, come è stato provato da uno di noi per il primo ⁽²⁾ e da Magnanini ⁽³⁾ per il secondo, nello xilene si comportano affatto normalmente.

« Ma questa differenza non solo non è argomento a provare una diversità nel comportamento crioscopico generale fra benzina e xilene, ma è anzi una nuova prova della loro analogia.

« Ed invero le esperienze di Garelli ⁽⁴⁾ e di Garelli e Ferratini ⁽⁵⁾ hanno provato che le anomalie presentate dal tiofene, dal pirrolo e dalla piridina sono dovute alla analogia di costituzione fra queste sostanze e la benzina che si esplica nel fatto che esse cristallizzano insieme,

« E nella stessa guisa che gli omologhi del pirrolo si comportano in modo diverso del pirrolo ⁽⁶⁾, è chiaro che la dimetilbenzina deve in questo caso comportarsi in modo diverso della benzina.

« Ma la perfetta analogia del comportamento della benzina e del paraxilene, quali solventi nelle ricerche crioscopiche, non si svela solo nel comportamento generale delle sostanze di diversa funzione chimica, essa si manifesta nell'esame più minuto del comportamento delle singole sostanze. Ed in vero:

a) Per gli alcoli indistintamente l'abbassamento molecolare decresce rapidamente con la concentrazione. Per l'alcool etilico nella benzina si riduce ad $\frac{1}{6}$ circa (da 46,46 a 7,86) per una variazione di concentrazione da 0,3 a 23 %, e per lo xilene per una concentrazione da 0,3 al 26 % si riduce similmente da 40,06 a 5,85. Per il trimetilcarbinol nella benzina per una concentrazione variabile da 6,39 a 9,87 l'abbassamento molecolare si riduce da 48 a 28, e nello xilene per una concentrazione variabile da 0,45 a 9,46 si riduce da 39,5 a 19,3, cioè presso a poco nelle stesse proporzioni. Per l'alcool

(1) Zeits. f. phy. Chemie t. XII, p. 689.

(2) Gazz. chimica 1879, p. 666.

(3) Gazz. chimica 1889, p. 142.

(4) Gazz. chimica 1893, p. 334.

(5) Gazz. chimica 1892, p. 243 e 1893, p. 442.

(6) Gazz. chimica 1889, p. 141. — Magnanini per gli N derivati.

benzoico da 40,82 per una concentrazione di circa 1 % si riduce nella benzina a 19,55 per la concentrazione di 20,69 %; e nello xilene da 41,36 per la concentrazione del 2 % si riduce a 15,88 per una concentrazione del 18 % circa.

b) Per i fenoli nella benzina si osserva che l'anomalia più pronunziata si manifesta nel fenol ordinario, mentre che negli omologhi l'andamento si va avvicinando sempre più al normale, ed il salicilato metilico ha un comportamento che può dirsi affatto normale. Lo stesso avviene per lo xilene. L'abbassamento molecolare pel timol nella benzina da 50 scende a 40 per una concentrazione che varia da 1,28 a 17,70, e nello xilene da 45 scende a 35 per una variazione di concentrazione presso a poco corrispondente. Pel salicilato metilico nello xilene da 45 si riduce a 39 per una variazione di concentrazione da meno dell'1 % a circa il 15 %.

c) Per gli acidi nello xilene come nella benzina si ha che gli abbassamenti molecolari sono circa metà dal normale in soluzioni diluite, e subiscono una diminuzione con l'aumento della concentrazione.

d) Gli alcaloidi si comportano comparati uno ad uno in modo perfettamente corrispondente nella benzina e nello xilene. Così l'abbassamento molecolare per l'anilina nella benzina da 46,41 va a 35,96 (conc. 0,88 a 10,65) e nello xilene da 43,99 a 33,76 (da 0,59 a 10,69). Per la piridina da 45 a 40 (conc. da 2,49 a 12,34) nella benzina, e da 40,37 a 36,97 (da 2,8 a 8,6). La tribenzilammina invece che nella benzina da 53,57 scende soltanto a 51,67 (1,29 a 14) nello xilene passa corrispondentemente da 42,48 a 41,65 (1,31 a 24,28 %).

« La perfetta analogia fra questi comportamenti si scorge meglio dallo esame delle curve.

« In quanto al numero da scegliersi come costante dell'abbassamento molecolare nel paraxilene, come abbiamo detto in principio dalla formula di van t'Hoff si calcola il numero 42,5 per uno xilene fusibile a 16°.

« Dalle esperienze fatte si deduce un numero un poco superiore.

« È chiaro che il numero sperimentale non può dedursi dal comportamento degli alcoli, dei fenoli e degli acidi, e che anche per le sostanze che si comportano in modo normale bisogna scegliere le esperienze più appropriate per dedurre la media, cioè quelle in cui l'abbassamento termometrico non è inferiore di 0°,5, nè maggiore di 2°.

			media
Benzina.	Esp. 2, 3, 4 e 5	(0°, 6 — 2, 04)	43,37
Naftalina	11,12	(0°, 8 — 2, 12)	43,96
Difenile	16,17	(0°, 53 — 1, 26)	44,27
Ossalato etilico	23 a 27	(0°, 49 — 2, 07)	42,66
Tiofene	42 a 44	(0°, 74 — 1, 84)	43,93
Anilina	48 a 51	(0°, 8 — 1, 91)	41,80
Tribenzilammina	82 a 84	(0°, 68 — 1,945)	43,43
<hr/>			
			43,84 media generale

« Come si vede la differenza fra l'abbassamento molecolare calcolato e quello fornito dalle esperienze è molto piccola, e minore a quella che è stata trovata in altri casi. Noi crediamo che per il paraxilene possa scegliersi 43, ed è in base a questo numero che abbiamo calcolato i pesi molecolari segnati nelle tavole ».

Fisica. — *La legge degli stati corrispondenti e i metodi di misura degli elementi critici.* Nota del dott. GIULIO ZAMBIASI, presentata dal Socio BLASERNA.

« È noto che il teorema della corrispondenza termodinamica nei corpi, dedotta dalle equazioni caratteristiche più o meno approssimate che ne rappresentano gli strati fisici, sussiste indipendentemente dalla forma vera di quelle equazioni, per le molteplici verificazioni fatte da Van der Waals fino a Sydney Ioung e Matthias. Ma se la dimostrazione di quella legge non riceve la sua forza da equazioni che senza dubbio rappresentano imperfettamente gli stati fisici; finora però non ne conserva la generalità. Infatti le verificazioni relative alle densità dei liquidi e dei loro vapori saturi di Sydney Ioung (Phil. Mag.) e le eleganti discussioni di Matthias mostrano che il teorema non è applicabile a tutti i corpi presi in blocco, ma solo a gruppi, e che non quadra egualmente bene allo stato di vapore come al liquido. Ora io nel discutere le mie esperienze di quest'anno osservai un fatto che sembra rendere possibile il confronto generale dei corpi; e così mi persuasi che il difetto di generalità di quel teorema debba attribuirsi a indeterminatezza di metodo di misura degli elementi critici che è causa di notevole discrepanza tra i numeri dati da insigni sperimentatori. Basta leggere i lavori di Battelli, Heen e Galitzine per riconoscere la tendenza che li sprona ad un modo preciso di sperimentare e di concepire lo stato critico. Proseguendo l'ordine di idee già esposte (Rend. dell'Acc. dei Lincei ser. 5^a, vol. II, 1° sem., fasc. 1) mi proposi due questioni da risolvere sperimentalmente, che sono la traduzione in pratica delle conclusioni teoriche: 1° Ad una data quantità di etere qual volume deve assegnarsi quando si vogliono fare le misure degli elementi critici? poichè è indubitato che un volume può mutare più d'un sesto di sua grandezza presentando sensibilmente gli stessi fenomeni con identica quantità di etere. 2° Scelto il volume qual indizio dev'essere ritenersi di stato critico; la sparizione del menisco, quella della strozzatura, quella delle strie o altro fenomeno? poichè è certo che avvengono a diverse temperature.

« Per rispondere intanto alla prima questione ho cercato l'andamento delle due densità d e d' , e del rapporto dei volumi v e v' del liquido e del

suo vapore in un tubo di Naterer e la rispettiva dipendenza. Il primo per mezzo del diametro delle densità da modo assai semplice di calcolare gli elementi critici, e il secondo è fenomeno che si segna col catetometro e non è soggetto alle illusioni degli indizi ottici. Queste esperienze hanno il vantaggio d'avere esteso il campo delle misure, perchè oltre diversi tubi semplici di Naterer, usai un tubo munito d'un regolatore di volumi che mi permetteva di assegnare ad una data quantità di etere quel volume che mi piaceva ad ogni temperatura e con grande celerità manovrando la vite di pressione. Così era eliminata la difficoltà della opportuna costruzione dei tubi, e i dubbii che si potevano opporre alla possibilità di confrontarli. Lasciando per ora la descrizione dell'apparecchio e del modo di preparare gli esperimenti (nel che ho tenuto conto dei dettami degli insigni sperimentatori e della mia esperienza) espongo subito il modo di procedere.

« Ho costruito una dozzina di tubi di Naterer di lunghezza media 20 cm., di diametro interno parte di 3 mm. parte di 5 mm.; ed ho introdotto diverse quantità di etere preparato dall'illustre Pictet. I primi numeri della tabella A segnano i rapporti iniziali che caratterizzano i tubi dei quali riferisco. Col catetometro seguiva la posizione del menisco mentre riscaldava lentamente ciascun tubo fino alla sparizione del menisco, e per alcuni anche mentre raffreddavano fino alla temperatura della camera. Riguardando il rapporto $v:v'$ posso dire di avere cimentate diverse quantità di etere in uno stesso tubo. Viceversa ho cimentato una stessa identica quantità di etere in tubi di diversa grandezza per mezzo del regolatore dei volumi: perchè fissava inizialmente una certa posizione del menisco del mercurio, e per ognuna ripeteva l'operazione sovrindicata. Questo secondo modo si presta al calcolo delle densità senza riduzioni all'unità di volume o di massa, poichè si può considerare come unità di massa quella inchiusa. Perciò i numeri della tabella B danno le proporzionali alle medie delle densità avendo il fattore costante $\frac{1}{m}$. Ecco un semplice sunto dei risultati raccolti nelle tabelle.

TABELLA A. — *Dei rapporti.*

I		II		III		IV		V		VI		VII	
t°	$\frac{v}{v'}$	t°	$\frac{v}{v'}$	t°	$\frac{v}{v'}$	t°	$\frac{v}{v'}$	t°	$\frac{v}{v'}$	t°	$\frac{v}{v'}$	t°	$\frac{v}{v'}$
iniz.	0,803	iniz.	0,64	iniz.	0,608	iniz.	0,559	iniz.	0,499	iniz.	0,466	iniz.	0,387
130°	1,059	50°	0,678	130°	0,781	120°	0,721	50°	0,518	132°	0,603	50°	0,407
139	1,140	84	0,741	143,5	0,822	141,1	0,757	88	0,562	145	0,617	80	0,428
146,2	1,21	115	0,82	151	0,843	150	0,775	109	0,588	150	0,620	95	0,44
150	1,259	180,5	0,871	158	0,869	162,5	0,808	136	0,629	159,6	0,628	130	0,461
162,7	1,406	150	0,95	162,9	0,892	164	0,812	145	0,64	171	0,631	160	0,467
170,2	1,542	170,2	1,07	171	0,932	178,8	0,868	156,3	0,661	182	0,638	179	0,450
178,1	1,739	186	1,29	175,5	0,961	181	0,877	165	0,672	123	0,645	185	0,43
184	2,078	190	1,45	180	0,999	183,5	0,889	180	0,702	185	0,633	190	0,408
189,2	2,239	191,3	1,50	185,7	1,078	189,5	0,951	187,3	0,719	190	0,611	196	0,375
192	2,500	193,2	1,766	190,2	1,202	190,4	0,974	190	0,73	190,8	0,613	181	0,24
193,1	3,07	192	1,24	192	1,296	191,8	1,008	194,5	—	191,4	0,587	176	0,357
—	—	186	1,07	193	1,381	193,2	1,05	189	0,41	193	0,570	175	0,376
—	—	175,2	0,99	193,7	1,447	193,7	1,08	188	0,465	194	0,561	168	0,418
—	—	166	0,95	—	—	194	1,083	186	0,518	194,4	0,538	164	0,428
—	—	137	0,857	—	—	—	—	183	0,562	—	—	150	0,45
—	—	110	0,82	—	—	—	—	174	0,615	—	—	140	0,458
—	—	100	0,789	—	—	—	—	163	0,629	—	—	131	0,4571
—	—	—	—	—	—	—	—	145	0,615	—	—	115	0,450
—	—	—	—	—	—	—	—	134	0,631	—	—	—	—

« Ho portato sull'asse delle ordinate i rapporti e su quello delle ascisse le temperature corrispondenti. Le curve continue sono costruite sulle misure prese nell'innalzamento della temperatura; le tratteggiate sono curve di ritorno prese nella caduta della temperatura. Le curve di ritorno appartengono alla II, alla V e alla VII.

TABELLA B. — *Dei diametri delle densità.*

I		II		III		IV		V		VI		VII	
t°	$\frac{d+d'}{2m}$	t°	$\frac{d+d'}{2m}$	t°	$\frac{d+d'}{2m}$	t°	$\frac{d+d'}{2m}$	t°	$\frac{d+d'}{2m}$	t°	$\frac{d+d'}{2m}$	t°	$\frac{d+d'}{2m}$
179°	0,00831	177°	0,00860	175°	0,00868	180°	0,00857	178,5	0,00842	180°	0,00841	180°	0,00831
181	843	181	849	181	849	181	851	180,4	838	181,5	838	181,1	824
186,6	861	184,5	850	184,3	834	185	835	181	834	183,2	83	184,5	806
188,2	870	186	846	186,6	831	187,3	825	183,5	833	185	825	187,4	791
190	877	190	849	190	829	189,2	823	186	831	188,1	811	190	77
191,2	8795	191,7	852	192,2	828	190,7	819	188	824	190	805	191,8	766
192,9	887	194	850	193,5	825	192	813	190,8	807	191,7	801	192,5	764
193,5	8917	—	—	194,4	821	193,1	810	193,1	794	192,4	794	103,1	759
—	—	—	—	—	—	193,8	807	—	—	192,9	791	103,8	754
—	—	—	—	—	—	194,4	804	—	—	193,3	792	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	193,6	791	—	—

Esse in generale non coincidono colle prime se non a temperature assai lontane dalla temperatura di sparizione. Gli estremi delle tratteggiate non segnano i punti di apparizione, perchè non era possibile cogliere col catetometro il menisco in quell'istante essendo assai più celere il moto di ascesa o discesa che nello sparire. Anzi pare che la superficie di separazione nell'apparire si stacchi dalle estremità del tubo quando è mantenuto omogeneo il suo riscaldamento, se ne eccettuano i valori prossimi alla V curva. Questa presenta una biforcazione perchè vicino allo sparire ora avea moto di ascesa ora di discesa. Ho pure osservato che a 191° calava bruscamente e poi risaliva per scomparire, fenomeno analogo a quello della sopraffusione. Probabilmente il massimo di questo rapporto è assai vicino alla sparizione. I massimi M_1 , M_2 delle curve VI e VII si vanno scostando dalla temperatura di sparizione col diminuire del rapporto. Analogamente le curve di ritorno hanno massimi M'_1 , M'_2 che però non coincidono coi primi. La curva AB (dei numeri sottosegnati) è linea dei rapporti di sparizione di cui mantengo solo l'andamento, ma non insisto sulla forma volendo tornarci sopra di proposito nel rispondere al secondo quesito, tanto più che vi sono delle divergenze da comporre con Battelli, con Heen e con Galitzine. La prima curva probabilmente è assintotica all'ordinata del punto 193°,1 perchè il menisco scomparve solo a celere riscaldamento, laddove a lento riscaldamento saliva all'estremità superiore del tubo. Sicchè pare che il rapporto iniziale 0,803 superi il limite possibile per la sparizione. Si vede che mentre il rapporto iniziale non va che da 0,80 a 0,38, a 190° oscilla da 0,4 a 2,25; cioè il menisco tende a sparire in ogni sezione del tubo.

« Quanto al diagramma B, osservo che io intendeva costruire la solita parabola delle densità e quindi un unico diametro; ma ognuno vede che non è possibile fare la media di tali numeri quali si osservano nella tavola B.

I valori $\frac{d+d'}{2m}$ portati sull'asse delle ordinate furono calcolati colle formole:

$$d = \frac{m(v' - v_1')}{v_1 v' - v v_1'}, \quad d' = \frac{m(v_1 - v)}{v_1 v' - v v_1'}$$

dedotte dalla equazione $vd + v'd' = m$, che col mutare di v in v_1 e v' in v_1' diviene $v_1 d + v_1' d' = m$ ad una stessa temperatura, donde si ricavano le densità in funzione dei volumi del liquido e del vapore. È da notarsi che i diametri oltre ad uno spostamento traslatorio presentano un notevole spostamento angolare, e inoltre il V è curvilineo colla concavità verso le ascisse e anche il II a rigore sarebbe curvilineo come appare dalla tabella, colla convessità verso l'asse delle ascisse.

Osservazioni: Il fatto che prima richiama l'attenzione è il non coincidere delle curve di ritorno colle curve di ascesa nella tavola A; il che significa che in generale non è fenomeno reversibile quello della sparizione.

Galitzine (Ann. der Ph. und Ch. Neue Folge, Band 50, p. 540, 1893) ed Heen sott'altra forma confermano dicendo che le densità non sono funzione della sola temperatura, sicchè nè le densità, nè i volumi, nè le tensioni prendono gli stessi valori ad una stessa temperatura. D'altra parte la forma delle curve esige l'esistenza d'un rapporto il cui massimo sarebbe al punto di sparizione e la cui linea sarebbe una retta che divide il campo in due regioni: una inferiore per le curve dotate di massimo e colla cavità rivolta all'asse delle ascisse, una superiore delle curve senza massimo e minimo colla convessità verso le ascisse. Per quel rapporto limite, pure la linea di ritorno sarebbe retta e coinciderebbe; sicchè in quel caso il fenomeno sarebbe reversibile e sarebbe caso normale. In conferma osservo che si possono impieciare le variazioni dei rapporti ad una stessa temperatura, mantenendola costante per qualche tempo prima di misurare, affinchè si stabilisca l'equilibrio dinamico. Analogamente osservai che se non si manovra colla pompa assai lentamente, il menisco prosegue a spostarsi anche cessando di operare; il che fa supporre che il lavoro interno vicino alla sparizione sia assai più che non richiede il solo passaggio degli stati fisici e favorisce l'ipotesi ora in voga delle azioni intermolecolari. È cosa notevole che il punto d'incontro della retta limite colla linea di sparizione può ottenersi facilmente conducendo la linea dei massimi $M_1 M_2$. Il valore del rapporto limite alla sparizione è calcolato da Amagat vicino a 0,8, il mio sarebbe incirca 0,77; al quale corrisponderebbe il valore iniziale 0,5 incirca; mentre Amagat lo supporrebbe costante. Dal detto parmi che il rapporto limite abbia dei caratteri ben definiti per preferirlo come condizione iniziale nelle misure degli elementi critici. E quanto importi il convenire su questo punto, lo dimostra la diversità delle curve per la quale non è possibile pesare il valore delle conclusioni che lo sperimentatore deduce dalle proprie esperienze se non assegna con precisione i dati iniziali, meno ancora si potranno istituire confronti. Il prof. Battelli trova un valore del volume critico dell'etere alquanto maggiore di quello di altri sperimentatori e Matthias (non essendosi ancor detto chi abbia ragione) ne dà parziale spiegazione; ma credo che sarebbe decisa tosto che si conoscessero i dati iniziali di tutti gli sperimentatori. Tre tubi sui quali ho costruito le curve II, V e VII, avevano rispettivamente

	Capacità in c.c.	per grammo c.c.	rapporto iniz. $\frac{v}{v}$
II	3,4262	3,591	0,640
V	3,297	4,240	0,499
VII	3,271	5,04	0,387

Tutti e tre danno la sparizione del menisco, ma ognuno vede che non può essere indifferente prendere per volume critico dell'etere, uno dei tre volumi assegnati al grammo.

« Ma si rileva maggiormente quanto importi il convenire sul modo di operare dalla tavola B. Le estese esperienze di Ioung e i calcoli di Matthias citate dappprincipio, provano bensì che il diametro delle densità soddisfa al teorema degli stati corrispondenti, ma ancora che non si può applicare a tutti i corpi perchè il coefficiente angolare nella equazione: $\gamma = A [1 - \alpha (1 - \tau)]$ del diametro non è costante (come esigerebbe la teoria) ma oscilla da 0,95 a 1,05, e inoltre alcuni corpi non hanno diametro rettilineo. Di qui la necessità di confrontare solo quei corpi che hanno eguale coefficiente angolare e diametro rettilineo. Ora si potrebbe porre la questione: È poi costante per ciascun corpo quel coefficiente angolare? La risposta negativa assumerebbe vera importanza perchè tenderebbe ad escludere la necessità dei gruppi e manterrebbe la generalità del teorema. La tavola B segna tali spostamenti angolari nei diametri dell'etere, che la variazione del coefficiente angolare supera certamente i limiti sopraccennati. Se ciò avvenisse per gli altri corpi, cesserebbe la necessità di separarli in gruppi; solo sarebbe necessario e sufficiente eseguire su di essi le misure critiche in pari condizioni di procedimento. Anche il fatto che lo stesso etere presenta diametri curvilinei, escluderebbe la eccezione di quei corpi il cui diametro rettilineo non è ancora riconosciuto. L'argomento ha tanto maggior forza perchè si può rendere ragione dei risultati dal modo di operare. Generalmente si calcolano le densità colla misura diretta dei volumi v e v' per la relazione $vd + v'd' = m$ già citata, nella quale è supposto per la legge dei vapori saturi, che d e d' sieno costanti colla temperatura comunque variino v e v' . Teoricamente quindi la variazione può farsi entro limiti assai larghi del volume totale $V = v + v'$; cioè il suo massimo e il suo minimo che sono i volumi che la massa rinchiusa ha a quella temperatura allo stato di vapore saturo o di liquido. Non mi consta che gli autori si sieno imposto altro limite nella misura della densità. Amagat,

p. es., segue le linee dei rapporti costanti $\frac{v}{v'}$ che necessariamente vanno a convergere alla temperatura di sparizione. Fra i suoi rapporti iniziali leggo il valore 0,1 che esige un volume tale che tenuto costante non darebbe sparizione. Io invece ho fissato diversi valori $V_1 = v_1 + v_1'$, $V_2 = v_2 + v_2'$, $V_3 = v_3 + v_3'$ (a) ed ho costruito le corrispondenti equazioni

$$\left. \begin{array}{l} v_1 d + v_1' = m \quad 1) \\ v_2 d + v_2' = m \quad 2) \\ v_3 d + v_3' = m \quad 3) \end{array} \right\} (b)$$

per ogni temperatura: e secondochè confrontava V_1 con V_2 , V_1 con V_3 , V_2 con V_3 ecc. ne risultavano diametri più o meno divergenti, rettilinei o curvilinei. A questo modo io ho tenuto conto non solo delle equazioni (b) ma anche delle equazioni (a) che sono condizioni sottintese alle quali sono necessariamente legati v e v' . Nella costruzione del diametro si prende la

media delle due densità, ma è supposto che sieno le stesse nei diversi volumi $V_1 V_2$ per una stessa massa; mentre evidentemente la densità media varia cogli stessi volumi totali. Ora se di questa non occorre tener conto per temperature basse, non può trascurarsi vicino alla temperatura di sparizione dove la media delle densità si confonde colla densità media. Qui è dove fa difetto la formola, supponendo $\frac{d}{d'} = \frac{Av'}{Av}$ le densità inversamente proporzionali ai volumi; mentre io ritrovo alla temperatura 190° i valori seguenti del rapporto $\frac{Av'}{Av} = 3,8 - 1,6 - 2,18 - 1,5 - 3,8$. Si dovrà dunque ritenere con Heen che la densità dei vapori saturi ammette un massimo ad una stessa temperatura? O potrà spiegarsi per diversa tensione, e per la grande compressibilità del liquido a quella temperatura? *

« Concludendo propongo il rapporto limite sopraindicato, riconosciuto da Amagat, da adottarsi per le misure critiche e come condizione di confronto tra i diversi corpi. Non affermo che per tutti i corpi abbia lo stesso valore il rapporto; solo dico che la regola dei massimi è ben determinata per riconoscerlo. Se non si conviene o così o in altro modo fra gli sperimentatori, si corre pericolo di oscurare in luogo di illustrare le belle teorie che tendono ad esprimere le proprietà fisiche dei corpi con semplicissime leggi ».

Fisica. — *Sopra il fattore smagnetizzante nei cilindri di ferro.*

Nota di M. ASCOLI e F. LORI, presentata dal Socio BLASERNA.

« Nella Nota precedente abbiamo dato (tab. I) i valori della intensità della magnetizzazione nell'interno di cilindri di diverse lunghezze, nella presente ci occupiamo dello studio della forza magnetizzante effettiva.

« 7. I valori di questa si deducono graficamente dalla curva normale media (v. § 4), determinando le ascisse corrispondenti ai valori delle ordinate contenuti nella tab. I. I numeri così trovati sono raccolti nella tab. II. Il loro andamento per rispetto a quello dell'intensità è, quale si può prevedere considerando la forma generale delle curve magnetiche normali, composte di un primo tratto lentamente ascendente e concavo in alto, di un secondo pure concavo e rapidamente ascendente e di un terzo convesso che sale lentamente. Le variazioni dell'intensità della magnetizzazione sono quindi nei due primi tratti, cioè per piccole e medie i o per piccoli λ , e specialmente nel secondo, più sensibili di quelle della forza magnetizzante, nel terzo tratto meno (grandi i e grandi λ). Nella tabella II sono omessi i valori per $i = 10$, che, essendo troppo piccoli, riuscivano alquanto incerti nella determinazione grafica.

TABELLA II. *Forza magnetizzante* (1).

$\lambda = 54.6$	36.9	27.7	22.1	17.5	13.0	10.0	8.0	5.6	
$i = 20$									
$e = 0.155$	16.4	15.5	13.1	11.1	11.0	8.8	7.7	6.0	4.1
0.310	17.1	15.9	12.6	12.2	10.4	8.9	6.9	5.8	4.4
0.464	18.2	16.4	13.3	12.8	10.9	9.2	7.5	6.6	4.7
0.617	16.8	15.1	12.2	11.7	10.2	8.9	7.4	6.5	4.9
0.768	18.3	16.8	13.3	12.9	11.3	8.8	8.0	6.9	5.2
0.923	18.7	17.0	13.6	13.4	11.3	9.3	8.0	7.1	6.0
$i = 50$									
$e = 0.155$	34.3	27.8	24.1	22.4	18.7	15.8	13.8	11.5	7.7
0.310	33.3	27.4	23.3	21.6	18.2	15.6	13.5	11.4	7.7
0.464	34.5	27.7	24.4	22.6	19.4	16.7	14.3	12.1	8.8
0.617	35.3	28.4	23.7	21.9	18.1	15.3	13.0	11.3	8.8
0.768	35.3	28.4	25.5	21.0	19.4	17.1	14.7	12.8	10.4
0.923	36.0	29.8	26.4	22.2	20.4	17.8	15.5	14.0	11.6
$i = 80$									
$e = 0.155$	54.7	40.2	33.1	28.8	23.6	20.0	16.6	14.3	10.6
0.310	53.6	39.5	32.0	27.6	23.1	19.6	16.5	14.1	10.5
0.464	54.8	40.7	33.6	29.0	24.2	21.0	17.8	15.3	11.7
0.617	55.2	41.7	33.9	29.1	23.9	20.1	18.9	14.6	11.4
0.768	54.8	41.4	32.8	30.2	24.8	21.6	18.8	16.8	13.6
0.923	55.0	42.5	35.1	31.4	26.7	23.3	20.5	18.7	15.5
$i = 160$									
$e = 0.155$	115.1	81.0	59.3	49.6	35.4	28.4	23.8	19.5	14.4
0.310	121.2	78.0	57.4	47.2	35.0	28.0	22.7	19.5	14.4
0.464	117.8	81.4	59.4	49.6	36.5	29.2	24.2	21.3	16.3
0.617	113.5	81.5	61.3	50.3	38.0	30.4	24.6	20.7	16.1
0.768	117.4	81.4	56.2	52.2	38.8	31.7	26.4	23.3	19.2
0.923	116.0	80.3	61.3	52.1	41.4	34.3	27.0	26.7	23.1
$i = 286$									
$e = 0.155$	—	—	—	89.0	59.3	41.8	33.1	26.3	18.1
0.310	—	—	—	86.8	59.8	42.5	31.7	25.8	18.3
0.464	—	—	—	93.2	59.4	44.3	33.9	28.0	20.6
0.617	—	—	—	95.4	64.0	46.8	36.1	29.8	22.0
0.768	—	—	—	96.1	65.3	49.4	38.5	32.4	22.8
0.923	—	—	—	96.8	68.4	53.0	43.1	37.7	28.7

(1) Coeff. di riduzione in misura assoluta 0.1916.

“ 8. La *forza smagnetizzante* si calcola, nella solita unità, sottraendo i valori della tabella II da quelli corrispondenti di i , ossia della forza magnetizzante primitiva o impressa. Tali valori, determinati per le quattro maggiori intensità, sono raccolti nella tabella III. Le variazioni relative della forza smagnetizzante nell'interno del corpo sono molto piccole anche nel caso che l'intensità indotta sia variabilissima. Ciò dipende dall'essere la forza stessa vicina al valore della forza impressa, per modo che anche piccole variazioni di quella danno luogo a grandi variazioni relative della f. m. risultante, che è la differenza delle due.

TABELLA III. *Forze smagnetizzanti* (1).

$\lambda = 54.6$	36.9	27.7	22.1	17.5	13.0	10.0	8.0	5.6	
$i = 50$									
$e = 0.155$	15.7	22.2	25.9	27.6	31.3	34.2	36.2	38.5	42.5
0.310	16.7	22.6	26.7	28.4	31.8	34.4	36.5	38.6	42.3
0.464	15.5	22.5	25.6	27.4	30.6	33.3	35.7	37.9	41.2
0.617	14.7	21.6	26.3	28.1	31.9	34.7	37.0	38.5	41.2
0.768	14.7	21.6	24.5	29.0	30.6	32.9	35.3	37.2	39.6
0.923	14.0	20.2	23.6	27.8	29.6	32.2	34.5	36.0	38.4
$i = 80$									
$e = 0.155$	25.3	39.8	46.9	51.2	56.4	60.0	63.4	65.7	69.4
0.310	26.4	40.5	48.0	52.4	56.7	60.4	63.5	65.9	69.5
0.464	25.2	39.3	46.4	51.0	55.8	59.0	62.2	64.7	68.3
0.617	24.8	38.3	46.1	50.9	56.1	59.9	61.1	65.4	68.6
0.768	25.2	38.6	47.2	49.8	55.2	58.4	61.2	63.2	66.4
0.923	25.0	37.5	44.9	48.6	53.3	56.7	59.5	61.3	64.5
$i = 160$									
$e = 0.155$	44.9	79.0	100.7	110.4	124.6	131.6	136.2	140.5	145.6
0.310	38.8	82.0	102.6	112.8	125.0	132.0	137.3	140.5	145.6
0.464	42.2	78.6	100.6	110.4	123.5	130.8	135.8	138.7	143.7
0.617	46.5	78.5	98.7	109.7	122.0	129.6	135.4	139.3	143.9
0.768	42.6	78.6	103.8	107.8	121.2	128.3	135.6	136.7	140.8
0.923	44.0	79.7	98.7	107.9	118.6	125.7	133.0	133.3	136.9
$i = 286$									
$e = 0.155$	—	—	—	197.0	226.7	244.2	252.9	259.7	267.9
0.310	—	—	—	199.2	226.2	243.5	254.3	260.2	267.6
0.464	—	—	—	192.8	226.6	241.7	252.1	258.0	265.4
0.617	—	—	—	190.6	222.0	239.0	249.9	256.2	264.0
0.768	—	—	—	189.8	220.7	236.6	247.5	253.1	263.2
0.923	—	—	—	189.2	217.6	233.0	242.9	248.3	259.3

(1) Coeff. di riduzione in misura assoluta 0,1916.

« 9. La forza smagnetizzante si può, in generale, esprimere mediante il prodotto dell'intensità della magnetizzazione, per una quantità, detta *fattore smagnetizzante* (N), indipendente dall'intensità stessa e funzione solo degli elementi geometrici del corpo indotto. Questo fattore N si otterrà quindi dividendo la f. smagn. per l'intensità indotta, cioè i numeri della tabella III per i corrispondenti della I. I risultati di questo calcolo sono raccolti nella tabella IV. La concordanza tra i 4 valori che, per le 4 intensità, corrispondono al medesimo valore di ϱ e di λ , è soddisfacente. La tabella V raccoglie le medie di questi 4 valori e dà per cilindri di diversa lunghezza il fattore smagnetizzante a diverse distanze dall'asse. Nell'ultima linea della tabella sono scritti i valori medi di N.

TABELLA IV. *Valori di N* (1).

$\lambda = 54.6$	36.9	27.7	22.1	17.5	13.0	10.0	8.0	5.6	
$i = 50$									
$\varrho = 0.155$	0.39	0.80	1.25	1.59	2.68	4.12	5.84	8.56	17.0
0.310	0.44	0.83	1.39	1.78	2.86	4.24	6.08	8.78	16.7
0.464	0.38	0.81	1.21	1.53	2.41	3.62	5.33	7.58	13.7
0.617	0.34	0.74	1.32	1.69	2.90	4.45	6.49	8.78	13.7
0.768	0.34	0.74	1.05	1.44	2.39	3.46	4.90	6.53	10.2
0.923	0.32	0.64	1.00	1.26	2.07	3.07	4.31	5.54	8.4
$i = 80$									
$\varrho = 0.155$	0.33	0.76	1.23	1.71	2.86	4.41	6.60	9.66	16.9
0.310	0.35	0.81	1.34	1.89	3.02	4.65	7.06	9.99	17.4
0.464	0.33	0.74	1.20	1.70	2.66	3.88	5.87	8.19	14.6
0.617	0.32	0.70	1.17	1.68	2.76	4.28	5.05	9.34	15.6
0.768	0.33	0.72	1.24	1.57	2.51	3.65	5.14	6.80	10.9
0.923	0.32	0.67	1.06	1.40	2.09	2.97	4.10	5.15	8.1
$i = 160$									
$\varrho = 0.155$	0.30	0.70	1.20	1.61	2.91	4.54	6.84	10.9	24.0
0.310	0.25	0.75	1.27	1.73	2.98	4.71	7.59	10.9	24.0
0.464	0.28	0.69	1.19	1.61	2.76	4.30	6.53	11.2	16.4
0.617	0.31	0.68	1.14	1.57	2.55	3.96	6.30	9.22	16.7
0.768	0.28	0.69	1.31	1.47	2.47	3.67	5.45	7.16	11.3
0.923	0.29	0.71	1.14	1.48	2.19	3.10	4.25	5.21	7.3
$i = 286$									
$\varrho = 0.155$	—	—	—	1.59	2.71	4.46	6.69	10.50	24.3
0.310	—	—	—	1.64	2.67	4.35	7.27	10.90	23.7
0.464	—	—	—	1.63	2.68	4.07	6.35	9.18	18.6
0.617	—	—	—	1.46	2.45	3.74	5.67	8.08	15.6
0.768	—	—	—	1.45	2.38	3.48	5.08	6.76	11.3
0.923	—	—	—	1.43	2.25	3.14	4.24	5.26	7.5

(1) Coefficiente di riduzione in misura assoluta 0,0364.

TABELLA V. Valori medii di N ⁽¹⁾.

$\lambda = 54.6$		36.9	27.7	22.1	17.5	13.0	10.0	8.0	5.6
$q = 0.155$	0.34	0.75	1.23	1.62	2.79	4.38	6.49	9.90	20.55
	0.310	0.35	0.80	1.33	1.76	2.88	4.49	7.00	10.14
	0.464	0.33	0.75	1.20	1.62	2.62	3.97	6.02	9.04
	0.617	0.32	0.71	1.21	1.60	2.66	4.11	5.88	8.85
	0.768	0.32	0.72	1.14	1.48	2.44	3.55	5.14	7.31
	0.923	0.31	0.67	1.07	1.39	2.15	3.07	4.22	5.31
Medie	0.33	0.73	1.20	1.58	2.59	3.93	5.79	8.44	15.16

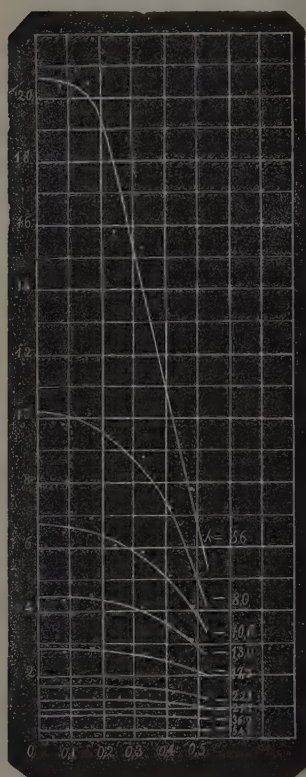


FIG. 3.

« La figura 3 rappresenta l'andamento di N così determinato. Costante per le maggiori lunghezze, va poi decrescendo dal centro alla periferia. Tale variazione, lenta dapprima, si fa rapidissima per le minori lunghezze studiate.

« Ai numeri della tabella andrebbe a rigore aggiunto il fattore smagnetizzante corrispondente alla lunghezza di circa 250 diametri, fattore che abbiamo trascurato fin qui perchè effettivamente piccolissimo e costante. Ne terremo conto nel calcolo che segue.

« Riduciamo, col fattore 0,0364, le medie dell'ultima linea in misura assoluta, aggiungiamo a ciascuna il numero 0,0007 che, secondo il Du Bois ⁽²⁾, è il fattore smagnetizzante per $\lambda = 250$, e, per interpolazione grafica, calcoliamo i valori di N corrispondenti alle lunghezze λ della tabella VI.

(1) Coefficiente di riduzione in misura assoluta 0.0364.

(2) l. c.

TABELLA VI.

$\lambda = 5.5$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
N=0.567	0.218	0.118	0.074	0.052	0.039	0.030	0.025	0.019	0.016	0.013
N ₁ —	0.216	0.120	0.077	0.053	0.039	—	0.024	—	0.016	—

« I valori N, sono quelli dati dal Du Bois; la concordanza quasi perfetta coi nostri dimostra quanto prima abbiamo asserito, che cioè l'esistenza delle eliche interne non altera l'andamento dei fenomeni, ed è anche prova dell'esattezza delle nostre misure.

« La tabella V mostra come i valori di N sieno variabilissimi per le piccole lunghezze, ma tendano a diventare costanti al crescere di queste; la costanza non è ancor raggiunta ma è molto prossima per la lunghezza superiore a 55 circa. Il sig. Du Bois ha dimostrato che il fattore smagnetizzante per lunghezze non inferiori a 100 diametri è proporzionale alla sezione (a pari lunghezza); ma, se si osservano i dati del Du Bois, si nota che al di sopra dei 50 diametri i valori si accostano rapidamente a tale proporzionalità. se ne può dunque arguire che: *il fattore smagnetizzante diventa proporzionale alla sezione quando la distribuzione della magnetizzazione interna diventa uniforme.*

« Il presente studio completa quelli precedenti, anche per quanto riguarda la questione della penetrazione del magnetismo nell'interno del ferro. Gli strati interni sono in ogni caso ben lontani dall'esser privi di magnetizzazione, anzi la distribuzione, uniforme quasi rigorosamente per lunghezze superiori a circa 50 diam., si scosta poco dall'uniformità fino a una quindicina di diam. circa, sebbene la f. smagnetizzante sia grandissima in questi cilindri, e molto sensibile anche in quelli di 50 diametri. Questo punto della questione ci pare risoluto in modo completo.

« I principali risultati si possono riassumere come segue:

« La distribuzione del magnetismo indotto è sensibilmente uniforme fino a 50 diam. circa.

« Al di sotto dei 50 diam. si manifesta un aumento dal centro alla periferia che si va accentuando al diminuir della lunghezza, prima lentamente poi (sotto a 15 diam.) rapidamente.

« Per valori molto piccoli e molto grandi (I e III tratto della curva magnetica normale) della f. magnetizzante effettiva, la variabilità dell'intensità magnetica indotta è minore.

« Il fattore smagnetizzante, negli stessi limiti sopra nominati, è costante o variabile, decrescendo dal centro alla periferia.

« Nei limiti della uniformità della distribuzione, il fattore smagnetizzante, a parità di lunghezza, è proporzionale alla sezione.

« Nelle dinamo, il cui circuito magnetico è paragonabile a quello di un cilindro che si avvicina ai 20 diam. circa ⁽¹⁾, la distribuzione si scosta poco dalla uniformità ».

Cristallografia. — *Osservazioni cristallografiche sull'acido picrico* ⁽²⁾. Nota del dott. LUIGI BRUGNATELLI, presentata dal Socio STRÜVER.

« Benchè l'acido picrico $C_6H_3(NO_2)_3O$ sia stato già più volte sottoposto a ricerche cristallografiche, pure ho creduto opportuno ripeterne lo studio, avendo avuto occasione di notare che i dati cristallografici fin qui generalmente ammessi per questa sostanza, non solo sono incompleti, ma contengono anche errori non lievi.

« Le misure del Mitscherlich ⁽³⁾ che risalgono al 1828 e poi quelle del Laurent ⁽⁴⁾ e le ricerche ottiche del v. Lang ⁽⁵⁾ hanno dimostrato che l'acido picrico cristallizza nelle forme del sistema trimetrico, però nessuno di questi autori accenna al carattere emimorfo che pure dai cristalli di questa sostanza è frequentemente offerto in modo assai evidente, cosicchè l'acido picrico, anche nei trattati recentissimi di cristallografia ⁽⁶⁾ è dato tra le sostanze appartenenti al gruppo oloedrico del sistema trimetrico. Tuttavia del carattere emimorfo dei cristalli di acido picrico possiamo trovare un cenno già nella Memoria nella quale il Liebig ⁽⁷⁾ descrive questa sostanza da lui per la prima

⁽¹⁾ V. Ascoli, *Sul circuito magnetico delle dinamo* - « Eletttricista », 1894, pag. 107.

⁽²⁾ Gabinetto di Mineralogia della R. Università di Roma.

⁽³⁾ *Ueber die Krystallform der Kohlen stickstoffsäure*. Pogg. Ann., v. XIII, p. 375. 1828.

⁽⁴⁾ *Revue scientifique*, vol IX, p. 24. Per quante ricerche io abbia fatto non mi fu possibile trovare questa Memoria. In proposito vedi Rammelsberg. *Handbuch der Krystallographisch-physicalischen Chemie*. Abt. II, p. 495. Leipzig, 1882.

⁽⁵⁾ *Untersuchungen über die physicalischen Verhältnisse Krystallisirter Körper*. Zweite Reite. Sitzb. d. W. A. vol. XXXI, p. 111.

⁽⁶⁾ Rammelsberg, l. c., Groth. *Physikalische Kristallographie*, p. 464. Leipzig, 1885. — Fock, *Einleitung in die chemische Krystallographie*, p. 117-118. Leipzig, 1888. — Arzruni, *Physikalische Chemie der Krystalle*, p. 228. Braunschweig, 1893.

⁽⁷⁾ *Ueber die bittere Substanz welche durch Behandlung des Indigs, der Seide und der Aloë mit Salpetersäure erzeugt wird*. Pogg. Ann., vol. XIII, 1828. Laurent invece (*Sur le phénile et ses dérivés*. Ann. de Chim. et Phys., 3^e sér., vol. III, p. 222) dice che si ottengono sempre lamine rettangolari, mai lamine triangolari equilateri.

volta ottenuta. Infatti a pagina 195 dice che i cristalli sono: « *hellgelbe, äusserst glänzende Blätter, die meistens die Form gleichseitiger Dreiecke besitzen* ». Più decisiva che la descrizione di Liebig sono le osservazioni microcristallografiche di Lehmann ⁽¹⁾; egli osservò che i cristalli microscopici « *treten fast immer in der bekannten gemessenen Form, vollkommen scharf aber hemimorph ausgebildet, auf* ». Io ho potuto constatare il carattere emimorfo prima sopra alcuni cristalli notevoli per le loro dimensioni, preparati ed a me donati dal prof. E. Zenoni del R. Istituto tecnico di Pavia, ed in seguito sopra numerosissimi cristalli da me ottenuti da parecchi solventi.

« Per queste mie osservazioni, per quella del Lehmann e per i fenomeni di piroelettricità che riferirò più avanti, rimane accertato che i cristalli di acido picrico appartengono al gruppo emimorfo del sistema trimetrico.

« Oltre questo importante risultato, come ho detto più sopra, lo studio della letteratura dell'acido picrico mi condusse a scoprire alcuni errori fino ad ora passati inosservati.

« Come è noto da tutti vengono ammesse per i cristalli di questa sostanza le costanti:

$$a : b : c = 0,974 : 1 : 0,9374 \text{ (2)}$$

calcolate da Rammelsberg in base ai seguenti angoli di Mitscherlich:

$$\begin{aligned} (111) : (1\bar{1}1) &= 68^{\circ}3' \\ (111) : (\bar{1}11) &= 70^{\circ}10'. \end{aligned}$$

« Se si confrontano i valori angolari calcolati per mezzo di questo rapporto parametrico con quelli osservati, subito colpisce la grande discordanza che passa tra osservazione e calcolo. Ora è facile accorgersi, e le misure da me eseguite (vedi sotto) lo provano, che questa grande discordanza è dovuta ad una svista di Mitscherlich (loc. cit.) che scambiò l'angolo $(111) : (1\bar{1}1)$ con $(111) : (\bar{1}11)$ ⁽³⁾. Infatti dando all'angolo $(111) : (1\bar{1}1)$ il suo giusto valore e calcolando, partendo cioè da

$$\begin{aligned} (111) : (1\bar{1}1) &= 68^{\circ}3' \\ (111) : (\bar{1}11) &= 70^{\circ}10' \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Mikrokrystallographische Untersuchungen*. Zeitschr. f. Kryst. und Min. v. P. Groth., vol. VI, p. 64. 1882.

⁽²⁾ Più esattamente:

$$a : b : c = 0,9735 : 1 : 0,9371$$

⁽³⁾ Orientazione di Rammelsberg.

si ha:

$$a : b : c = 1,0389 : 1 : 1,0671$$

dalle quali costanti risulta un perfetto accordo tra i valori misurati e calcolati, come lo dimostra la seguente tabella:

	valori osservati	valori calcolati	
	Mitsch.	Ramm.	Brugn.
(120) : (120)	128°36'	125°40'	128°36'
(100) : (120)	64 18	62 50	64 18
(100) : (111)	54 55	54 55	54 55

« Naturalmente questa modificazione nelle costanti cristallografiche dell'acido picrico porta con sè una variazione anche nelle relazioni morfotropiche che furono stabilite tra l'acido picrico stesso ed altre sostanze (¹). Così per esempio è interessante la relazione che si ottiene tra l'acido picrico (trinitrofenolo) ed il trinitrobenzolo quando per quest'ultimo si assumano le costanti date dal Fock (loc. cit.): $a : b : c = 0,943 : 1 : 0,5384$ che facilmente possono essere trasformate in modo da aversi:

$$\text{Trinitrofenolo: } a : b : c = 1,0389 : 1 : 1,0671$$

$$\text{Trinitrobenzolo: } a : b : c = 1,1206 : 1 : 1,0626.$$

« Così pure la relazione data da Arzruni tra l'acido picrico ed il picrato di potassio si trasforma nella seguente:

$$\text{Acido picrico: } a : b : c = 1,0389 : 1 : 1,0671$$

$$\text{Picrato di K: } a : b : c = 1,4352 : 1 : 1,0616.$$

« I numerosi cristalli da me esaminati presentano per la maggior parte l'aspetto ordinario dei cristalli di acido picrico. Sono cioè tabulari, talvolta

(¹) Friedländer, *Kristallographische Untersuchungen* ecc. Zeitschr. f. Kryst. und Min., vol. III, p. 172. — Fock, loc. cit., p. 117-118. — Arzruni, loc. cit. p. 228.

lamellari, secondo $\{100\}$, allungati secondo l'asse $[001]$ (fig. 1^a); altri invece hanno abito ottaedrico (fig. 2^a e 4^a). La figura 3^a dà l'immagine di cri-

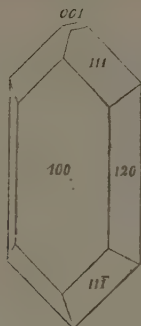


FIG. 1.

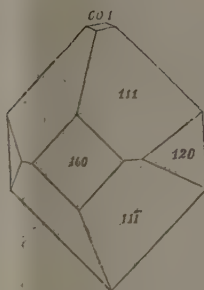


FIG. 2.

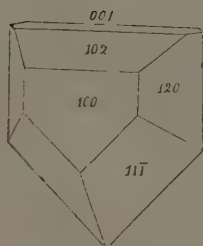


FIG. 3.

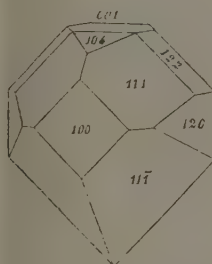


FIG. 4.

stalli più rari dei precedenti. I cristalli ottenuti dal prof. Zenoni poi hanno tutti indistintamente l'aspetto della fig. 4^a, ed a differenza degli altri sono di notevoli dimensioni (diam. mass. parall. $[001]$ 8 mm. minim. parall. $[100]$ 4-5 mm.).

« Il carattere emimorfo in quasi tutti i cristalli si manifesta colla presenza della forma $\{001\}$ colla sola faccia (001), nella maggior parte dei casi, così piccola da essere visibile solo colla lente, oppure al goniometro (ciò spiega come il carattere emimorfo di questa sostanza sia fino ad ora passato inosservato), altre volte invece abbastanza sviluppata; in questi ultimi casi però è sempre a superficie assai ineguale e cioè arrotondata o fortemente striata parallelamente a $[010]$ in modo da non permettere alcuna misura. Raramente la faccia (001) manca, ed in tali casi si tratta forse di geminati di complemento.

« Le forme che ho potuto osservare sono le seguenti ⁽¹⁾:

polo superiore: {001}, {111}, {122}, {104}, {102};

zona [001]: {100}, {120};

polo inferiore: $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$.

« Le forme {001}, {102}, {104}, {122} sono nuove per l'acido picrico.

« Le forme {100}, {120}, $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ non mancano in nessun cristallo, {001}, {111} mancano invece qualche volta; meno frequenti sono: {122}, {102}, {104}.

« Le facce dei cristalli lasciano molto a desiderare quanto a regolarità della loro superficie, essendo sempre poco piane. Per questa circostanza, unita all'altra che i cristalli all'aria perdono presto la lucentezza che hanno appena estratti dalla soluzione, non mi fu possibile ottenere misure molto esatte.

« Nella seguente tabella espongo i valori angolari osservati e calcolati in base al rapporto:

$$a : b : c = 1,0305 : 1 : 1,0434$$

dedotto dai primi sei angoli che tra tutti sono i più attendibili.

	medie	limiti	n	valori calcolati
(100):(120)	64°2	63°52' — 64°19'	16	64°7' -
(100):(111)	54 58	54 47 — 55 6	13	54 59
(111):(111)	70 3	69 55 — 70 8	5	70 2
(111):(111)	72 43	72 30 — 72 50	5	72 30
(111):(111)	68 48	68 38 — 68 55	5	69 2
(100):(102)	63 46	63 40 — 63 50	4	63 9
(100):(104)	75 32	75 — 32	2	75 48
(111):(120)	38 26	38 18 — 38 34	4	38 31
(111):(102)	40 3	39 55 — 40 8	3	40 7
(111):(104)	46 9	45 54 — 46 24	2	46 21
(111):(122)	16 1	15 41 — 16 19	4	15 42
(122):(122)	38 40	—	1	38 37

« Ben poco si conosce fino ad ora delle proprietà ottiche dei cristalli di acido picrico. Le uniche osservazioni in proposito le dobbiamo al v. Lang (loc. cit.), il quale però altro non potè determinare che la direzione del piano degli assi ottici parallelo a {010} e che normalmente a {100} esce l'asse di minima elasticità ottica da lui ritenuta, benchè non con sicurezza, come bisettrice acuta. Secondo v. Lang lo schema ottico sarebbe dunque $\underline{a} \ b \ c$ ⁽²⁾.

(1) Orientazione di Rammelsberg.

(2) Lo schema dato dal v. Lang è $\underline{b} \ \underline{a} \ c$ perchè l'orientazione da lui adottata è diversa da quella di Rammelsberg. Circa questa orientazione vedasi: J. Grailich und V. v. Lang, *Untersucungen über die physicalischen Verhältnisse Krystallisirter Körper I. Orientirung der optischen Elasticitätsaxen in der Kristallen des rhombischen Systems.* Sitzb. W. Ac. vol. XXVII, p. 3-10. 1857.

« Le mie osservazioni hanno confermato quelle di v. Lang circa la direzione del piano degli assi ottici e dell'asse di massima elasticità. Questo però non è bisettrice acuta ma bensì ottusa; naturalmente l'acuta (asse di minima elasticità) è parallela a [001]. Lo schema ottico è dunque $\alpha \ b \ c$. La doppia rifrazione è molto energica. La misura dell'angolo degli assi ottici eseguita sopra lamine tagliate normalmente alle due bisettrici, diede nell'olio i seguenti risultati:

per il rosso:	$2H_a = 98^{\circ}23'$	$2H_0 = 119^{\circ}56'$
per il giallo (Na):	" = $99^{\circ}27'$	" = $120^{\circ}8'$ ⁽¹⁾
per l'azzurro	" = $103^{\circ}32'$	

(1) Come si vede, da queste misure dell'angolo apparente degli assi ottici nell'olio si ha, tanto per la lamina normale alla bisettrice acuta come anche per quella normale alla ottusa, la dispersione $q < v$. Siccome la dispersione vera è $q < v$ così avviene per la lamina normale alla bisettrice ottusa una inversione della dispersione. Un fenomeno simile fu già osservato da Des Cloiseaux (*Nouvelles recherches* ecc., p. 100 e 140) nella Thenardite e nell'Iposolfito di sodio, però per quanto io sappia non ne fu ancora data una spiegazione.

Il fenomeno è dovuto alla differenza di dispersione del cristallo (per raggi di indice di rifrazione β) e dell'olio, e le condizioni perchè avvenga si possono ricavare nel seguente modo:

Supponiamo di avere una lamina normale ad una bisettrice e $V_r, V_v; \beta_r, \beta_v; n_r, n_v; H_r, H_v$; abbiano il significato che loro si dà generalmente. Allora come è noto si ha:

$$\text{sen } V_r = \frac{n_r}{\beta_r} \text{sen } H_r \text{ e } \text{sen } V_v = \frac{n_v}{\beta_v} \text{sen } H_v$$

da cui si ottiene:

$$\frac{\text{sen } V_r}{\text{sen } V_v} = \frac{\frac{\beta_v}{n_v}}{\frac{\beta_r}{n_r}} \cdot \frac{\text{sen } H_r}{\text{sen } H_v}$$

Ora $\frac{\beta_v}{\beta_r}$ è l'espressione della dispersione del cristallo per raggi di indice di rifrazione β ed $\frac{n_v}{n_r}$ quella del mezzo ambiente.

Indichiamo per semplicità la prima con d e la seconda con δ e scriviamo quindi

$$\frac{\text{sen } V_r}{\text{sen } V_v} = \frac{d}{\delta} \cdot \frac{\text{sen } H_r}{\text{sen } H_v}.$$

Ora sia $V_r > V_v$ e quindi $\frac{\text{sen } V_r}{\text{sen } V_v} > 1$. Allora è evidente che avverrà una inversione e cioè si osserverà $H_r < H_v$ quando il rapporto $\frac{d}{\delta}$ soddisferà alla relazione:

$$\frac{\text{sen } V_r}{\text{sen } V_v} < \frac{d}{\delta}.$$

Nel caso invece di $V_r < V_v$ e quindi di $\frac{\text{sen } V_r}{\text{sen } V_v} < 1$ si avrà un'inversione e cioè si osserverà $H_r > H_v$ quando il rapporto $\frac{d}{\delta}$ soddisferà a:

$$\frac{\text{sen } V_r}{\text{sen } V_v} > \frac{d}{\delta}.$$

da cui si ricava:

$$\text{per il rosso: } 2V_a = 82^\circ 19'$$

$$\text{per il giallo (Na) } \alpha = 82^\circ 43'.$$

Si ha quindi una notevole dispersione $\varrho < v$.

« Il pleocroismo è pressochè insensibile. Anche osservando sopra lamine di notevole spessore riesce difficile notare una variazione di colore. Tuttavia da osservazioni eseguite colla lente di Haidinger e sopra tre lamine tagliate parallelamente ai tre pinacoidi mi pare di poter dedurre l'assorbimento:

$$c > b > a.$$

« Il carattere polare dell'asse $[001]$, già reso evidente dalla forma cristallina, è poi confermato dai fenomeni di piroelettricità polare che i cristalli di acido picrico offrono in modo assai spiccato.

« Per lo studio di questo fenomeno mi valse del noto metodo di Kundt, ed esperimentai tanto su cristalli grossi come su cristalli laminari. I cristalli furono appesi per mezzo di sottilissimi fili di seta entro una stufetta e riscaldati per circa due ore ad una temperatura di circa 60° .

« Le esperienze mostrarono che per raffreddamento si elettrizza negativamente (polo analogo) l'estremità positiva dell'asse $[001]$, alla quale estremità generalmente si trova la faccia (001) , e positivamente (polo antilogo) l'estremità negativa dello stesso asse sempre determinata dal vertice della forma $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$. L'acido picrico dunque segue come la blenda, la tormalina, la calamina ecc., la legge di Curie⁽¹⁾.

« Il fenomeno si manifesta in modo spiccatissimo in tutti i cristalli, meno che in quelli laminari nei quali è molto debole. Quanto alla distribuzione della elettricità sulla superficie dei cristalli, si osserva che sono elettrizzate negativamente le sole facce del polo superiore e cioè delle forme $\{001\}$, $\{111\}$, $\{122\}$, $\{102\}$, $\{104\}$, mentre l'elettricità negativa oltre le facce della forma $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ occupa una parte della forma $\{100\}$ e nei cristalli molto allungati secondo $[001]$ (fig. 1^a) anche una parte delle facce di $\{120\}$ ».

Ad ogni modo sarà sempre necessario che $\frac{d}{\delta} > 1$ nel primo caso e < 1 nel secondo, e cioè si potrà concludere che se nel primo caso si osserverà una inversione, la dispersione del cristallo sarà maggiore che quella del mezzo ambiente e viceversa nel secondo caso.

Se il mezzo è l'aria (per cui possiamo ammettere $\delta = 1$) sarà solo possibile una inversione nel caso che si abbia $V_r > V_v$.

Ne segue che l'osservazione della immagine assiale come anche la misura dell'angolo apparente degli assi ottici in alcuni casi non bastano ad indicare il senso della dispersione degli assi ottici.

(1) J. et P. Curie, *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémiédres à faces inclinées*. Comptes rend. Acc. des Sciences, vol. XCI, p. 386. 1880. — Vedasi anche: E. Mallard, *Traité de Cristallographie*, vol. II, pag. 578. — Soret, *Éléments de cristallographie physique*, p. 626.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero HERMANN VON HELMHOLTZ, mancato ai vivi in Charlottenburg l'8 settembre 1894. Apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 2 luglio 1875.

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

Il R. Istituto di studi superiori di Firenze; la R. Accademia svedese delle scienze di Stockholm; la Società di scienze naturali di Emden; la R. Società delle scienze di Upsala; l'Istituto Smithsonian di Washington; il Museo di geologia pratica di Londra; il R. Osservatorio di Greenwich; la Biblioteca del Museo nazionale di Buenos Aires; la R. Università di Christiania.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Corpo Reale delle Miniere, Roma; la Società zoologica di Londra; la Università di Giessen e di Marburg; la Scuola politecnica di Karlsruhe, l'Istituto meteorologico di Bucarest.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 7 ottobre 1894.

Meccanica. — *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato.*

Nota I del Socio F. SIACCI.

« Il teorema sulle tensioni nei sistemi elastici articolati, enunciato nella sua generalità la prima volta dal Gen. Menabrea che lo chiamò *principio di elasticità*, e che il Castigliano disse poi *teorema del minimo lavoro*, è un teorema limite, ossia una proposizione che si verifica quando le deformazioni siano infinitamente piccole. Esistono casi, in cui, anche in quella ipotesi, la proposizione non sussiste? Esistono casi in cui, anche senza quella ipotesi, la proposizione è vera? Si può stabilire una proposizione analoga che, almeno per deformazioni infinitamente piccole, comprenda tutti i casi, e comprenda tanto le tensioni delle aste, quanto le compressioni degli appoggi esterni? Ci studieremo di rispondere a questi quesiti.

§ 1.

« Siano n i vertici, o nodi, di un sistema articolato in equilibrio, l_{rs} sia la lunghezza dell'asta che congiunge i nodi r ed s , T_{rs} la sua tensione, x_r , y_r , z_r le coordinate ortogonali del nodo r , ed X_r , Y_r , Z_r le componenti della forza applicata in esso.

« Supporremo in questa prima Nota il sistema completamente libero. Le equazioni d'equilibrio allora sono :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_r = \sum_s T_{rs} \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r}, \\ Y_r = \sum_s T_{rs} \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r}, \\ Z_r = \sum_s T_{rs} \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_r}. \end{array} \right. \quad r, s = 1, 2 \dots n.$$

La tensione T_{rs} si suppone applicata in r e si considera positiva quando è diretta verso s , cioè quando proviene da un allungamento, e negativa nel caso contrario. Onde dicendo L_{rs} la lunghezza *naturale* dell'asta l_{rs} , cioè la sua lunghezza quando fosse libera e non sollecitata da alcuna forza esterna, si avrà

$$(2) \quad T_{rs} = \varepsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs}),$$

ove ε_{rs} è un coefficiente positivo (coefficiente di resistenza) dipendente dalla materia e dalle dimensioni dell'asta allo stato naturale. T_{rs} e T_{sr} hanno valore e segno eguali, ma T_{sr} è applicata in s e diretta in senso contrario a T_{rs} .

Le coordinate, e quindi i coseni direttori delle tensioni si suppongono conosciuti. Si suppongono date anche le forze applicate, onde le sole incognite sono le tensioni.

« Le equazioni (1) equivalgono, rispetto alle tensioni, a sole $3n - 6$, giacchè esse verificano le sei

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_r X_r = 0, \quad \sum_r (y_r Z_r - z_r Y_r) = 0, \\ \sum_r Y_r = 0, \quad \sum_r (z_r X_r - x_r Z_r) = 0, \\ \sum_r Z_r = 0, \quad \sum_r (x_r Y_r - y_r X_r) = 0, \end{array} \right.$$

nelle quali le tensioni non entrano. Le (1) adunque non bastano in generale a determinare le tensioni che sono in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$, senza fare intervenire le relazioni (2). Si tratta di vedere se di queste relazioni possa tener luogo una condizione di massimo o minimo.

« Gioverà a tal uopo esprimere le tensioni in funzione di

$$\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 = \frac{(n-3)(n-4)}{2} = m$$

variabili indipendenti $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_m$. Scriviamo senz'altro queste espressioni che si verificano facilmente colla sostituzione nelle (1), e che sono :

$$(4) \quad T_{rs} = \frac{\partial U}{\partial l_{rs}} + \omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} + \omega_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial l_{rs}} + \dots + \omega_m \frac{\partial \Omega_m}{\partial l_{rs}},$$

ove U è una funzione delle l_{rs} , che rappresenta il polinomio

$$(5) \quad \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r),$$

ed

$$(6) \quad \Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0 \dots \dots \Omega_m = 0$$

sono le relazioni, omogenee, che legano i lati l_{rs} , le quali sono appunto in numero di m e provengono dalla eliminazione delle coordinate dalle equazioni

$$(7) \quad l_{rs}^2 = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2.$$

« Siccome le coordinate $x y z$ si possono esprimere in diversi modi in funzione delle l_{rs} , così per fissare le idee si può supporre che scelto ad arbitrio un gruppo di $3n - 6$ equazioni tra le (7), se ne siano ricavate $3n - 6$ coordinate in funzione di altrettante l_{rs} e delle sei coordinate rimanenti, che designeremo con $c_1 c_2 \dots c_6$, e che, il sistema essendo libero, potremo anche fare scomparire, ponendole eguali a zero o a valori numerici arbitrari (1). Non si potrebbero ricavare dalle (7) tutte le $3n$ coordinate in funzioni dei lati, poichè il numero dei lati indipendenti è solo $3n - 6$ (2).

« Ciò posto sia F una funzione delle T ; vediamo se essa, resa massima o minima compatibilmente colle (1), o colle equivalenti (4), dia le equazioni (2).

« Dovranno verificarsi in primo luogo

$$(8) \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial T_{rs}}{\partial \omega_1} = 0, \dots, \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial T_{rs}}{\partial \omega_m} = 0$$

che in virtù delle (4) divengono

$$(9) \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} = 0, \dots, \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_m}{\partial l_{rs}} = 0;$$

ed in secondo luogo queste dovranno equivalere alle (2).

« Esaminiamo alcune soluzioni particolari delle (9).

(1) Giova però avvertire che le c non possono essere sei coordinate qualunque: devono essere sei coordinate, a cui dando valori numerici arbitrari non ne risulti alcuna determinazione della posizione relativa dei punti. Potrebbero quindi essere p. es. $x_1 y_1 z_1 y_2 z_2 z_3$, non potrebbero essere $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2$.

(2) Le equazioni (4) come le (1) si possono ricavare dall'equazione dei lavori virtuali

$$\sum (X_r dx_r + Y_r dy_r + Z_r dz_r) - \sum T_{rs} dl_{rs} = 0,$$

le (1) coll'esprimere i lati l_{rs} in funzione delle coordinate, le (4) esprimendo le coordinate in funzione dei lati. E se si tien conto delle c , alle (4) si aggiungono queste:

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial c_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial c_6} = 0$$

che equivalgono alle (3). Esprimendo in funzione di $3n - 6$ lati scelti ad arbitrio e che diremo l_p , gli altri lati l_q e le coordinate, se ne ricava

$$\frac{\partial U}{\partial l_p} - T_p - \sum_q T_q \frac{\partial l_q}{\partial l_p} = 0 \text{ ossia } T_p = \frac{\partial U}{\partial l_p} - \sum_q T_q \frac{\partial l_q}{\partial l_p},$$

che è il risultato a cui si giungerebbe risolvendo le (1) rispetto a $3n - 6$ tensioni.

§ 2.

« Le (9) sono soddisfatte ponendo

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs},$$

giacchè, le Ω essendo omogenee, detto μ il grado di una di esse, avremo

$$(11) \quad \sum_{rs} l_{rs} \frac{\partial \Omega}{\partial l_{rs}} = \mu \Omega = 0.$$

« Ora se si vuole che le (9), e per esse le (10), equivalgano alle (2)

bisognerà che il valore di $\frac{dF}{dT_{rs}}$ sia $\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs}$, donde

$$(12) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right)^2.$$

« È facile dimostrare che F è un minimo tra tutte le altre somme analoghe F' , che si possono formare con altre tensioni compatibili colle (1), o colle equivalenti (4). Si ha infatti

$$(13) \quad \begin{aligned} F' &= \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} + \frac{T'_{rs} - T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} \right)^2 \\ &= F + \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T'_{rs} - T_{rs})^2}{\varepsilon_{rs}}, \end{aligned}$$

giacchè la somma dei doppi prodotti è

$$\begin{aligned} \sum_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right) (T'_{rs} - T_{rs}) &= \sum_{rs} l_{rs} (T'_{rs} - T_{rs}) \\ &= (\omega'_1 - \omega_1) \sum_{rs} l_{rs} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} + \dots = 0. \end{aligned}$$

« Dunque: in un sistema elastico articolato ed isolato, in equilibrio sotto l'azione di forze applicate ai vertici, le tensioni rendono minima conciliabilmente colle condizioni d'equilibrio la somma dei quadrati dei lati, moltiplicati pei coefficienti di resistenza (1).

« È notevole che il valore di F , ossia $\frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} l_{rs}^2$, coincide, salvo una costante, col valore della funzione delle forze la quale, nell'equilibrio, è massima o minima, anzi si ammette come massima se l'equilibrio è stabile. Infatti questa funzione è

$$(14) \quad \begin{aligned} P &= \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) - \sum_{rs} \int T_{rs} dl_{rs} \\ &= \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs})^2, \end{aligned}$$

(1) Non mi consta che questo teorema sia già conosciuto, e così dei teoremi seguenti, tranne quello del § 3 e quello rappresentato dalla formola (29).

e siccome dalle (1) e dalle (2) risulta

$$\sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) = \sum_{rs} T_{rs} l_{rs} = \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs}) l_{rs},$$

così

$$(15) \quad P = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (l_{rs}^2 - L_{rs}^2) = F + \text{Cost.}$$

§ 3.

« Le (9) possono anche essere soddisfatte ponendo

$$(16) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - L_{rs},$$

quando $l_{rs} - L_{rs}$ si possa considerare come un incremento infinitamente piccolo δl_{rs} di L_{rs} . Allora si ha

$$(17) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - L_{rs} = \delta l_{rs},$$

e la sostituzione nelle (9) riduce i primi membri di esse a

$$\delta \Omega_1, \quad \delta \Omega_2 \dots \delta \Omega_m,$$

che sono nulli sotto la condizione però non solo che gli allungamenti siano infinitamente piccoli, ma che le lunghezze naturali L_{rs} soddisfino, come le l_{rs} , all'equazioni $\Omega_1 = 0 \dots \Omega_m = 0$, ossia che anche con esse si possa formare un poligono completo. Ciò significa che, tolte tutte le forze, tutte le aste cessino di essere tese o compresse.

« Ciò ammesso, affinchè le (16) coincidano colle (2) dovrà essere $\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}}$,

ossia

$$(18) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\varepsilon_{rs}} = \text{minimo.}$$

« Che sia F realmente un minimo, si prova come dianzi.

« E con ciò è dimostrato pel caso di un sistema isolato il principio di elasticità, o teorema del minimo lavoro, il quale può essere enunciato esattamente così:

« In un sistema elastico articolato ed isolato, in equilibrio sotto l'azione di forze applicate ai vertici, la somma dei quadrati delle tensioni divisi per i coefficienti di resistenza è minima compatibilmente coll'equazioni di equilibrio, quando le deformazioni siano infinitamente piccole, e, tolte le forze, tutte le tensioni siano nulle (1). »

« Anche qui si può dimostrare che il valore minimo di F coincide, salvo una costante, col valore massimo della funzione delle forze, cioè con

$$P = \sum_r (X_r x_r + Y_r y_r + Z_r z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\varepsilon_{rs}}.$$

(1) Nelle dimostrazioni, che sono state date del teorema, non si è provato, ch'io sappia, che F è realmente un minimo.

« Diciamo, infatti, x'_r, y'_r, z'_r le coordinate del nodo r , prima dell'applicazione delle forze, e poniamo

$$x_r = x'_r + \delta x_r, \quad y_r = y'_r + \delta y_r, \quad z_r = z'_r + \delta z_r;$$

avremo

$$P = \sum_r (X_r x'_r + Y_r y'_r + Z_r z'_r) + \sum_r (X_r \delta x_r + Y_r \delta y_r + Z_r \delta z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\epsilon_{rs}}.$$

« Ma dalle (1) si trae

$$\sum_r (X_r \delta x_r + Y_r \delta y_r + Z_r \delta z_r) = \sum_{rs} T_{rs} \delta l_{rs} = \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\epsilon_{rs}},$$

dunque, sostituendo,

$$P = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\epsilon_{rs}} + \sum_r (X_r x'_r + Y_r y'_r + Z_r z'_r) = F + \text{cost.}$$

« Il valore di $P - \sum_r (X_r x'_r + Y_r y'_r + Z_r z'_r)$, ossia di F , rappresenta la somma algebrica dei lavori delle forze esterne ed interne, la quale in pratica è sempre un massimo rispetto ai lavori analoghi corrispondenti a posizioni che non siano d'equilibrio.

§ 4.

« Le equazioni (9) sono soddisfatte in generale dalle (16) quando le L_{rs} soddisfino a queste condizioni

$$\sum_{rs} L_{rs} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} = 0, \dots, \sum_{rs} L_{rs} \frac{\partial \Omega_m}{\partial l_{rs}} = 0,$$

e ad esse soddisfano quando possano mettersi sotto la forma:

$$(19) \quad L_{rs} = \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r} \xi_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s} \xi_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r} \eta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_s} \eta_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_r} \zeta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_s} \zeta_s,$$

essendo le ξ, η, ζ quantità arbitrarie. Ed infatti allora si ha

$$\begin{aligned} \sum_r \sum_s L_{rs} \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} &= \sum_r \xi_r \sum_s \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r} + \sum_s \xi_s \sum_r \frac{\partial \Omega_1}{\partial l_{rs}} \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s} + \dots \\ &= \sum_r \xi_r \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_r} + \sum_s \xi_s \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_s} + \dots \end{aligned}$$

Ora ogni termine di questa somma è nullo, poichè le Ω , quando le l_{rs} si esprimono colle coordinate, divengono identicamente nulle, e perciò si ha identicamente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_r} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y_r} = 0 \dots$$

« Anche in questo caso, si verifica adunque che

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\epsilon_{rs}}$$

è minima compatibilmente coll'equazioni d'equilibrio, ed in questo caso non è necessario che colle L_{rs} possa formarsi un poligono completo di n punti.

« Alle (19) si può dare questa interpretazione geometrica. Se si considerano le $3n$ quantità $\xi \eta \zeta$ come coordinate di n punti e si dicono λ_{rs} i lati del poligono di essi, è evidente che L_{rs} rappresenta la proiezione di λ_{rs} sul lato l_{rs} del poligono elastico dato. Quindi il teorema, che comprende come caso particolare il precedente:

« In un sistema elastico articolato isolato, in equilibrio sotto l'azione di forze applicate ai vertici, la somma dei quadrati delle tensioni delle aste, divisi per i coefficienti di resistenza, è minima compatibilmente coll'equazioni di equilibrio, quando le lunghezze naturali delle aste siano le proiezioni sulle aste tese, dei lati di un poligono completo formato con n punti qualunque ⁽¹⁾.

§ 5.

« Le equazioni (9) sono, dopo le cose dette, evidentemente soddisfatte, se poniamo più generalmente

$$(20) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - \mu_{rs},$$

essendo

$$(21) \quad \mu_{rs} = \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r} \xi_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s} \xi_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r} \eta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_s} \eta_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_r} \zeta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_s} \zeta_s,$$

ove le $\xi \eta \zeta$ sono $3n$ quantità arbitrarie.

« Se vuoi che le (20) coincidano colle (2) dovrà verificarsi

$$(22) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\epsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs}$$

onde

$$(23) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \epsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\epsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs} \right)^2$$

« E si verificherà anche per questa funzione come per le altre una equazione analoga alla (13), cioè essa sarà minima.

⁽¹⁾ Immaginiamo, per fare un esempio molto semplice, sei aste aventi coefficienti di resistenza diversi od eguali, delle quali, allo stato naturale, quattro abbiano la lunghezza 10, e due la lunghezza 14. Con esse non si può formare un quadrangolo piano. Ma lasciando in disparte una delle più lunghe potremo colle altre cinque formare la figura di un rombo piano, e poi introdurre la sesta a forza mantenendo la figura piana; le sei aste si saranno così parte allungate e parte accorciate, secondo i loro coefficienti di resistenza.

Supponiamo infine che mediante forze applicate ai vertici, il sistema prenda la figura di un rettangolo di cui due lati opposti abbiano la lunghezza 9, altri due la lunghezza 12, e le diagonali per conseguenza la lunghezza 15. Le tensioni in questo caso soddisfano al teorema, perchè le lunghezze naturali sono le proiezioni sulle aste tese dei lati e delle diagonali di un quadrato.

« Si ha inoltre dalla (23)

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \mu_{rs}^2 - \sum_{rs} \mu_{rs} (T_{rs} + \varepsilon_{rs} L_{rs}).$$

Ma detta P la funzione delle forze abbiamo già dimostrato che la prima somma è $P + \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} L_{rs}^2$, e dalle (1) avendosi

$$(24) \quad \sum_r (X_r \xi_r + Y_r \eta_r + Z_r \zeta_r) = \sum_{rs} \mu_{rs} T_{rs},$$

risulta

$$(25) \quad F = P + \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} (L_{rs} - \mu_{rs})^2 - \sum_r (X_r \xi_r + Y_r \eta_r + Z_r \zeta_r)$$

§ 6.

« Le quantità arbitrarie ξ, η, ζ sono $3n$, ma con esse non si possono formare che $3n - 6$ arbitrarie tra le μ_{rs} ; le altre risultano funzioni di queste. Infatti le μ_{rs} sono le proiezioni dei lati di un poligono σ (i cui vertici hanno per coordinate le ξ, η, ζ) sui lati del poligono elastico. Ora siccome tra i lati di σ esistono $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$ relazioni, così anche tra le loro proiezioni esisterà un egual numero di relazioni, cioè date $3n - 6$ di quelle proiezioni, tutte le altre restano determinate.

« Ciò posto, scegliamo ad arbitrio $3n - 6$ lunghezze naturali, e designiamo con L_p una di esse, con L_q una delle altre; poniamo $3n - 6$ delle μ_{rs} eguali alle L_p , e indichiamo con μ_q una qualunque delle rimanenti, che saranno per le cose dette funzioni delle L_p . La (23) diviene

$$(26) \quad F = \frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p^2}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \varepsilon_q \left(\frac{T_q}{\varepsilon_q} + L_q - \mu_q \right)^2 = \text{minimo}.$$

§ 7.

« Possiamo sempre supporre che il sistema abbia assunto la figura attuale di equilibrio, partendo da un'altra figura infinitamente prossima, nella quale era pure in equilibrio sotto altre forze. Se $l_{rs} - \delta l_{rs}$ era la distanza dei nodi r ed s nella figura iniziale, la tensione corrispondente sarà stata

$$\varepsilon_{rs} (l_{rs} - \delta l_{rs} - L_{rs}) = T_{ors}.$$

Le coordinate del sistema nella figura iniziale siano

$$x_r - \delta x_r, \quad y_r - \delta y_r, \quad z_r - \delta z_r;$$

e siccome le ξ_r, η_r, ζ_r sono arbitrarie, poniamole eguali a queste quantità: verrà

$$\mu_{rs} = l_{rs} - \delta l_{rs}$$

e ne risulterà dalla (23),

$$(27) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\epsilon_{rs}} = \text{minimo}.$$

« Questa espressione rappresenta il lavoro dovuto agli incrementi delle tensioni, poichè

$$\frac{1}{2} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\epsilon_{rs}} = \int (T_{rs} - T_{ors}) dl_{rs}.$$

« Dunque: *nella deformazione di un sistema elastico, che da una figura d'equilibrio sotto certe forze passi ad un'altra sotto altre forze, il lavoro dovuto all'incremento delle tensioni è minimo compatibilmente colle condizioni d'equilibrio relative alla seconda posizione.*

« Dalla (25) si trae inoltre

$$(28) \quad F = P + \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{ors}^2}{\epsilon_{rs}} - \sum_r (X_r \xi_r + Y_r \eta_r + Z_r \zeta_r) \\ = \sum_r (X_r \delta x_r + Y_r \delta y_r + Z_r \delta z_r) - \frac{1}{2} \sum_{rs} \left(\frac{T_{rs}^2 - T_{ors}^2}{\epsilon_{rs}} \right).$$

« Il secondo membro rappresenta la somma algebrica dei lavori delle forze esterne ed interne nella deformazione. Dunque: *la somma dei lavori delle forze esterne ed interne nella deformazione di un sistema che passa da una figura d'equilibrio ad un'altra è eguale al lavoro dovuto agli incrementi delle tensioni.*

§ 8.

« Se le lunghezze naturali sono atte alla composizione di un poligono, possiamo prendere per figura iniziale quella così composta, ed allora le tensioni iniziali sono nulle, e si ricade nel teorema del § 3. Se le lunghezze naturali invece sono qualunque, possiamo assumere come figura iniziale quella dovuta a forze, che mantengano $3n - 6$ aste allo stato naturale: queste aste che designamo con L_p , avranno tensioni nulle, le altre avranno, per distensioni o compressioni subite, lunghezze differenti dalle naturali L_q ; queste lunghezze che si potranno determinare con una costruzione geometrica, siano $L_q + \Delta L_q$, le tensioni corrispondenti saranno $\epsilon_q \Delta L_q$. Sostituendo in (27), avremo

$$(29) \quad \frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p^2}{\epsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \frac{(T_q - \epsilon_q \Delta L_q)^2}{\epsilon_q} = \text{minimo}$$

« Se poi si vogliono le tensioni in un sistema, le cui aste non abbiano la lunghezza naturale, e che non sia sollecitato da forze esterne, varrà la stessa (29), compatibilmente colle (1), nelle quali si porrà $X_r = Y_r = Z_r = 0$.

La formola (29) però dev'essere modificata quando il sistema ha vincoli esterni ⁽¹⁾ ».

(1) Il Castigliano nel suo libro *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* (Turin, 1879) attribuisce a sè (p. 35) la prima dimostrazione rigorosa del teorema che egli chiama *del minimo lavoro*; ma, nel suo libro almeno, non lo enuncia (p. 30) e non lo dimostra che pel caso di un sistema isolato, cioè senza appoggi, quantunque nei casi pratici i sistemi siano sempre appoggiati; e neppure per quel caso egli dimostra che il lavoro sia *minimo*, quantunque questa parola formi la caratteristica della nuova denominazione da lui data a un teorema, che ne aveva già un'altra. E così egli stabilisce a pag. 39 un teorema analogo a quello rappresentato dalla (29) senza però avvertire com'esso vada modificato quando il sistema ha vincoli esterni, come accade sempre nelle applicazioni. Tuttavia l'opera del Castigliano è degna di studio e di seria attenzione. Il Castigliano si serve molto nelle sue dimostrazioni del teorema detto delle derivate del lavoro. Siccome questo teorema tende ad introdursi nell'insegnamento nelle nostre Scuole degl'Ingegneri, non è forse inutile qualche osservazione su di esso. Il teorema è così enunciato dal Castigliano:

« Si l'on exprime le travail de déformation d'un système articulé en fonction des déplacements relatifs des forces extérieures appliquées à ses sommets, on obtient une formule, dont les dérivées, par rapport à ces déplacements, donnent la valeur des forces correspondantes.

« Si l'on exprime, au contraire, le travail de déformation d'un système articulé en fonction des forces extérieures, on obtient une formule, dont les dérivées, par rapport à ces forces, donnent les déplacements relatifs de leurs points d'application ».

Per spostamenti relativi s'intendono le proiezioni degli spostamenti sulle forze, ed il lavoro di deformazione è

$$L = \sum_{rs} \int T_{rs} dl_{rs} = \sum_{rs} \int \frac{T_{rs}}{\epsilon_{rs}} dT_{rs}.$$

La prima parte del teorema deriva immediatamente dall'equazione seguente che si ricava dalle (1)

$$(a) \quad \sum_r (X_r dx_r + Y_r dy_r + Z_r dz_r) = \sum_{rs} T_{rs} dl_{rs},$$

onde

$$(b) \quad dL = \sum_r R_r dq_r, \quad \frac{\partial L}{\partial q_r} = R_r,$$

detta R_r la risultante di X_r , Y_r , Z_r e q_r lo spostamento relativo di essa.

Se poi si mettono al posto di dx_r , dy_r , dz_r le proiezioni αx_r , αy_r , αz_r dello spostamento q_r , supposto piccolissimo, sugli assi, la (a), trascurando quantità di second'ordine, diviene

$$(c) \quad \sum_r (X_r \alpha x_r + Y_r \alpha y_r + Z_r \alpha z_r) = \sum_{rs} T_{rs} \alpha l_{rs},$$

essendo αl_{rs} l'allungamento subito da l_{rs} a partire dalla figura iniziale. Ponendo $\frac{T_{rs}}{\epsilon_{rs}}$ in luogo di αl_{rs} , si ha

$$\sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\epsilon_{rs}} = \sum_r R_r q_r, \quad \text{ossia} \quad 2L = \sum_r R_r q_r.$$

Differenziando questa, e sottraendone la (b) si ottiene

$$dL = \sum_r q_r dR_r, \quad \frac{\partial L}{\partial R_r} = q_r.$$

Questa è, in sostanza, la dimostrazione del Castigliano.

Chimica. — *Sul massimo abbassamento nella temperatura di congelamento dei miscugli.* Nota del Socio E. PATERNÒ e di C. MONTEMARTINI.

« Dopo la classica scoperta di Raoult, le ricerche crioscopiche hanno avuto uno sviluppo grandissimo, e si è raccolto in meno di un decennio un materiale sperimentale molto considerevole; ma nessuno che noi sappiamo ha finora studiato l'andamento del punto di congelamento del miscuglio in tutte le proporzioni di due liquidi solidificabili. Tutti gli studî fatti sono stati rivolti a raccogliere dei dati per la determinazione dei pesi molecolari, e siccome l'esperienza ha provato che per soluzioni o molto diluite o molto concentrate i risultati che si ottengono non possono più servire a questo scopo, così le ricerche sono state limitate allo studio dei miscugli nei quali la sostanza che la fa da solvente è sempre in rapporto molto maggiore di quella di cui si studia la soluzione.

Giova ora notare che esiste una differenza essenziale tra le due parti del teorema. La prima è sempre esatta, qualunque sia la formula che lega le tensioni cogli allungamenti, qualunque questi siano, e qualunque sia la figura iniziale. La seconda, invece, richiede: 1° che le tensioni siano proporzionali agli allungamenti; 2° che gli allungamenti siano piccolissimi; 3° che nella figura iniziale tutte le tensioni siano nulle.

Questa terza condizione che generalmente non si verifica, e che se si verifica a una certa temperatura non si verifica ad un'altra, non è necessaria, se la seconda parte del teorema viene modificata nel seguente modo:

Quando un sistema elastico articolato è passato da una figura d'equilibrio ad un'altra, se si esprime il lavoro dovuto all'accrescimento delle tensioni in funzione delle forze applicate che lo mantengono nella seconda figura, e si considerano gli spostamenti relativi come funzioni di esse, le sue derivate rispetto alle forze danno gli spostamenti relativi dei loro punti d'applicazione.

Infatti la formola (c), qualunque siano le tensioni iniziali dà

$$\sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors}) T_{rs}}{\epsilon_{rs}} = \sum_r R_r q_r.$$

Differenziando questa, e sottraendone la (b) ossia

$$\sum_{rs} \frac{T_{rs} dT_r}{\epsilon_{rs}} = \sum_r R_r dq_r,$$

si ricava

$$\sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors}) dT_{rs}}{\epsilon_{rs}} = \sum_r q_r dR_r.$$

Dunque rappresentando con L' il lavoro dovuto all'incremento delle tensioni, ossia ponendo

$$L' = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\epsilon_{rs}},$$

avremo

$$\frac{\partial L'}{\partial R_r} = q_r.$$

« E pure lo studio completo delle variazioni del punto di congelamento del miscuglio di due liquidi in ogni proporzione non è privo d'interesse. E noi lo abbiamo intrapreso nella speranza di trovare in esso qualche nuovo criterio per riconoscere la diversa complessità delle molecole polimerizzate dei liquidi. — Ed invero se, come fu osservato per il primo da Raoult, il fatto che gli acidi nella benzina danno un abbassamento molecolare metà del normale può spiegarsi con la condensazione due a due delle molecole disciolte ⁽¹⁾ e se il comportamento degli alcoli è prova che essi sono formati da molecole molto complesse ⁽²⁾, ne viene come leggitima conseguenza che nel fenomeno dell'abbassamento del punto di congelamento di un liquido che tiene disciolta una data sostanza, non solo il peso molecolare relativo delle due sostanze, ma anche la natura dei complessi molecolari che le costituiscono debbono avere un'influenza.

« Quando ad una sostanza presa come solvente, p. es. l'acido acetico fusibile a 17°, si aggiunge gradatamente dell'acqua, si avrà un abbassamento nel punto di congelamento che sarà tanto maggiore quanto maggiore è la quantità di acqua aggiunta; però ciò ha un limite, o deve sempre esistere un punto nel quale il fenomeno s'inverte; cioè deve esistere un punto nel quale aggiungendo nuova acqua si avrà un innalzamento di temperatura, che conseguirà il suo massimo quando riducendosi trascurabile la quantità di acido acetico relativamente all'acqua aggiunta, il punto di congelamento, già disceso al di sotto di 0°, salirà fino a 0°, temperatura di congelamento dell'acqua pura. Similmente partendo dall'acqua (fus. a 0°) per aggiunte successive di acido acetico si avrà un punto di congelamento del miscuglio sempre più basso; ma verrà un momento in cui l'abbassamento cesserà e comincerà invece un innalzamento, che si fermerà alla sua volta per un miscuglio in cui l'acqua è in proporzione infinitamente piccola rispetto all'acido acetico, e ciò avverrà a temperatura di 17° che è quella di congelamento dell'acido puro. Naturalmente le due serie di esperienze si confondono nel risultato in una sola

« Inoltre nel punto di congelamento di due liquidi, ambedue solidificabili, deve per un dato miscuglio almeno ottenersi lo stesso punto di congelamento del liquido che ha la temperatura di fusione più bassa, cosicchè nel caso del miscuglio di acqua e di acido acetico deve rinvenirsi una proporzione in cui il punto di congelamento del miscuglio sia situato a 0°.

« È possibile calcolare a priori, dalla conoscenza delle proprietà di due liquidi, in quale proporzione devono essere mischiati per ottenere il massimo abbassamento nel punto di congelamento? In altri termini: A quale grado di

⁽¹⁾ *Chrioscopie*, p. 39.

⁽²⁾ Paternò, Gazz. chim., t. XIX; Paternò e Montemartini.

concentrazione avviene l'invertimento del fenomeno di abbassamento nel punto di congelamento per l'aggiunta di nuova sostanza?

« I fenomeni crioscopici sono fenomeni molecolari. — Una molecola di una data sostanza sciolta in 100 di un solvente produce un abbassamento costante ($0^{\circ},62$); due molecole il doppio, e così proporzionalmente. Sappiamo inoltre che perchè questi fenomeni procedano regolarmente è necessario che all'atto del congelamento si separi il solvente senza punto sostanza disciolta.

« Ora è chiaro, sempre parlando in linea completamente generale e facendo astrazione di tutte le cause disturbatrici che non sono poche, che se a 100 mol. di una sostanza presa come solvente si andrà mano mano aggiungendo un'altra sostanza, l'estremo limite di abbassamento nel punto di congelamento potrà spingersi nel caso più favorevole sino a quando si saranno di quest'altra sostanza aggiunte 100 mol.; ma sorpassato questo limite sarà la seconda sostanza che nel miscuglio assumerà le funzioni di solvente, ed allora il fenomeno dovrà invertirsi; si sarà conseguito allora il massimo di abbassamento e comincerà il punto di congelamento ad innalzarsi.

« Questo ragionamento è invero assai grossolano, poichè tra le molte cause disturbatrici del fenomeno vi è, per dirne una, anche quella che in miscugli in proporzioni vicine alle equimolecolari, il fatto della congelazione muta notevolmente la concentrazione. Ma per quanto grossolane queste considerazioni, possono servire a darci un'idea approssimativa dell'andamento del fenomeno.

« Da quanto precede, segue come probabile che studiando l'andamento del punto di congelamento di parecchi liquidi, due a due, deve nel fenomeno osservarsi un andamento in certo modo conforme pei liquidi che hanno la stessa complessità molecolare, mentrechè nel miscuglio di due liquidi che hanno diversa complessità molecolare, questa causa speciale, oltre alle altre generali, deve esercitare una influenza.

« Noi abbiamo, come inizio di una serie di ricerche su questo argomento, studiato i miscugli di paraxilene con benzina, acido acetico, fenolo e trimetilcarbinolo, e di trimetilcarbinolo e fenolo. Abbiamo pure fatto degli studi col paraxilene ed il timol, e col trimetilcarbinolo e l'acido acetico; ma per ora siamo in grado di occuparci dei primi soltanto.

I. Parroxilene e benzina.

Punto di congelamento del paraxilene 13°,18

" " della benzina 5°,17

Composizione centesimale del miscuglio $C_6H_6 + C_8H_{10}$ { xilene 57,61
benzina 42,39

Num. d'ord.	Benzina in 100 p.	Paraxilol in 100 p.	Temp. di congel.	Num. d'ord.	Benzina in 100 p.	Paraxilol in 100 p.	Temp. di congel.
1	0,488	99,512	12,915	23	28,723	71,277	— 3, 76
2	1,044	98,956	12, 58	24	30,441	69,559	— 4, 82
3	1,779	98,221	12, 17	25	32,294	67,706	— 6, 10
4	2,860	97,140	11, 54	26	34,132	65,868	— 7, 22
5	3,575	96,425	11, 14	27	40,456	59,544	—11, 65
6	4,369	95,631	10, 71	28	43,313	56,687	—13, 57
7	5,147	94,853	10, 30	29	46,032	53,968	—15, 11
8	5,794	94,206	9,915	30	48,466	51,534	—16, 98
9	6,505	93,495	9,535	31	53,794	46,206	— ?
10	7,652	92,348	8,845	32	56,756	43,244	— ?
11	8,699	91,301	8,275	33	61,654	38,346	—17, 44
12	9,718	90,282	7,665	34	63,841	36,159	—15,945
13	10,789	89,211	7,045	35	65,483	34,517	—14, 78
14	11,524	88,476	6,615	36	68,864	31,136	—12, 52
15	12,379	87,621	6,155	37	76,096	23,904	— 7, 80
16	13,381	86,619	5, 55	38	77,646	22,354	— 6, 89
17	14,409	85,591	4,915	39	79,644	20,356	— 6, 89
18	15,264	84,736	4,535	40	82,077	17,923	— 4, 19
19	16,209	83,791	3,935	41	85,525	14,475	— 2, 30
20	17,029	82,971	3,465	42	88,674	11,326	— 0, 81
21	25,657	74,343	— 1, 89	43	90,726	9,274	+ 0, 32
22	27,123	72,877	— 3, 04				

« Dobbiamo notare che queste esperienze, come tutte le altre seguenti, sono state fatte col metodo di Beckmann, cioè preparando prima un miscuglio di xilene e benzina in proporzioni determinate e poi aggiungendo gradatamente l'uno o l'altro dei due liquidi per mezzo della nota pipetta. Queste esperienze furono inoltre fatte in più riprese; in quelle dal n.° 1 al n.° 20 si partì da xilene a cui si aggiunse benzina, in quelle dal n.° 21 al n.° 26, e dal n.° 27 al n.° 31 si partì da miscugli delle proporzioni indicate dai n.° 21 e 27 e si andò aumentando le proporzioni di benzina. Invece nelle altre dal n.° 32 al 43 si partì dal n.° 43 al 37 da benzina e dal n.° 36 al 32 da un mi-

scuglio di xilene e benzina nelle proporzioni del n.º 36, e si andò aumentando la proporzione dello xilene.

« Dobbiamo in secondo luogo osservare che per ciò che concerne il miscuglio di xilene e benzina il massimo di abbassamento è evidentemente compreso in miscugli che contengono in 100 p. più di 38,346 e meno di 51,536 di xilene; però il punto di congelamento di tali miscugli, che deve essere al di sotto di — 17°,44, non potemmo determinarlo perchè col nostro termometro non poteva leggersi una temperatura più bassa.

« Dobbiamo pure notare che non ci è stato possibile determinare il punto di congelamento di miscugli contenenti meno del 9,274 % di xilene, perchè in tre esperienze che abbiamo fatte con miscugli contenenti

Paraxilene	Benzina
1,096	98,904
2,443	97,554
3,465	97,535

cominciò subito, appena la temperatura discese al p. di cong. della benzina, la cristallizzazione della sostanza. Questo fatto merita di essere attentamente studiato, tanto più che per soluzioni più concentrate di xilene in benzina, il fenomeno procede abbastanza regolarmente.

« Infatti dalle esperienze 40, 41, 42, 43 si calcola

Commutazione	Abbass. term.	Coeff.	Abbass. mol.
10,22	4°,85	0,415	
12,77	5°,98	0,469	
16,93	7°,47	0,441	
21,83	9°,36	0,429	
media		0,438	46,43

II. Peraxilene ed acido acetico.

Punto di congelamento dello xilene 13°,18

„ „ dell'acido acetico 15°,29

Composizione centesimale del miscuglio $C_2H_4O_2 + C_8H_{10}$ { xilene 63,86
acido acetico 36,14

„ del miscuglio $C_8H_{10} + 2C_2H_4O_2$ { xilene 46,07
acido acetico 53,93

Num. d'ord.	Peraxilene	Acido acetico	Punto di congel.	Num. d'ord.	Peraxilene	Acido acetico	Punto di congel.
44	0,879	99,221	14, 92	72	53,304	46,696	0,535
45	1,940	97,060	14,555	73	53,845	46,155	0, 55
46	3,306	96,694	14,095	74	54,341	45,659	0,545
47	4,676	95,324	13, 63	75	54,995	45,005	0, 50
48	6,122	93,878	13, 17	76	55,736	44,264	0,505
49	7,810	92,190	12, 65	77	56,368	43,632	0, 69
50	10,000	90,000	12, 01	78	57,010	42,990	0,890
51	11,733	88,267	11, 50	79	57,690	42,310	1,075
52	15,017	84,983	10, 65	80	58,479	41,521	1, 28
53	17,490	82,510	9, 96	81	59,236	40,764	1,915
54	19,957	88,043	9,255	82	60,474	39,526	2,285
55	22,391	77,609	8, 69	83	62,354	37,646	2, 77
56	24,874	75,126	8,025	84	64,506	35,494	3, 29
57	27,558	72,442	7,475	85	66,919	33,081	3,885
58	30,230	69,770	6,845	86	68,958	31,042	4, 40
59	32,994	67,006	6,165	87	70,778	29,222	4, 86
60	35,483	64,517	5, 55	88	72,878	27,122	5, 38
61	36,725	63,275	5,315	89	75,006	24,994	5,925
62	38,476	61,524	4,825	90	77,016	22,984	6,405
63	40,242	59,758	4,380	91	79,081	20,919	6,965
64	—42,531	57,469	3,815	92	87,527	12,473	9, 07
65	—44,937	55,063	2,925	93	90,132	9,868	10, 02
66	—47,442	52,558	2,475	94	92,327	7,673	10, 57
67	—48,918	51,082	1,865	95	93,523	6,477	10, 93
68	—50,799	49,201	1,135	96	95,092	4,208	11, 44
69	—51,055	48,945	0, 71	97	97,894	2,106	12, 40
70	—52,400	47,600	0, 51	98	98,794	1,206	12, 72
71	—52,809	47,191	0, 54	99	99,239	0,761	12, 86

III. Paraxilone e fenol.

Punto di congelamento del paraxilol 13°,18

" " fenol 37°,02

Composizione centesimale del miscuglio $C_8H_{10} + C_6H_6O$ { fenol 47
xilol 53

" del miscuglio $C_8H_{10} + 2C_6H_6O$ { fenol 35,99
xilol 64,01

Num. d'ord.	Fenol	Paraxilol	Punto di congel.	Num. d'ord.	Fenol	Paraxilol	Punto di congel.
100	1,235	98,765	12, 63	114	45,542	54,458	6,745
101	2,690	97,310	12,065	115	48,732	51,268	8,605
102	4,648	95,352	11,435	116	51,089	48,911	10,005
103	6,379	93,621	10, 92	117	54,137	45,863	11, 52
104	8,891	91,109	10,315	118	56,724	43,276	12, 79
105	11,596	88,404	9, 44	119	59,288	40,712	14, 07
106	16,169	83,831	8,935	120	61,520	38,480	15, 30
107	20,060	79,940	8, 15	121	69,222	30,778	18, 91
108	24,823	75,177	7,255	122	41,597	28,597	20, 07
109	31,008	68,992	6,255	123	79,773	20,227	24, 82
110	35,158	64,842	5,425	124	89,452	10,548	30, 37
111	39,457	60,543	3,995	125	94,164	5,836	33, 32
112	43,510	56,490	5,985	126	98,145	1,855	35, 82
113	44,615	55,385	6, 59				

IV. Paraxilene e trimetilcarbinol.

Punto di congelamento dello xilol 13°,18

" " del trimetilcarbinol 18°,79

Composizione del miscuglio $C_4H_{10}O + C_8H_{10}$ { trimetilcarbinol 42,53
xilol 57,47

" " $2C_4H_{10}O + C_8H_{10}$ { trimetilcarbinol 58,26
xilol 41,74

" " $3C_4H_{10}O + C_8H_{10}$ { trimetilcarbinol 67,68
xilol 32,32

Num. d'ord.	Xilol	Trimetilcarb.	Punto di congel.	Num. d'ord.	Xilol	Trimetilcarb.	Punto di congel.
127	1,710	98,290	17, 35	141	54,797	45,203	3,375
128	3,828	97,172	15, 74	142	59,012	40,988	4, 33
129	7,975	92,025	12, 66	143	62,662	37,338	5, 36
130	12,059	87,941	9, 88	144	67,366	32,634	6,265
131	16,030	83,970	7,175	145	73,324	26,676	4,235
132	22,230	77,770	4,205	146	80,578	19,422	8,755
133	28,513	71,487	+ 0,415	147	84,207	15,793	9,420
134	32,008	67,992	— 0, 61	148	87,236	12,764	9, 96
135	35,539	64,461	— 1, 80	149	91,355	8,645	10, 71
136	40,091	59,909	— 0, 97	150	93,998	6,002	11, 27
137	42,317	57,683	— 0, 63	151	96,036	3,964	11, 73
138	45,330	54,670	+ 0, 42	152	97,001	2,999	11, 97
139	46,261	53,739	1, 10	153	98,566	1,434	12,475
140	48,350	51,650	1, 74	154	99,553	0,447	12, 94

V. Trimetilcarbinol e fenol

Punto di congelamento del trimetilcarbinol 18°,79

" " fenol 37°,07

Composizione del miscuglio $4C_4H_{10}O + C_6H_6O$ { trimetilcarbinol 77,90
fenol 22,10

" " $6C_4H_{10}O + C_6H_6O$ { trimetilcarbinol 84,10
fenol 15,90

" " $C_4H_{10}O + 3C_6H_6O$ { trimetilcarbinol 22,69
fenol 77,31

Num. d'ord.	Fenolo	Trimetilcarb.	Punto di congel.	Num. d'ord.	Fenolo	Trimetilcarb.	Punto di congel.
155	1,224	98,776	17, 68	168	25,826	74,674	13, 49
156	3,054	96,946	15, 89	169	27,112	72,888	14, 87
157	6,303	93,697	12, 44	170	28,948	71,052	16, 15
158	9,794	90,206	8, 76	171	30,354	69,646	16, 62
159	12,366	87,634	5,425	172	33,085	66,915	17, 74
160	15,003	84,997	3,235	173	78,995	21,005	3, 89
161	16,054	83,946	3,555	174	80,943	19,057	6,075
162	17,438	82,562	5,710	175	82,457	17,543	9, 08
163	18,317	81,683	6,465	176	84,196	15,804	14, 45
164	19,197	80,803	7,785	177	88,661	11,239	21, 77
165	20,110	79,890	8,735	178	91,827	8,173	26, 85
166	20,942	79,058	9,415	179	97,135	2,865	33,905
167	23,413	76,587	12,085	180	99,030	0,970	36, 03

« Le esperienze dal numero 155 al 172 furono fatte aggiungendo successivamente del fenol al trimetilcarbinol; quelle dal 173 al 180 furono fatte invece aggiungendo il trimetilcarbinol al fenol. In queste esperienze si osserva una forte lacuna tra i n.ⁱ 172 e 173, i quali rappresentano miscugli di concentrazione molto diversa: ma i tentativi fatti con miscugli di composizione intermedia non ci diedero buoni risultati. Quello però che risulta certamente e che è degno di tutta nota si è che nei miscugli di fenol e trimetilcarbinol si presentano due massimi di depressione nel punto di congelamento. Questo strano comportamento è senza dubbio legato al fatto che si tratta di due liquidi ambedue a molecole complesse, dei quali secondo le concentrazioni si

disgrega or l'uno or l'altro. Nella esperienza n.º 60 il trimetilcarbinol è allo stato di polimerizzazione, mentre le molecole complesse del fenol sono disgregate pel fatto della diluizione. Nella esperienza invece n.º 173 avviene l'inverso, il fenol è polimerizzato ed il trimetilcarbinol ha le molecole disgregate; però non possiamo affermare che la temperatura di 3º,89 rappresenti la massima depressione, perchè come abbiamo detto vi è in queste esperienze una lacuna.

« Ed ora poche parole di conclusione.

« Le esperienze di cui abbiamo reso conto in questa nota non possono considerarsi come definitive, dappoichè è necessario ripeterle con prodotti di assoluta purezza; inoltre esse devono essere estese a molte altre sostanze. Noi stiamo ora preparando il materiale a questo scopo e ci proponiamo di studiare, parallelamente ai punti di congelazione, i fenomeni termici per i miscugli in varie proporzioni.

« Intanto però a noi sembra che le esperienze preliminari fatte confermino le nostre previsioni. Per il xilene e la benzina il massimo abbassamento nel punto di congelamento si ha per miscugli che hanno una composizione, se non molto prossima a quella di una molecola dell'uno ed una molecola dell'altro, certo tale che non permette di supporre miscugli di molto diversi.

« Nel caso dell'acido acetico e dello xilene, l'abbassamento massimo (esp. n.º 70) corrisponde molto prossimamente ad un miscuglio di 1 mol. di xilene e 2 mol. di acido acetico.

« Nel caso dello xilene col fenol (esp. 111) il massimo abbassamento corrisponde similmente ad un miscuglio di composizione assai vicina di 1 mol. di xilene per 2 di fenolo.

« Per il trimetilcarbinolo ed il paraxilene (esp. 135) si tratterebbe di un miscuglio di 1 mol. di xilene con 3 mol. di trimetilcarbinolo.

« Finalmente pel trimetilcarbinolo ed il fenolo, le esperienze 60 e 72 sono relative a miscugli, il primo di 6 mol. di trimetilcarbinol e 1 di fenol che ha la composizione

Fenol	15,90
Trimetilcarbinol	84,10

il secondo di 3 mol. di fenol per una sola di trimetilcarbinol, che deve contenere

Trimetilcarbinol	22,69
Fenol	77,31

« Ora confrontando questi risultati con tutto quanto è noto sulla complessità molecolare dei liquidi, non può disconoscersi che esperienze estese e precise nell'indirizzo da noi proposto serviranno a gettare molta luce sull'importante problema ».

Matematica. — *Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni.* Nota del Corrispondente RICCARDO DE PAOLIS (1).

« 1. Tra gli elementi generatori di due forme fondamentali a due dimensioni F_2^1, F_2^2 si può stabilire una corrispondenza proiettiva reciproca. Allora ogni elemento A_1 di F_2^1 individua un elemento corrispondente duale di F_2^2 , e tutti gli elementi A_2 di F_2^2 che appartengono ad esso e sono della stessa natura di A_1 insieme ad A_1 danno ∞^1 coppie A_1A_2 ; tutte le possibili coppie come A_1A_2 sono ∞^3 e costituiscono un aggruppamento \mathbf{Ap}_2 di 2° ordine proiettivo. Se F_2^1, F_2^2 coincidono possiamo considerare aggruppamenti proiettivi involutori, che sono stati chiamati sistemi polari.

« Si possono studiare anche aggruppamenti \mathbf{Ap}_n , che pure diremo proiettivi, costituiti da gruppi \mathbf{G}_n di elementi ciascuno di una di n forme F_2^1, \dots, F_2^n , tali che $n - 2$ qualunque di questi elementi costituiscano un gruppo \mathbf{G}_n , di \mathbf{Ap}_n , insieme a tutti i gruppi di un aggruppamento proiettivo \mathbf{Ap}_2 . Si possono anche studiare i sistemi fondamentali generati da aggruppamenti proiettivi \mathbf{Ap}_n , ecc. ecc.

« Se le n forme F_2^i sono sovrapposte, si possono ottenere aggruppamenti proiettivi involutori, *involuzioni* $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$. Molte delle loro proprietà e di quelle dei loro sistemi fondamentali sono state studiate.

« Per semplicità consideriamo n piani punteggiati sovrapposti ad uno stesso φ_2 .

« 2. Data un'involuzione $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$ e prese n rette r_1, r_2, \dots, r_n di φ_2 , $n - 1$ punti A_1, A_2, \dots, A_{n-1} dati rispettivamente sulle rette r_1, r_2, \dots, r_{n-1} , insieme ai punti della loro retta polare rispetto a $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$, costituiscono gruppi di $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$; la retta polare incontra in un punto A_n la r_n , e si hanno così ∞^{n-1} gruppi $\mathbf{G}_n (A_1 \dots A_n)$. Fissati $n - 2$ punti qualunque A_1, \dots, A_{n-2} di \mathbf{G}_n , se A_{n-1} descrive r_{n-1} , A_n descrive r_n e corrisponde ad esso proiettivamente; quindi i gruppi $A_{n-1} A_n$ generano un aggruppamento proiettivo \mathbf{Ap}_2 . Si vede così che i gruppi \mathbf{G}_n generano un aggruppamento proiettivo \mathbf{Ap}_n . Se le n rette coincidono in una r_1 , su di essa si ha una involuzione, e n punti n -pli per essa. Questi sono punti n -pli di $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$, e generano una linea c_n di ordine n incontrata in n punti da una qualunque retta del suo piano, che diremo la *linea n -pla* di $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$.

« 3. Immaginiamo data una involuzione $\mathbf{Ip}_{n,n-1}$ di φ_2 e sia c_n la sua linea n -pla. Prendiamo poi due punti O_1, O_2 non appartenenti a c_n e una

(1) [V. la Nota alla fine. C. SEGRE].

retta r di φ_2 . Siano A_1, \dots, A_n n punti qualunque di r . Sulle rette $O_1 A_1, \dots, O_1 A_n$ vi sono ∞^{n-1} gruppi B'_1, \dots, B'_n di $\mathbb{I}^{p_{n,n-1}}$ i quali costituiscono un aggruppamento proiettivo. Le rette $O_2 B'_1, \dots, O_2 B'_n$ hanno n punti B_1, \dots, B_n comuni con r , e i gruppi $B_1 \dots B_n$ costituiscono un aggruppamento proiettivo $\mathbf{A}p_n$ di r . Tutti i gruppi come $\mathbf{G}_{2n}(A_1 \dots A_n B_1 \dots B_n)$ generano un aggruppamento proiettivo $\mathbf{A}p_{2n}$. Per dimostrare ciò basta far vedere che $2n - 2$ punti qualunque costituiscono un gruppo \mathbf{G}_{2n} con tutti i gruppi di un aggruppamento proiettivo $\mathbf{A}p_2$. Siccome i gruppi $A_1 \dots A_n$ e $B_1 \dots B_n$ entrano nello stesso modo a costituire \mathbf{G}_{2n} basterà far vedere che preso un gruppo come $A_1 \dots A_n B_3 \dots B_n$, o $A_2 \dots A_n B_2 \dots B_n$, o $A_2 \dots A_n B_1 B_3 \dots B_n$, i punti B_1, B_2 , o A_1, B_1 , o A_1, B_2 che insieme ad esso danno un gruppo \mathbf{G}_{2n} si corrispondono proiettivamente. Nel primo caso la proprietà è già dimostrata, perchè tutti i gruppi $B_1 \dots B_n$ che insieme ad $A_1 \dots A_n$ danno un gruppo \mathbf{G}_{2n} , come abbiamo veduto, generano un aggruppamento proiettivo. Nel secondo caso, essendo dati i punti $A_2, \dots, A_n, B_2, \dots, B_n$, sono dati pure i punti B'_2, \dots, B'_n , e siccome tutti i punti B'_1 che insieme a questi costituiscono un gruppo di $\mathbb{I}^{p_{n,n-1}}$ sono tutti quelli di una retta r_1 , i punti corrispondenti A_1, B_1 si trovano proiettando da O_1, O_2 uno stesso punto di r_1 , e quindi si corrispondono proiettivamente. Nel terzo caso, essendo dati i punti $A_2, \dots, A_n, B_1, B_3, \dots, B_n$, sono dati pure i punti B'_3, \dots, B'_n e le rette $O_1 A_2, O_2 B_1$ che devono contenere B'_2 e B'_1 ; ora questi punti si corrispondono su di esse proiettivamente, quindi si corrispondono proiettivamente B_2 e A_1 . È adesso dimostrato che i gruppi \mathbf{G}_{2n} generano un aggruppamento proiettivo $\mathbf{A}p_{2n}$.

« I $2n$ elementi $2n$ -pli di $\mathbf{A}p_{2n}$ sono gli n punti comuni a r e c_n e il punto comune a r e alla retta $O_1 O_2$ contato n volte.

« Un punto M di r determina una retta $O_2 M$ la quale ha n punti N'_1, \dots, N'_n comuni con la linea c_n , le n rette $O_1 N'_1, \dots, O_1 N'_n$ incontrano r in n punti N_1, \dots, N_n corrispondenti a M ; analogamente a uno dei punti N corrispondono n punti M . Si ha così una corrispondenza $[n, n]$, che è proiettiva essendo costruita coll'aggruppamento proiettivo $\mathbf{A}p_{2n}$.

« 4. Supponiamo date, in uno stesso piano φ_2 , due linee c_n, c_m , di ordine n e m . Prendiamo due punti O_1, O_2 non appartenenti a c_n nè a c_m e una qualunque retta r di φ_2 .

« Se per O_2 conduciamo in φ_2 una retta $O_2 M$, che incontri r in M , i suoi n punti N'_1, \dots, N'_n comuni con c_n danno n rette $O_1 N'_1, \dots, O_1 N'_n$ che incontrano r in n punti N_1, \dots, N_n . Tra i punti M, N di r esiste (n. 3) una corrispondenza proiettiva $[n, n]$. Ogni retta $O_1 P$, condotta in φ_2 , incontra r in un punto P e incontra c_m in m punti Q'_1, \dots, Q'_m i quali danno m rette $O_2 Q'_1, \dots, O_2 Q'_m$ che incontrano r in m punti Q_1, \dots, Q_m . Tra i punti P, Q di r esiste una corrispondenza proiettiva $[m, m]$. Ora tra

i punti M , Q , e quindi tra le rette O_2M , O_2Q , si può (facendo coincidere N e P) stabilire una corrispondenza proiettiva $[mn, mn]$ risultante delle due $[n, n]$, $[m, m]$. I raggi doppi saranno $2mn$. Evidentemente tra questi mn coincidono con O_2O_1 , e i rimanenti mn sono quelli che da O_2 vanno ai punti comuni a c_n , c_m .

Due linee di ordine m, n hanno sempre mn punti comuni.

« Bastino questi cenni per provare che i principî stabiliti nelle due prime parti del presente lavoro sono sufficienti per dedurne una teoria geometrica pura delle linee e delle superficie n -ple di involuzioni projective, linee e superficie che sono tutte quelle dette algebriche.

Pisa, 30 dicembre 1887.

Nota di C. SEGRE. — Le pagine precedenti (a cui ho conservato il titolo originale, sebbene della *teoria generale* a cui si riferiscono contengano solo il principio) costituiscono la 3^a (ed ultima) Parte — fino ad oggi inedita — del manoscritto che, sotto il titolo « *Fondamenti di una teoria, puramente geometrica, delle curve e delle superficie* », il compianto De Paolis presentò a quest'Accademia nel concorso al premio Reale per la Matematica relativo al 1887. Veggansi in proposito la Relazione sul detto concorso in questi Rendiconti t. V (2^o sem. 1889), pag. 300, e quella recentissima (che propone un premio postumo al De Paolis) nel presente volume dei Rendiconti, pag. 185; non che i Cenni biografici del De Paolis da me pubblicati nel t. VI (1892) dei Rend.¹ del Circ.^o matem.^o di Palermo. — Si sa che, dopo presentato quel lavoro pel concorso, l'Autore si occupò di completarlo e di stamparlo. Ed in fatti le prime due parti di esso furono pubblicate, con vari rimaneggiamenti e con qualche ampliamento: v. rispettivamente la *Teoria dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi* (Memorie della Società Italiana delle scienze, t. 7, ser. 3^a, 1890) e *Le corrispondenze projective nelle forme geometriche fondamentali di 1^a specie* (Memorie della R. Accad. delle scienze di Torino, t. 42, ser. 2^a, 1892). Ma la morte — tanto funesta ed immatura! — impedì all'A. di completare questa 3^a Parte, la quale, per mancanza di tempo, s'era ridotta nel manoscritto a pochi cenni, mentre avrebbe richiesto un ampio sviluppo.

Incaricato dall'egregia Famiglia De Paolis di esaminare alcune carte del nostro compianto collega (nel che fui gentilmente aiutato, fra gli altri, dai signori Ciani, Enriques e Lazzeri), non rinvenni tra esse nulla che si riferisse a questo lavoro. Ho perciò ristampata qui quella 3^a Parte tal quale essa si trova nel manoscritto conservato dall'Accademia: persuaso che essa possa servire a dar qualche idea del metodo con cui l'A. intendeva di applicare i risultati delle Parti precedenti e specialmente della 2^a, relativa agli aggruppamenti projectivi nelle forme di 1^a specie, allo studio degli aggruppamenti projectivi di specie superiore, e quindi delle curve e superficie algebriche. — Di mutamenti rispetto al mscr. non ho fatto altro che: correggere poche sviste materiali; introdurre una nuova numerazione dei paragrafi, invece di continuar quella delle Parti precedenti; ed adottare — come ha fatto l'A. nella 2^a delle suddette Memorie stampate — i simboli Ap , Ip per indicare gli aggruppamenti *projectivi* e le involuzioni *projective*, in luogo di A ed I che si trovano nel mscr. —

Mi permetto di aggiungere qui poche parole intorno a quelli fra gli altri manoscritti inediti del De Paolis che, come dissi, io fui incaricato di esaminare. Fra essi non ne trovai alcuno che fosse pronto per la stampa, o che (secondo me) l'A. dopo qualche ritocco avrebbe

volentieri pubblicato. Ho perciò rinunciato ad occuparmi della loro pubblicazione. A vero dire, uno di essi, col titolo « *Sulla Jacobiana di quattro superficie* » e con la data del 1885, ha tutti i caratteri esterni di un ms. da stampare. Il suo scopo è di determinare la molteplicità che la Jacobiana di quattro superficie ha lungo una curva che sia multipla rispettivamente secondo $i_1, i_2, i_3, i_4, (\geq 0)$ per queste; e trova che essa è in generale $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 - 2$, ma diventa $i_1 - 1$ se tre delle i , p. e. i_2, i_3, i_4 , sono nulle, e diventa $4i - 1$ se le quattro superficie hanno lo stesso ordine e la stessa molteplicità i lungo la curva. Il metodo adoperato consiste nel condurre per la curva una superficie razionale (un monoide); l'intersezione di questa con la detta Jacobiana vien rappresentata da un'equazione fra i parametri della superficie razionale, da cui si dovrà staccare il fattore rappresentante la curva data tante volte quanta è la molteplicità cercata di questa curva per la Jacobiana. Questo concetto, diverso da quelli usati prima da altri per problemi siffatti, sembra ingegnoso e semplice. Ma il procedimento con cui viene attuato nel ms. non mi pare soddisfacente: e questa credo sia la causa per cui l'A. rinunziò poi alla pubblicazione.

Altre carte si riferiscono all'*esagrammo di Pascal*, che tentano di studiare ricorrendo ad una figura stereometrica. Poco prima — scrive l'A. — il Cremona ed il Caporali avevano dedotte le principali proprietà dell'esagrammo da figure che si presentano nelle superficie cubiche e nella superficie di Kummer. Egli invece si propone di dedurle considerando la conica come sezione piana di un iperboloide: pei 6 vertici dell'esagono passano due sestuple $p_1, \dots, p_6, q_1, \dots, q_6$ di generatrici dell'iperboloide; le coppie di rette p_i, q_i ($i=1, 2, 3$) determinano altri 30 punti π_{rs} e 30 piani Π_{rs} ; le coppie di punti come π_{rs}, π_{st} determinano 15 rette; ecc. ecc.: e così nasce una figura stereometrica le cui proprietà sono strettamente legate a quelle dell'esagrammo. Però la deduzione di queste ultime non viene spinta abbastanza in là; e nemmeno si può dire che si faccia molto semplicemente.

Infine meritano menzione alcuni studi su quistioni relative a sistemi lineari di curve piane, fra cui principalmente le seguenti: 1° Dati ν sistemi lineari proiettivi di curve C', \dots, C^ν , d'ordine n_1, \dots, n_ν , ognuno dei quali sia $\infty^{\nu+\tau}$ ove $\tau=0, 1, \dots, \nu-2$, se x, y sono due punti tali che i sistemi omologhi (nella detta proiettività) $\infty^{\nu-2}$ di curve $C', \dots, C^{\tau+2}$, i quali passano per x , passino pure per y insieme coi sistemi omologhi $\infty^{\nu-2}$ di curve $C^{\tau+2}, \dots, C^\nu$, tra i punti x, y del piano si avrà una corrispondenza (α_x, α_y) , essendo

$$\alpha_x = \sum_1^{\tau+2} n_p n_\sigma - \sum_1^{\tau+2} S r_{pb} r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2}$$

$$\alpha_y = \sum_1^{\nu} n_p n_\sigma - \sum_1^{\nu} S r_{pb} r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

ove le r_{pb} indicano le molteplicità che il sistema lineare C^p ha nei punti base b (che possono esser comuni anche a più sistemi, ed ai quali vanno estese le somme indicate con S). Studio di questa corrispondenza: linee che corrispondono alle rette; punti fondamentali; linee fondamentali; ecc. Curva unita, ossia luogo dei punti per ciascuno dei quali passano ν curve omologhe dei ν sistemi in guisa però che le $C', \dots, C^{\tau+2}$ vi si tocchino: è d'ordine

$$(\tau+2) \sum_1^{\nu} n_p + (\tau+1) \sum_1^{\tau+2} n_p - 3 \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

con determinate molteplicità nei punti base. — 2° Dati ν sistemi lineari proiettivi di curve C', \dots, C^ν , di dimensione $\nu + \tau - 1$, ove $\tau=0, 1, \dots, \nu-2$, se x, y indicano due punti tali che i sistemi omologhi $\infty^{\nu-2}$ di curve $C', \dots, C^{\tau+2}$, i quali passano per x , pas-

sino pure per y insieme coi sistemi omologhi $\infty^{\nu-2}$ di curve $C^{\tau+2}, \dots, C^{\nu}$, i luoghi di x e di y sono due curve di ordini

$$\sum_1^{\tau+2} n_{\rho} \left\{ \sum_1^{\nu} n_{\rho} n_{\sigma} - \sum_1^{\nu} S r_{\rho b} r_{\sigma b} - \frac{\tau(\tau+1)}{2} \right\} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2} \sum_1^{\nu} n_{\rho} + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{2},$$

$$\sum_1^{\nu} n_{\rho} \left\{ \sum_1^{\tau+2} n_{\rho} n_{\sigma} - \sum_1^{\tau+2} S r_{\rho b} r_{\sigma b} - \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2} \right\} - \frac{\tau(\tau+1)}{2} \sum_1^{\tau+2} n_{\rho} + \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{2};$$

caratteri di queste curve, ecc. — 3° Con gli stessi dati dei due problemi precedenti, solo con la riduzione dei ν sistemi lineari proiettivi alla dimensione $\nu + \tau - 2$, si ha un numero finito, che vien determinato, di coppie di punti x, y simili a quelle dei problemi precedenti.

Matematica. — *Le assintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque che fanno parte di una congruenza lineare.* Nota di GIULIO PITTARELLI presentata dal Socio CREMONA.

N. 1. Direttrici distinte.

« Fu trovato nella prima Nota inserita a pag. 111 di questi Rendiconti, che posta l'eq.^a algebrica

$$1) \quad \Phi \left(\begin{matrix} m \\ \mu, \nu \end{matrix} \right) = 0$$

quella della superficie è

$$\Phi \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4} \right) = 0$$

mentre poi le eq.ⁱ delle generatrici sono

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \mu, \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} = \nu,$$

e quella 9) delle assintotiche A_k

$$Ff^2 - kGg^2 = 0$$

può scriversi, per le segnature adoperate in 10) della Nota predetta

$$\frac{d\mu}{d\nu} g^2 f^2 - k \frac{d\nu}{d\nu} \varphi_4^2 g^2 = 0,$$

ed anche posto f e g in luogo di $\varphi_2 f$ e $\varphi_4 g$

$$2) \quad \frac{d\mu}{d\nu} f^2 - k \frac{d\nu}{d\nu} g^2 = 0;$$

mentre per i punti di Φ si hanno le

$$3) \quad x_1 = f\mu, x_2 = f, x_3 = g\nu, x_4 = g.$$

« Nell'eq^a. 2) possiamo introdurre le derivate della Φ rispetto a μ ed a ν . Abbiamo infatti da 1)

$$4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dv} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \frac{dv}{dv} = 0$$

onde 2) diviene

$$5) \quad k \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} g^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} f^2 = 0.$$

« Vogliamo determinare l'ordine di A_h . Prendendo a tal fine un piano qualunque

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

e sostituendovi i valori 3) di x_i si ha

$$6) \quad (\alpha_1 \mu + \alpha_2) f + (\alpha_3 \nu + \alpha_4) g = 0:$$

e l'ordine N_1 dell'assintotica A_h sarà il numero delle coppie u, v soluzioni comuni, variabili con α_i , delle eqⁱ. 4) e 6). Intanto poichè la 6) è lineare in u , eliminando tra essa e la 5) il rapporto $f:g$ si ha

$$7) \quad k (\alpha_1 \mu + \alpha_2)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + (\alpha_3 \nu + \alpha_4)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0.$$

« Per risolvere questa eq^a. rispetto a ν e determinare conseguentemente u razionalmente per mezzo di 6) in funzione di ν , si badi che tra μ e ν vale la 1). Allora noi possiamo trovare le coppie $\mu\nu$ comuni alle 7) ed 1) considerate come eqⁱ di curve ed il loro numero sarà N_1 .

« Giova per questo rendere omogenee le equazioni; avremo allora:

$$8) \quad \Phi = \Phi \left(\mu, \nu, \lambda \right) = 0$$

$$9) \quad k (\alpha_1 \mu + \alpha_2 \lambda)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + (\alpha_3 \nu + \alpha_4 \lambda)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$$

Posto $N = m + n$, si vede subito che la Φ è una curva di ordina N con due punti multipli, l'uno in $\mu = \lambda = 0$ secondo m , l'altro $\nu = \lambda = 0$ secondo n (s'intende nell'ipotesi più generale intorno ai coefficienti di Φ). E corrispondentemente intanto la superficie

$$\Phi \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_4} \right) = 0$$

sarà dell'ordine N con le rette $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ rispettivamente m^{pla} ed n^{pla} . Una sezione piana di questa superficie può intendersi rappresentata dalla stessa curva Φ ; perciò diremo indifferentemente curva Φ o superficie Φ ; e se quella possiede altrove altri punti doppi in numero di δ , questa avrà δ altre generatrici doppie, ed il genere p dell'una o dell'altra sarà

$$p = \frac{(N-1)(N-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \delta$$

$$10) \quad = (m-1)(n-1) - \delta = mn - N - \delta + 1$$

« La curva 9) è intanto dell'ordine $N' = N + 1$, cioè ch'è evidente. Vediamo piuttosto com'essa si comporti rispetto ai punti multipli ed ai punti doppi. Ora la curva $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$ è la prima polare rispetto a Φ del punto $\lambda = \mu = 0$, ed ha, perciò, in quel punto la stessa molteplicità m con le stesse tangenti di Φ , mentre invece nel punto $\lambda = \nu = 0$ ha la molteplicità $n - 1$ e non con le stesse tangenti di Φ . Analogamente si dica per $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$.

Le parti $(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \lambda)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$, $(\alpha_3 \nu + \alpha_4 \lambda)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ sono, per tanto, rispettivamente di dimensione $(m + 1)^{ma}$ in $\mu : \lambda$ ed n^{ma} in $\nu : \lambda$, e di dimensione $(n + 1)^{ma}$ in $\nu : \lambda$ ed m^{ma} in $\mu : \lambda$; perciò nell'aggregato 9) i punti $\mu = \lambda = 0$, $\nu = \lambda = 0$ sono multipli secondo m ed n ; ed anzi la forma omogenea in $\mu : \lambda$ che dà le m tangenti nel primo punto multiplo è quella che si trova in $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$, cioè è la stessa di quella che si trova in Φ , e così deve dirsi per le n tangenti nel punto $\nu = \lambda = 0$. Infine i δ punti doppi di Φ sono semplici per $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ e semplici per l'aggregato 9).

« Segue da questa analisi che il numero dei punti come alle 1) e 9), cioè l'ordine dell'assintotica A_k è

$$11) \quad N_1 = N(N + 1) - m^2 - n^2 - m - n - 2\delta = 2(mn - \delta).$$

e per 10)

$$12) \quad N_1 = 2(p + N - 1).$$

Ora il secondo membro è eguale, come si sa, alla classe K di una (sezione piana di Φ) curva piana d'ordine N e genere p : dunque

$$13) \quad N_1 = K \quad (1)$$

In particolare se $p = 0$, onde $\delta = (m - 1)(n - 1)$ si ha

$$N_1 = 2(N - 1) = 2(m + n - 1)$$

risultato dovuto a Cremona (Annali di Mat. 1867 pag. 253).

« Cerchiamo adesso il numero dei punti cuspidali, sull'una e sull'altra delle due direttrici multiple, punti da' quali partono, com'è noto, generatrici singolari della superficie Φ .

« Per quelli posti, ad esempio, sulla direttrice multipla m^{ta} deve aversi

$$(Nota I) \quad G = \frac{dv}{dv} = 0 \text{ ovvero per 4) } \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0.$$

(1) Vedasi Voss (Math. Annalen Bd. VII, 1875, pag. 79), al quale, io credo, si deve il teorema espresso in 13); Picard, *Application de la Théorie des complexes linéaires*, Annales de l'École normale sup. 1877, pag. 325.

Il numero de' punti sarà dato dalle soluzioni comuni a questa eq^e. polare ed alla 1). Chiamando x_m quel numero, e ricordando le osservazioni precedenti intorno a quella polare, si ha

$$\begin{aligned} x_m &= N(N-1) - n^2 - n - m(m-1) - 2\delta \\ &= 2(mn - p - \delta) = 2(p + m - 1); \end{aligned}$$

e sulla direttrice multipla n^{pla}

$$x_n = 2(p + n - 1).$$

Somando e chiamando x la somma

$$14) \quad x = 2(N + 2p - 2).$$

« In questi punti la curva A_k possiede altrettante tangenti stazionarie ed altrettanti piani stazionari (Cremona e Voss, loco citato), che, ben s'intende, sono comuni a tutte le A_k .

« Se sopra una rigata d'ordine n e genere p è posta una curva γ d'ordine ν e genere π , multipla per la superficie secondo h e tagliante in k punti qualunque generatrice rettilinea della rigata, tra il numero y delle generatrici tangenti a γ ed il numero η dei punti di γ per ciascun dei quali escono due generatrici coincidenti (punti cuspidali di γ), si hanno le due relazioni

$$\begin{aligned} 15) \quad y &= 2\nu h(k-1) - k(k-1)n \\ \eta - y &= 2k(p-1) - 2h(\pi-1) \end{aligned}$$

che il Segre pubblicò in questi Rendiconti il 3 luglio 1887.

« Per applicare queste formule nel nostro caso si osservi da prima che $k=2$, poi che l'assintotica A_k che vogliamo considerare come curva γ è semplice sulla superficie, perchè per ogni suo punto non passa che una generatrice di Φ , vi passa infatti la retta che, per esso, si appoggia alle due rette multiple; dunque $\eta=0$. Posto poi $n=N$, $\nu=N_1$, la prima delle due relazioni dà, tenendo presenti le 12) e 14),

$$y = 2N_1 - 2N = 2(N + 2p - 2) = x.$$

« Onde non vi sono altre generatrici tangenti alle assintotiche oltre alle generatrici singolari, ed i punti di contatto sono distribuiti così che x_m sono sulla retta m^{pla} e x_n sull' n^{pla} .

« Eliminando poi y tra le 15) dove si sia posto $\eta=0$, si ha

$$16) \quad \pi = (k-1)\nu + k(p-1) - \frac{k(k-1)}{2}n + 1,$$

che nel nostro caso dà

$$17) \quad \pi = N_1 + 2(p-1) - N + 1$$

ossia

$$\pi = N + 4p - 3 = m + n + 4p - 3$$

pel genere dell'assintotica A_k .

« Di questa curva adunque conosciamo l'ordine N_1 e la classe ch'è pure N_1 ed il genere π , perciò le formole notissime di Cayley darebbero gli altri numeri caratteristici, i quali sono poi a due a due reciproci. Per es. il rango r , ch'è la classe del cono proiettante l'assintotica d'ordine N_1 e genere π , è dato da

$$18) \quad r = 2(N_1 + \pi - 1) = 6N + 12(p - 1).$$

N. 2. Direttrici coincidenti.

« Per avere quì una superficie del tipo di quelle di Cayley ⁽¹⁾, posto

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \mu, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \nu$$

bisognerà supporre tra μ e ν un'eq^e. algebrica della forma seguente

$$\Phi(\mu, \nu) \equiv p_0(1, \mu)^{m+n} + p_1(1, \mu)^{m+n-2} \nu + p_2(1, \mu)^{m+n-4} \nu^2 + \dots + \left. \begin{aligned} &+ p_{n-1}(1, \mu)^{m-n+2} \nu^{n-1} + p_n(1, \mu)^{m-n} \nu^n = 0 \end{aligned} \right\} m \geq n.$$

dove in generale il simbolo $(1, \mu)^p$ indica un polinomio in μ di grado p . Eliminando μ e ν con l'aiuto delle 7) o delle 10) della Nota II, si ha l'eq^e. tangenziale o puntuale di Φ .

« Volendo determinare l'ordine (classe) dell'assintotica A_k in questo caso, bisogna considerare le eqⁱ. $\Phi = 0$,

$$2Fg + (kF - G)f = 0$$

dell'assintotica in coordinate curvilinee (Nota II eq^e. 13)), e la:

$$(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3) f + (\alpha_3 \varphi_1 + \alpha_4 \varphi_2) g = 0$$

che risulta sostituendo nell'eq^e. di un piano $\alpha_x = 0$ le coordinate α_i di un punto della curva data delle espressioni 4) della Nota II.

« Intanto ricordiamo che

$$F = \varphi_2 \varphi'_1 - \varphi_1 \varphi'_2, \quad -G = \varphi_2 \varphi'_3 - \varphi_3 \varphi'_2$$

ovvero

$$F = \varphi_2^2 \frac{d}{dv} \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \right) = \varphi_2^2 \frac{d\mu}{dv}, \quad G = -\varphi_2^2 \frac{d}{dv} \left(\frac{\varphi_3}{\varphi_2} \right) = -\varphi_2^2 \frac{d\nu}{dv}$$

onde le eqⁱ. da considerare sono

$$\Phi = 0, \quad 2 \frac{d\mu}{dv} g + \left(k \frac{d\mu}{dv} + \frac{d\nu}{dv} \right) f = 0$$

$$(\alpha_1 \mu + \alpha_2 + \alpha_3 \nu) f + (\alpha_3 \mu + \alpha_4) g = 0,$$

⁽¹⁾ Nelle formole (5) e (8) della Nota a pag. 149, che chiamerò Nota II, si contengono tipi più generali di quelli di Cayley, ch'io non ho studiati.

le quali, eliminando il rapporto $f: g$, si riducono alle due

$$\Phi = 0, \quad 2(\alpha_1 \mu + \alpha_2 + \alpha_3 \nu) \frac{d\mu}{d\nu} - \left(k \frac{d\mu}{d\nu} + \frac{d\nu}{d\nu} \right) (\alpha_3 \mu + \alpha_4) = 0$$

alla seconda delle quali possiamo sostituire l'altra

$$19) \left[2(\alpha_1 \mu + \alpha_2 + \alpha_3 \nu) - k(\alpha_3 \mu + \alpha_4) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + (\alpha_3 \mu + \alpha_4) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

in virtù della

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\nu} + \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \frac{d\nu}{d\nu} = 0.$$

Bisogna trovar le soluzioni comuni alla 19) ed alla $\Phi = 0$.

« Resa omogenea questa con lo scrivere

$$\begin{aligned} \Phi \left(\begin{smallmatrix} m+n & n & m+n \\ \mu, \nu, \lambda \end{smallmatrix} \right) &= p_0(\lambda, \mu)^{m+n} + p_1(\lambda, \mu)^{m+n+2} \nu \lambda + \dots \\ &+ p_{n-1}(\lambda, \mu)^{m-n+2} \lambda^{n-1} + p_n(\lambda, \mu)^{m-n} \nu^n \lambda^n = 0, \end{aligned}$$

la 19) si scriverà

$$20) \left[2(\alpha_1 \mu + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 \nu) - k(\alpha_3 \mu + \alpha_4 \lambda) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} + (\alpha_3 \mu + \alpha_4 \lambda) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$$

La curva $\Phi = 0$ è dell'ordine $m + n = N$, ha nel punto $\mu = \lambda = 0$ la molteplicità secondo il numero m , con la tangente $\lambda = 0$ comune ad $n = N - m$ rami. Ponendo $\nu = 1$ e facendo la trasformazione quadratica, usata in questi casi, $\mu = \mu_1, \lambda = \lambda_1 \mu_1$, si ha una curva d'ordine $m + 2n$, che, ordinata secondo potenze crescenti, comincia col gruppo di termini

$$\alpha_0 \lambda_1^n + \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \mu + \dots + \alpha_n \mu_1^n,$$

e che ha dunque nel punto $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ la molteplicità n con n tangenti tra loro distinte, il che equivale, com'è noto, ad $\frac{n(n-1)}{2}$ punti doppi.

« Adunque nella curva primitiva Φ si ha nel punto $\mu = \lambda = 0$ un punto m^{plo} al quale siasi accostato un punto n^{plo} equivalente ad $\frac{n(n-1)}{2}$ punti doppi (punto $m^{plo} (+n)^{plo}$ secondo il simbolo di Cayley).

« Se, intanto, δ è il numero di punti doppi che la Φ può altrove possedere (e conseguentemente la sup. Φ avrà δ generatrici doppie), il genere p di Φ (o della superficie) è

$$\begin{aligned} p &= \frac{(N-1)(N-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - \delta \\ &= (m-1)(n-1) - \delta = mn - \delta - N + 1. \end{aligned}$$

come precedentemente nel n. 1.

« Studiamo adesso la curva 20). Essa passa semplicemente per i δ punti doppi di Φ . Infatti per ogni punto siffatto $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$ svaniscono al 1° ordine.

« La curva $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$ è la prima polare del punto multiplo $\lambda = \mu = 0$

perciò questo punto è multiplo per essa secondo lo stesso numero m e con le stesse tangenti, tra le quali la $\lambda = 0$ tangente comune ad n rami; mentre i punti doppi sono semplici. L'eq.^e 20), ordinata secondo le potenze di ν , comincia col termine

$$2\alpha_3 \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \nu};$$

onde anche la 20) ha la singolarità suddetta. Non giova considerare la polare $\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0$, perchè il punto $\nu = \lambda = 0$ non è sulla curva, essendo il risultato della sostituzione $p_0(o, \mu)^{m+n}$, che non può essere nullo a meno che non sia $p_0 = 0$ o non sia zero il coefficiente di μ^{m+n} nella forma $(\lambda, \mu)^{m+n}$. E ciò non è, altrimenti l'eq.^e della curva si abbasserebbe. Inoltre la 20) ha lo stesso ordine N di Φ ; dunque il numero dei loro punti comuni, cioè l'ordine (la classe) dell'assintotica A_k è

$$N_1 = N^2 - m^2 - n^2 - n - 2\delta = 2mn - n - 2\delta$$

ovvero anche

$$21) \quad N_1 = 2p + 2N - n - 2 = 2(p + N - 1) - n.$$

« Il secondo membro è appunto la classe della curva Φ , chè, rispetto a quella della curva a punti multipli distiti, la classe soffre la diminuzione del numero n de' punti di diramazione.

« Il genere π è poi eguale a p , perchè l'assintotica ed una sezione piana qualunque sono punteggiate proiettivamente per mezzo delle generatrici delle superficie. E d'altra parte la 16) dà precisamente $\pi = p$ se $k = 1$.

« Troviamo il numero dei punti cuspidali. Per questi abbiain le soluzioni comuni alle eq.ⁱ.

$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0.$$

« Or calcolando effettivamente $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$ si trova

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = \lambda \left\{ p_1(\lambda, \mu)^{m+n-2} + \dots + (n-1)p_{n-1}(\lambda, \mu)^{m-1} \nu^{n-2} \lambda^{n-2} + np_n(\lambda, \mu)^{m-1} \nu^{n-1} \lambda^{n-1} \right\}.$$

« Il fattore λ eguagliato a zero darebbe quei valori di ν per i quali anche μ dovrebbe esser nullo dovendo esser $\Phi = 0$, e le eq.ⁱ 5) o 8) delle generatrici (Nota II) riescirebbero indeterminate. Bisogna adoperare dunque il fattore in $\{ \}$. Or quel fattore, eguagliato a zero, rappresenta una curva d'ordine $N - 2$ con un punto $(m-1)^{plo}$ $(+ (n-1)^{plo})$ e con δ punti

semplici. Onde il numero x richiesto de' punti comuni a questa curva ed alla $\Phi = 0$, sarà

$$\begin{aligned} x &= N(N-2) - m(m-1) - n_1^2(n-1) - (n-1) - 2\delta, \\ x &= 2(mn - \delta) - N - n + 1 \end{aligned}$$

ed anche, introducendo il genere,

$$22) \quad x = 2p + m - 1.$$

Finalmente il rango r sarà dato dalla relazione (analoga a 18))

$$r = 2(N_1 + p - 1) = 4(p + N - 1) - 2n + 2p - 2$$

cioè

$$\begin{aligned} r &= 6p + 4N - 2n - 6 \\ &= 6p + 2N + 2m - 6. \end{aligned}$$

Geologia. — *Appunti sulla costituzione geologica dell'Isola di Candia.* Nota del dott. V. SIMONELLI, presentata dal Socio CAPELLINI.

« La magistrale *Description physique de l'île de Crète* ⁽¹⁾ di Vittorio Raulin ed i *Travels and Researches in Crete* ⁽²⁾ del capitano Spratt, son le due sole opere che trattino estesamente della geologia di Candia, riferendo osservazioni originali. I torbidi politici pronti sempre a scoppiare e le difficoltà d'ogni maniera che si oppongono all'accesso nell'interno, son forse i motivi principali che hanno tenuto lontani da quell'isola i geologi od hanno fatto sì che non si discostassero troppo dalla regione litoranea.

« Visitai Candia nell'estate dell'anno scorso in compagnia del dott. Antonio Baldacci, botanico, e del dott. Giacomo Cecconi, che si occupava di ricerche zoologiche. Le nostre escursioni incominciarono dall'Akrotiri del Capo Maleka e da quella parte della costa nord che rimane compresa fra la Canea ed il promontorio di Grabusa, per continuare nell'interno delle eparchie di Kisamos e di Kidonia, fino ai monti che le separano da quella di Selinon. Passammo in seguito all'ampia zona che si estende fra il mare e la catena delle Montagne Bianche (Aspro-vouna) e salimmo in questa fino alla stupenda dolina di Omalos ed alla vetta del Monte Spathi (2110 m. l. d. m.) ⁽³⁾. Percorsa anche tutta la regione intorno a Retimo e l'eparchia di Milopotamon fino ai suoi confini occidentali e separatomi dai compagni che stavano per tornare in Italia, visitai le pittoresche gole di Sphakia e d'Agios Vasilios, l'isolotto di Gavdos, lontano circa 25 chilometri dalla costa sud, ed il gruppo montuoso del Psiloriti, compiendo la faticosa ascensione dell'Ida (2491 m.). E,

⁽¹⁾ Bordeaux, 1869.

⁽²⁾ London, 1865.

⁽³⁾ Misura barom. dell'autore, come anche la maggior parte di quelle citate in seguito.

finalmente, dopo qualche giorno speso a percorrere la parte centrale dell'isola, fra la pianura di Messara e Megalo-Kastron, arrivai lungo la costa nord sino al Capo Chersonesos, dove le febbri malariche mi costrinsero ad interrompere bruscamente il viaggio ed a sollecitare il ritorno in patria.

* La serie dei terreni osservati in queste diverse regioni comprende l'Arcaico (?), il Cretaceo, l'Eocene, il Miocene medio, il piano levantino del Pliocene ed il Quaternario. Va completamente escluso il Pliocene marino, perchè i terreni indicati dal Raulin come subappennini, corrispondono per la maggior parte al Miocene. Delle anageniti che l'autore medesimo descrive, e che accennerebbero al Trias se non al Paleozoico superiore, manca ogni traccia nei luoghi che ho potuto visitare.

* Riferisco, non senza molte riserve, all'Arcaico, gli schisti cristallini (talcoschisti primitivi, secondo il Raulin, rocce cretacee profondamente modificate dal metamorfismo, secondo lo Spratt) e le rocce massicce che li accompagnano, uniformandomi a quanto concluse recentemente, per analoghi terreni dell'Attica, il Lepsius⁽¹⁾. Queste formazioni raggiungono il massimo sviluppo nel distretto montuoso di Selinon, verso la estremità sud-ovest dell'isola, nelle regioni poste al nord ed al nord-ovest delle Montagne Bianche, nelle alture che circondano il monte Vrysinas al sud di Retimo, nei contrafforti occidentali dell'Ida e nella catena litorale del Milopotamon, fra Capo Liano e Bali. Costituiscono generalmente colline poco elevate, dai contorni dolcissimi, sulle quali verdeggiano eriche, mirti e leandri, o si addensano, come a Selinon e nell'Enia-Choria, stupendi castagneti; contrastando, in modo veramente caratteristico, con le linee ardite e con l'abituale aridità delle contigue regioni calcaree.

* Gli elementi principali di questa serie, indipendentemente dalle rocce massicce, son micaschisti grigi, verdognoli, rossastri, talcoschisti verdi o grigio-argentei, schisti quarzosi e quarziti, calceschisti, cipollini e calcari cristallini. Nella quarzite ho trovato a Theriso venuzze e moschettature di oligisto; negli schisti, oltre ai noduli ed alle vene di quarzo, è comunissima la pirite, che a volte, alterandosi, dà luogo alla formazione di notevole quantità di melanteria (vicinanze di Alikianou). Abbonda la grafite negli schisti lucenti dell'Akrotiri di Capo Spada, fra Ravduca e Nopia; in quelli di Agalianou, nel versante sud-dei monti di A. Vasilios, vidi considerevoli ammassi di gesso saccaroide, e a poca distanza, verso Gerakari, trovai erratici dei grossi pezzi di antracite, che senza dubbio provenivano ugualmente dagli schisti. La direzione dominante degli strati, quasi sempre molto sollevati, ondulati e contorti, sembra esser quella dall'ovest all'est. Ipsometricamente è raro che si spingano oltre i 1000 metri sul livello del mare.

* Non è soltanto l'apparenza litologica, come riteneva lo Spratt, che in-

(¹) *Geologie von Attika*, s. 22. Berlin, 1893.

duce a considerare questi schisti cristallini come più antichi assai dei calcari cretacei. La posizione loro è costantemente inferiore a quella di queste ultime rocce, la discordanza stratigrafica in più luoghi evidente, e le supposte alternanze non ho visto che si verifichino in alcun caso. Esistono sì banchi ed amigdale di calcare in mezzo agli schisti cristallini, ma non hanno nessun carattere in comune con le masse calcaree sovrapposte. Si aggiunga che nella zona inferiore dei calcari cretacei si trova qualche volta (per esempio verso la base delle colline di Malaxa, dalla parte del golfo di Suda) una specie di breccia, composta con i frantumi dei micaschisti soggiacenti.

« I diversi componenti della serie schistosa alternano fra loro senza regola fissa apparente. Per citare uno fra i molti casi osservati, indicherò la successione dei terreni nel monte di Vrisses, fra il piano di Alikianou e la costa nord, successione che fu tra le più facili a rilevare. Quivi notai, a cominciare dal basso: *a*) micaschisti rossicei; *b*) calcari bianchi finamente granulari, picchiettati di minutissimi cristallini bruno-rossastri, che mi parvero di granato; *c*) calceschisti grigi, in tavole dello spessore di pochi centimetri, spalmati di talcoschisto verdognolo; *d*) schisti micaceo-quarzosi, argentini, con noduli di quarzo. Seguiva in alto una gran massa di calcare grigio, cenerognolo, in alcuni punti quasi compatto, in altri distintamente cristallino, con tracce oscure di minuti gasteropodi, visibili solo in sezione.

« Nelle alture di Lakous, che fiancheggiano al nord le imponenti masse calcaree degli Asprovouna, la zona schistosa è formata da schisti quarzoso-micacei grigi, alternanti con schisti lucenti color piombo, da schisti quarzosi a finissima grana, neri o rossastri, compenetrati da ossidi di ferro, da calcari grigio-scuri, largamente cristallini, in lastre sottili intercalate a schisti nodulosi verdognoli, e da schisti rasati argentini o paonazzi, tutti uniformemente inclinati di circa 25° verso nord. A breve distanza dal villaggio di Lakous si vede spuntare fra gli schisti rasati ed i calcari a lastre una massa considerevole di diorite granulare, divisa in blocchi irregolarmente prismatici, che verso la periferia diviene alquanto schistosa e sembra passare ad un anfiboloschisto. Le spaccature della roccia sono ingemmate da grandi e limpidissimi cristalli di un feldispato (albite?) che si trovano anche tutt'intorno sparsi a profusione sul suolo. Un'altra massa di diorite, prevalentemente afanitica, sorge come una gigantesca fortezza naturale alle spalle del villaggio di Kerami, situato presso la costa meridionale, a circa due ore di cammino dal monastero di Preveli; ed anche questa è in relazione con i soliti schisti cristallini.

« Non posso dire lo stesso delle eufotidi, delle diabasi e delle serpentine, malgrado che il Raulin le dica inviluppate sempre dai talcoschisti o dalle quarziti; dove le ho viste erano accompagnate dai calcari cretacei e forse anche da terreni più recenti. Nelle alture poste ad occidente del gruppo montuoso del Kedros, verso il villaggio di Ardaetos, l'eufotide occupa, a circa

750 m. s. l. d. m., una vasta area cinta tutt'attorno dai calcari cretacei. L'accompagnano il diabase porfirico, che vi è disseminato in masse isolate, non senza mostrare però d'allinearsi secondo certe direzioni prevalenti, e la serpentina in grossi noccioli rotondati, lisci e lucidissimi alla superficie. Attraversano pure gli stessi calcari la serpentina bastitica e l'eufotide, che osservai presso l'imboccatura settentrionale del Kordaliotikon-Pharangi, profonda gola dentro a cui scorre incassato il torrente Megalopotamos. Mentre a Galià, presso le rive dell'Hiero-Potamos, diabase porfirica e serpentina sono a contatto di arenarie, macigno puddingoide e calcari argillosi con venature spatliche, che hanno tutto l'aspetto dei terreni eocenici. Che le ofioliti siano però più antiche del cretaceo è dimostrato dal fatto, che nelle parti inferiori di quest'ultimo terreno si trovano a volte dei ciottoli serpentinosi, come ebbe ad osservare il Raulin nelle regioni orientali dell'isola, sul piano di Katharos; onde, a volere spiegar le condizioni di giacitura osservate da me, bisogna ammettere, come faceva lo Sterry-Hunt per le serpentine terziarie, che queste rocce abbiano formato, nel mare cretaceo ed eocenico, scogli a poco a poco inviluppati dai sedimenti, in mezzo ai quali ora spuntano per via della denudazione.

« Per indicare lo sviluppo dei terreni riferiti al Cretaceo basta dire che si estendono in superficie per due terzi della vastissima isola, sorgendo con le imponenti onde orografiche degli Asprovouna, dal sistema dell'Ida e di Lassiti fino a circa 2500 metri sul livello del mare. Le forme litologiche dominanti sono calcari più o meno distintamente cristallini, di rado compatti, talvolta brecciformi, di colore variabile del bianco niveo al grigio ed al nero, che passano in qualche luogo a vere dolomie. Ad essi si accompagnano, sempre però con molto debole sviluppo, calceschisti di colore per lo più traente al rosso o al verdastro e micascisti piombini o giallognoli, senza parlare delle frequentissime intercalazioni di letti, amigdale ed arnioni di selce biancastra o nera. Le arenarie somiglianti al macigno, che Raulin dice abbondanti nelle regioni centrali ed occidentali dell'isola, scarseggiano in quelle che io ho visitato.

« I calcari formano per lo più grandi masse senza stratificazione apparente. Quando questa è visibile, può presentare su lunghissimi tratti grande uniformità di andamento, come succede per esempio nell'Ida, dove, a partire dalla Kalà-Plaja sopra il villaggio di Anoya fino alla cima, osservai gli strati dei calcari con selce e dei calceschisti pendere tutti uniformemente di 20-30° verso nord-est. In altri luoghi, invece, gli strati offrono pieghe molto ravvicinate e bizzarri contorcimenti, come vidi p. es. nelle gole dell'Akrotiri verso Gouverneto, alla Kakiscala sui fianchi del monte Spathi e meglio ancora nelle altissime pareti verticali del *Pharangi* di Asphentou. La media delle direzioni osservate si accosta a quella del soggiacente sistema schistoso.

« Al contatto dei calcari con gli schisti cristallini è da notare come si originino numerose sorgenti, alcune delle quali, ricchissime di cloruro di sodio,

formano, come ad Almyros, veri fumicelli salati. Sono anche frequenti in quella zona gli ammassi di limonite, che in certi luoghi, per esempio all'est di A. Erini nel distretto di Selinon, prendono considerevole sviluppo,

« In più luoghi s'aprono dentro ai calcari vastissime e profonde caverne, tra le quali celebre la « grotta di Zani » in cui vanno a perdersi le acque del piano di Omalos, quella stupenda di Melidhoni e quella di Katholiko nell'Akrotiri del Capo Maleka. Alla superficie l'erosione torrenziale ha tagliato nei calcari le cupe gole note in paese col nome di *Pharangi*; veri *cañons* che s'inabissano per centinaia e centinaia di metri fra pareti quasi verticali, così ravvicinate nel fondo da non lasciar passare due uomini di fronte. Numerosissime le doline, tra le quali son gigantesche quelle di Omalos (a 1000 m. s. l. d. m.) e di Askiphou (a 670 m.) negli Asprovouna, che hanno più di cinque chilometri in diametro. Nelle regioni che s'innalzano oltre i 1400 metri, le acque ricche di anidride carbonica provenienti dalla fusione delle nevi, che quivi soggiornano gran parte dell'anno, incidono sui fianchi delle masse calcaree lunghi solchi verticali, terminando per dividerle in guglie bizzarramente sovrapposte, o scavano vaste depressioni crateriformi, una delle quali, situata proprio sulla vetta del Mavro-Aloni, dà a questa montagna l'apparenza di un antico vulcano.

« Nei calcari cretacei i fossili sono tutt'altro che frequenti. Il Raulin trovò solo qualche avanzo di rudiste alla Panaghia-Kristallenia nelle colline interne di Lassiti, tracce di univalvi nei calcari dolomitici di Kastro presso Sphakia, e frammenti di conchiglie nei calcari del Karadagh e del Tsileno. Io, per mia parte, raccolsi un certo numero di avanzi organici al sud-ovest del Capo Liano, verso il fortino di Lazimos-Kampos, nei calcari compatti nerissimi, che stanno immediatamente sopra ai micaschisti verdognoli o cerulei. Erano rudiste mal conservate (*Radiolites* cfr. *acuticostatus* d'Orb. e *R. cfr. lumbricalis* d'Orb.) e sezioni di grandi gasteropodi simili a *Nerita* e *Chemnitzia*. Altri frammenti di rudiste trovai nell'isolotto di S. Teodoro, costituito non già da terreni neogenici, come credeva il Raulin, ma da calcari grigi e neri cretacei. Vidi inoltre qualche dubbio avanzo di nerinee tra i calcari brecciformi di A. Triada nell'Akrotiri di C. Maleka e in quelli subcristallini di Vrissi; tracce di corallari (*Trochocyathus*, *Rhabdophyllia*?) di echinodermi (cidaridi) e di molluschi (*Euspira*, *Cerithium*, *Astarte*) in quelli neri compatti di Armenous a ponente del monte Vrysinas. La selce nera concentrata in noduli e straterelli fra i calcari del Vrysinas ha mostrato, all'esame microscopico, abbondantissime spicule di spongiarie e corpicciattoli sferici che son probabilmente rizopodi.

« Le rocce cretacee dell'isola di Gavdos differiscono sensibilmente da quelle che ho visto a Candia. Son calcari compatti bianchi, giallicci o rosei, con venature spatiche, somigliantissimi alla nostra *maiolica*, ricchi di arnioni e letti di selce bianca, grigia o rossastra, che alternano con schisti argillosi

policromi e con arenaria calcarifera grigia traente al verdognolo. Gli strati s'immergono uniformemente verso nord o nord-est con pendenza di circa 25°, andando a nascondersi sotto alle rocce elveziane, e a sud-ovest mostrano le loro testate in una muraglia che s'innalza verticalmente fino a 370 m. sul mare. Nella *maiolica*, oltre a qualche avanzo di fossili macroscopici, sono abbondanti le globigerine; nell'arenaria i textularidi, i rotalidi, le cristellarie ed altri foraminiferi.

« Le complicazioni stratigrafiche e l'estrema rarità degli avanzi organici non permisero al Raulin di separare dal cretaceo i terreni eocenici, e questi e quello dovettero esser descritti da lui come un gruppo unico, il *gruppo del macigno* e dei *calcari nerastri*. Io non posso riferire con sicurezza all'eocene altro che quei pochi lembi di arenarie, brecciole poligeniche, schisti e calcari argillosi che ho veduto accompagnati dal nummulitico; tali quelli di Kaler-giani sul golfo di Kisamo, di Plakia nella catena litorale al sud dell'eparchia di A. Vasilios, di Galia presso l'Hieropotamos e di Vuria o Vorisa a circa dieci chilometri da Metropolis. Delle rocce basterà dire che riproducono in tutto i caratteri di quelle dell'eocene appennino. Tra i fossili accennerò la *Nummulites perforata* d'Orb., associata con la *N. Ramondi* DeFr., e con individui giganteschi della *N. complanata* Lam. nei calcari grigio-scuri di Kaler-giani, dove anche raccolsi orbitoidi, articoli di *Pentacrinus*, placchette di echinidi e *Lithothamnium* sp. ».

CORRISPONDENZA

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La Società di scienze naturali di Emden; l'Università di Aberdeen; la Biblioteca del Museo nazionale di Buenos Aires; il R. Osservatorio di Edinburgo.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società zoologica di Londra e l'Università di Cambridge.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

dal 3 settembre al 7 ottobre 1894.

Cayley A. — The collected Mathematical Papers. Vol. VII. Cambridge, 1894. 4°.

De Blasio A. — Intorno a tre centurie di pregiudicati napoletani. Napoli, 1894. 8°.

- De Heen P.* — Démonstration expérimentale du caractère purement accidentel de l'état critique. Bruxelles, 1894. 8°.
- Id.* — Détermination de l'influence de la pression sur la chaleur spécifique prise en deça et au de là de la température critique. Bruxelles, 1894. 8°.
- Id.* — Détermination du volume des liquides et des gaz au-dessus de la température critique. Bruxelles, 1894. 8°.
- Id.* — Étude comparative des isothermes observées par M. Amagat et des isothermes calculées par la formule de M. van der Waals. Bruxelles, 1894. 8°.
- Id.* — Note sur les états liquides et gazeux. Bruxelles, 1894. 8°.
- De Nuccio E.* — Agenda medica. 1893. Napoli, 8°.
- Id.* — Guida alle Terme Lettieri, prime acque in Bagnoli. Napoli, 1893. 8°.
- Id.* — Il riscaldamento delle abitazioni in riguardo all'igiene. Napoli, 1892. 8°.
- Id.* — Per una conferenza Morselli 4^a ed. Napoli, 1892. 8°.
- Favaro A.* — Intorno alle Meccaniche di Erone Alessandrino, edite per la prima volta sulla versione araba di Costa ben Luca dal Bar. Carra de Vaux. Venezia, 1894. 8°.
- Fiorini M.* — Il mappamondo di Leonardo da Vinci ed altre consimili mappe. Roma, 1894. 8°.
- Id.* — Le sfere cosmografiche e specialmente le sfere terrestri. Roma, 1894. 8°.
- Giazzi F.* — Intorno all'uso degli elettrometri ad ago che riceve la carica da un filo pescante in un liquido. — Fibra normale di seta - Guaina dell'ago - Crogiuolo protettore. Perugia, 1894. 8°.
- Gümbel v.* — Naturwissenschaftliches aus der Umgebung von Gardone Riviera am Gardasee. München, 1894. 8°.
- Hernández G. A.* — El Teorema de Mr. Fourier como base de la acustica, de la audicion y de la musica (Discurso leído en la Universidad). Zaragoza, 1894. 4°.
- Passerini N.* — Sul rame che si ritrova negli aceti ottenuti con vinacce provenienti da viti trattate con poltiglia cupro-calcica. Nota II. Firenze, 1894. 8°.
- Id.* — Esperienze sopra l'alimentazione dei bachi da seta con foglia aspersa con poltiglia cupro calcica. Nota I. Firenze, 1894. 8°.
- Simmons O. L.* — Development of the lungs of spiders. Tufts College Mass, 1894.
- Weichselbaum A. e De Nuccio E.* — Lo stato presente della batteriologia e suoi rapporti con la medicina pratica. Napoli, 1894. 8°.

Opere donate dalla Biblioteca dell'Università di Liège.

Rapport triennal sur l'enseignement supérieur en Belgique. Années 1889-1891.
Rapports triennaux sur l'enseignement moyen. Années 1858-60 et 1888-90.
Mémoires de la Société des Science du Hainaut V^e sér. t. 1. 2. 3.

de Wulf Maurice — La valeur esthétique de la moralité dans l'art. Bruxelles, 1892.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. 1891.

Biourge Th. — Recherches morphologiques et chimiques sur les grains de pollen. Lierre, 1892.

Janssens Fr. — Les branchies des acéphales. Lierre, 1891.

de Marbaix H. — Étude sur la virulence des Streptocoques, Lierre, 1892.

Grosjean Léonard. — Sur le décylène normal et quelques-uns de ses dérivés. 1892.

Dache J. — Études sur les effets de l'énervation. Bruxelles, 1892.

Seruel V. — Contribution à l'étude de la fermentation du bacille commun de l'intestin. 1892.

Manille Ide. — Anaérobiose du bacille commun de l'intestin. Lierre, 1892.

Bastin A. — Contribution à l'étude du pouvoir bactéricide du sang. Lierre, 1892.

Morelle Aimé. — Étude bactériologique sur les cystites. 1892.

Bérard Edg. — Trois ans de séjour à la clinique ophthalmologique universitaire de Mr. le prof. Fuchs à Vienne. 1892.

Bulletin de la Commission centrale de statistique. Tome XI, 1869. Bruxelles.

Annales des universités de Belgique. Années 1844 à 1863. Bruxelles.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia prima del 21 ottobre 1894.

Meccanica. — *Sulle tensioni in un sistema elastico articolato.*

Nota II di F. SIACCI.

§ 9

« Consideriamo ora un sistema elastico articolato, nel quale alcuni nodi possano ritenersi come fissi od obbligati a rimanere su linee o superficie fisse, o in generale, abbiano coordinate legate da equazioni, oltre quelle che definiscono le l_{rs} , cioè

$$(30) \quad l_{rs}^2 = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2.$$

« Le equazioni di condizione siano

$$(31) \quad A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_k = 0,$$

ove $k < 3n$, ed $A_1 A_2 \dots A_k$ rappresentano funzioni qualunque delle coordinate, o dei lati l_{rs} , tra cui sussistono le equazioni omogenee:

$$(32) \quad \Omega_1 = 0, \dots, \Omega_m = 0, \left[m = \frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6 \right].$$

« Dall'equazione dei lavori virtuali:

$$dU - \sum_{rs} T_{rs} dl_{rs} = 0,$$

(ove U rappresenta la funzione delle forze applicate), considerando $3n - 6$ delle coordinate come funzioni di altrettanti lati scelti ad arbitrio e delle

rimanenti sei coordinate, che designeremo come al § 1, con $c_1 c_2 \dots c_6$, si trae:

$$(33) \quad \begin{cases} T_{rs} = \frac{\partial U}{\partial l_{rs}} + \sum_u \omega_u \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} + \sum_v \alpha_v \frac{\partial A_v}{\partial l_{rs}} \\ 0 = \frac{\partial U}{\partial c_j} + \sum_v \alpha_v \frac{\partial A_v}{\partial c_j} \end{cases} \quad \begin{cases} u = 1, 2 \dots m \\ v = 1, 2 \dots k \\ j = 1, 2 \dots 6 \end{cases}$$

« Queste equazioni sono $\frac{n(n-1)}{2} + 6$, mentre i moltiplicatori ω sono $\frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6$, e i moltiplicatori α sono k . Se adunque si eliminano tutti questi moltiplicatori, restano $3n - k$ equazioni, ove tutto sarà noto tranne le tensioni. Sono propriamente queste $3n - k$ equazioni che noi in seguito intenderemo per equazioni o condizioni di equilibrio, qualunque siano d'altronde le quantità che determinano la posizione del sistema.

« Tornano qui opportune alcune dichiarazioni circa le quantità l e c , di cui sono funzioni la U , le A e le Ω . Le Ω non sono funzioni esplicite che delle l ; se in esse le l si esprimono per le coordinate, le Ω divengono identicamente nulle. La U e le A nelle (33) sono funzioni esplicite tanto delle l quanto delle sei coordinate c (§ 1). Dunque una di queste (supponiamo sia x_1) entra in U , come nelle A , in due modi: esplicitamente ed implicitamente; implicitamente, perchè tutte le l che fanno capo al nodo 1 sono funzioni di x_1 . Noi a scanso d'equivoci, rappresentiamo la stessa quantità in due modi: con c_1 o con x_1 secondochè la consideriamo come quantità esplicita o come implicita: e volendo scrivere la derivata completa di una delle funzioni U o A rispetto ad x_1 , per esempio di A_v , scriveremo

$$(34) \quad \frac{\partial A_v}{\partial x_1} = \sum_s \frac{\partial A_v}{\partial l_{1s}} \frac{\partial l_{1s}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_v}{\partial c_1} = \left(\frac{\partial A_v}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial A_v}{\partial c_1}.$$

« Cerchiamo ora una funzione F delle T , le cui condizioni di massimo o di minimo compatibilmente coll'equazioni d'equilibrio equivalgano a

$$(35) \quad T_{rs} = \epsilon_{rs} (l_{rs} - L_{rs}).$$

Se la F dev'essere massima o minima compatibilmente colle equazioni di equilibrio, siccome esse equivalgono alle (33), dovranno verificarsi queste altre:

$$\sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial T_{rs}}{\partial \omega_u} = 0, \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial T_{rs}}{\partial \alpha_v} + \sum_j \tau_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} = 0,$$

ossia:

$$(36) \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} = 0, \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial A_v}{\partial l_{rs}} + \sum_j \tau_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} = 0,$$

ove $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_6$ sono sei moltiplicatori da determinare dipendenti dalle condizioni (33) scritte in seconda linea.

§ 10.

« Poniamo

$$(37) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \delta l_{rs}, \quad \alpha_j = \delta c_j.$$

I primi membri delle (36) divengono $\delta \Omega_1, \dots, \delta \Omega_m, \delta A_1, \dots, \delta A_n$, che sono tutti nulli se δl_{rs} e δc_j sono incrementi infinitesimi compatibili con l'equazioni (31) e (32). Ciò noi supponiamo; ed allora se vi sono più nodi fissi i, i', \dots , la loro distanza essendo invariabile, le equazioni (31) importano $\delta l_{ii'} = 0, \dots$, e quindi

$$\frac{\partial F}{\partial T_{ii'}} = 0;$$

ciò significa che la funzione F non contiene le tensioni corrispondenti alle aste congiungenti i punti fissi.

« Ciò posto, le (36) saranno soddisfatte da

$$(38) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - L_{rs},$$

se si verificano due condizioni: 1° che gli allungamenti siano infinitamente piccoli; 2° che le lunghezze naturali L_{rs} siano compatibili colle condizioni geometriche del sistema. Quest'ultima condizione significa che, tolte le forze, le tensioni di tutte le aste, tranne quelle, se vi sono, congiungenti i punti fissi, siano tutte nulle, e inoltre che il sistema possa in questo stato appoggiarsi alle superficie, alle linee, e ai punti fissi.

« Date tali condizioni, se le (38) debbono equivalere alle (35) dovrà essere

$$(39) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{E_{rs}}, \quad \text{onde: } F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{E_{rs}} = \text{minimo} \quad (1)$$

cioè il teorema stesso che vale pei sistemi liberi, aggiunta però qui la condizione, che il sistema possa senza tensioni essere collocato sugli appoggi dati.

« Se per esempio, quattro nodi del sistema dovessero appoggiarsi ad un piano, e i quattro nodi prima dell'applicazione delle forze non fossero in un piano, il teorema non sussisterebbe.

(1) Nè qui nè in seguito dimostreremo che le funzioni F sono *minime* e non massime, perchè le dimostrazioni sono sempre analoghe a quella del § 2. S'intende poi sempre che il *minimo* ha luogo compatibilmente coll'equazioni d'equilibrio.

§ 11.

« La condizione relativa alle lunghezze naturali L_{rs} può essere tolta di mezzo, se noi intendiamo che le $l_{rs} - \delta l_{rs}$ siano non le lunghezze L_{rs} , ma le lunghezze delle aste del medesimo sistema in un'altra posizione d'equilibrio, infinitamente vicina all'attuale, sotto altre forze ma cogli stessi appoggi esterni. Allora le (36) sono soddisfatte dalle (37). Se ora diciamo T_{ors} le tensioni corrispondenti a quella posizione, avremo

$$T_{rs} = T_{ors} + \varepsilon_{rs} \delta l_{rs},$$

e quindi le (37) dovendo equivalere a questa, dovrà essere

$$\frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs} - T_{ors}}{\varepsilon_{rs}};$$

onde

$$(40) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}} = \text{minimo},$$

come al § 7. Ed anche qui la funzione F , che rappresenta il lavoro dovuto agl'incrementi delle tensioni nel passaggio da una figura all'altra, è eguale alla somma algebrica dei lavori delle forze esterne ed interne nel passaggio stesso, giacchè questo lavoro è

$$L = \delta U - \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2 - T_{ors}^2}{\varepsilon_{rs}}$$

e dalle (33) ricavandosi

$$\sum_{rs} T_{rs} \delta l_{rs} \text{ ossia } \sum_{rs} \frac{T_{rs} (T_{rs} - T_{ors})}{\varepsilon_{rs}} = \delta U$$

viene:

$$(41) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}}.$$

« Se, tolte tutte le forze, il sistema può essere collocato sugli appoggi si possono prendere per T_{ors} le tensioni del sistema in tale posizione, che in generale non saranno nulle. Se sono nulle si rientra nel teorema precedente (1).

(1) Il quale, come si vede, raramente potrà applicarsi con pieno rigore anche ammesse le deformazioni infinitesime. Applicandolo per approssimazione, si dimostra facilmente che le tensioni che si ottengono in luogo delle vere sono le $T_{rs} - T_{ors}$. Le T_{ors} saranno nella maggior parte dei casi, trascurabili, ma non sempre. Badino in ogni caso gl'ingegneri ai coefficienti di resistenza, ed accolgano colla debita discrezione le parole che il Castigliano scrive nella prefazione del suo libro: « En suivant la nouvelle méthode de calcul qui permet de résoudre toutes les questions sur l'équilibre des systèmes élastiques sans introduire aucune hypothèse, on a l'avantage de pouvoir adopter un plus grand coefficient de résistance, car une des causes qui obligent souvent, dans la pratique, à adopter de petites valeurs pour ce coefficient, c'est l'imperfection des principes sur lesquels on se base pour évaluer les forces élastiques ».

« In ogni caso si potrà considerare come posizione iniziale questa. Togliendo tutte le forze ed alcune aste, le altre potranno prendere la lunghezza naturale, e nello stesso tempo essere appoggiate. Queste aste ridotte alla lunghezza naturale designamole con L_p , e sono quelle che, tese, avevano le lunghezze l_p . Le lunghezze naturali delle altre designamole con L_q . Ora non togliamo alcun'asta, ma immaginiamo modificate le forze esterne in modo, che mentre tutte le aste soddisfano alle condizioni geometriche, le aste l_p prendano inoltre le lunghezze naturali L_p . Queste avranno allora tensioni nulle. Le lunghezze delle altre si potranno determinare con una costruzione geometrica, e saranno diverse da L_q . Siano $L_q + \Delta L_q$; la loro tensione sarà $\varepsilon_q \Delta L_q$. Così la (40) diviene

$$(42) \quad F = \frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p^2}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \frac{(T_q - \varepsilon_q \Delta L_q)^2}{\varepsilon_q} = \text{minimo}$$

formola analoga alla (29), ma in questa le aste L_p sono in numero minore di $3n - 6$ ⁽¹⁾.

§ 12.

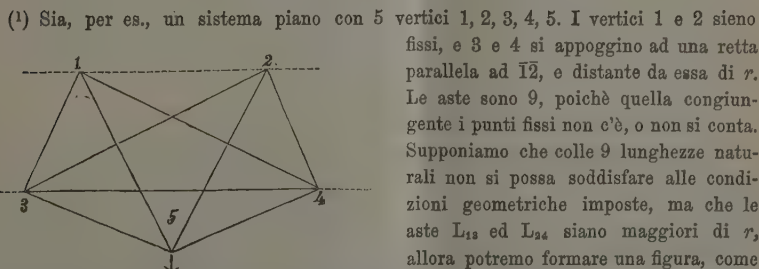
« Poniamo nelle (36)

$$(43) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - \mu_{rs}, \quad \tau_j = c_j - \gamma_j,$$

dove

$$(44) \quad \mu_{rs} = \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_r} \xi_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial x_s} \xi_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_r} \eta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial y_s} \eta_s + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_r} \zeta_r + \frac{\partial l_{rs}}{\partial z_s} \zeta_s,$$

e $\xi \eta \zeta$ sono $3n$ quantità arbitrarie corrispondenti in un modo qualunque alle coordinate $x y z$, e dove γ_j è quella di queste quantità arbitrarie che corrisponde alla coordinata c_j . Abbiamo già veduto al § 5 che le (36) del primo gruppo re-



quella di contro, in cui le quattro aste L_{13} L_{24} L_{15} L_{25} avranno le lunghezze naturali, e delle altre cinque si potranno determinare le lunghezze sulla figura: le loro eccedenze sulle lunghezze naturali saranno le quantità Δ da mettersi nella formola (42).

stano soddisfatte. Mettendo poi l_{rs} sotto una forma simile a quella di μ_{rs} , si trova operando come nel § 4, e ponendo mente alle (34),

$$(45) \quad \sum_r \sum_s \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial A_v}{\partial l_{rs}} + \sum_j \varepsilon_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} = \sum_r \left[\left(\frac{\partial A_v}{\partial x_r} \right) (x_r - \xi_r) + \left(\frac{\partial A_v}{\partial y_r} \right) (y_r - \eta_r) + \left(\frac{\partial A_v}{\partial z_r} \right) (z_r - \zeta_r) \right] + \sum_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} (c_j - \gamma_j) \\ = \sum_r \left[\frac{\partial A_v}{\partial x_r} (x_r - \xi_r) + \frac{\partial A_v}{\partial y_r} (y_r - \eta_r) + \frac{\partial A_v}{\partial z_r} (z_r - \zeta_r) \right].$$

Onde le (36) del secondo gruppo saranno soddisfatte, se le $\xi \eta \zeta$ rendono nulli i secondi membri di queste equazioni.

« Interpretiamo geometricamente tali condizioni. Considerando le $\xi \eta \zeta$ come coordinate di n punti formanti un poligono σ , e dicendo λ_{rs} il lato di σ che congiunge i punti r ed s , μ_{rs} rappresenta la proiezione su l_{rs} di λ_{rs} . Ora se i vincoli esterni del sistema elastico sono nodi fissi, o superficie o linee fisse su cui alcuni nodi debbano rimanere, ciascuna delle (31) conterrà le coordinate di un solo nodo, e rappresenteranno tutte delle superficie, giacchè se un nodo ha da rimanere sopra una linea fissa, è come dovesse rimanere su due superficie ad un tempo, delle quali quella linea è l'intersezione, e se un nodo è fisso è come se dovesse rimanere su tre superficie. Dicendo dunque i il nodo a cui si riferisce una delle (31), le (45) poste eguali a zero daranno

$$(46) \quad \frac{\partial A_v}{\partial x_i} (x_i - \xi_i) + \frac{\partial A_v}{\partial y_i} (y_i - \eta_i) + \frac{\partial A_v}{\partial z_i} (z_i - \zeta_i) = 0,$$

cioè il punto i del poligono σ dee trovarsi sul piano tangente alla superficie A_v nel punto in cui è il nodo i del sistema elastico. E se il nodo i ha da rimanere su una linea fissa, il punto i di σ dovrà essere sulla tangente a quella linea nel punto in cui trovasi attualmente il nodo i ; se finalmente il nodo i è fisso, il punto i di σ dee coincidere con esso. Se il sistema è piano, il poligono σ dovrà essere sullo stesso piano; se, infine, vi sono più nodi fissi i, i', \dots i lati $\lambda_{i i'}$ di σ saranno eguali ai lati $l_{i i'}$: quindi $\mu_{i i'} = l_{i i'}$, e

$$\frac{\partial F}{\partial T_{i i'}} = 0.$$

Ciò significa che F non contiene $T_{i i'}$.

« Per tutte le altre tensioni le (43) dovendo equivalere alle (35), avremo

$$(47) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs}, \text{ ed } F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} - \mu_{rs} \right)^2 = \text{minimo}$$

cioè il teorema stesso del § 5, aggiunte le condizioni del poligono σ .

« Se le lunghezze naturali sono eguali alle μ_{rs} , cioè se esse sono le

proiezioni dei lati del poligono σ sui lati corrispondenti del sistema elastico, allora ha luogo

$$F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\varepsilon_{rs}} = \text{minimo} \quad (1)$$

« La soluzione

$$(48) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \varepsilon_{rs} \left(\frac{T_{rs}}{\varepsilon_{rs}} + L_{rs} \right)^2 = \text{minimo}$$

che, come abbiamo veduto al § 2, ha luogo quando il sistema è isolato, e che corrisponde al caso particolare in cui le $\xi \eta \zeta$ sieno tutte nulle, non regge, in generale, quando esistono appoggi; regge tuttavia, quando le coordinate dei nodi appoggiati soddisfino alle equazioni

$$\frac{\partial A_v}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial A_v}{\partial y_i} y_i + \frac{\partial A_v}{\partial z_i} z_i = 0.$$

Ciò si verifica quando i piani tangenti alle superficie A_v passino per l'origine, e siccome l'origine è arbitraria, possiamo dire che la soluzione (48) sussiste quando i piani tangenti alle superficie nei punti ove trovansi i nodi rispettivi, passano tutte per un punto. Avrà dunque sempre luogo, quando i piani tangenti alle superficie non siano più di tre (*distinti*).

« Se, per esempio, il sistema è piano, ed alcuni nodi debbono rimanere su una retta, alcuni sopra un'altra, gli altri essendo liberi, la (48) sussiste.

« Il teorema adunque rappresentato dalla formula (48) può avere applli-

(1) Da n punti fissi nello spazio partono altrettante aste o cordoni rettilinei che fanno capo in un punto P ($\alpha \beta \gamma$). Applicata a questo capo una forza qualsiasi, esso passa in O ($x_0 y_0 z_0$) ad una distanza finita da P . Le tensioni rendono minima la somma $\sum \frac{T^2}{\varepsilon}$ se i punti fissi (di coordinate $x y z$) si trovano sulla superficie

$$\begin{aligned} & [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2] \\ & = [(x - x_0)(x - \alpha) + (y - y_0)(y - \beta) + (z - z_0)(z - \gamma)], \end{aligned}$$

ove $\alpha \beta \gamma$ sono le coordinate di un altro punto Q , che è il punto del poligono σ . Mettendo l'origine in O , ossia ponendo $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, l'equazione della superficie diviene

$$(x^2 + y^2 + z^2)(2q - 2p) = q^2,$$

essendo

$$p = \alpha \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) + \beta \left(y - \frac{\beta}{2} \right) + \gamma \left(z - \frac{\gamma}{2} \right), \quad q = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

La superficie è dunque di terz'ordine, contiene un punto doppio in O , ed una retta R ($p = 0, q = 0$) perpendicolare al piano OPQ , e che è l'intersezione di due piani, l'uno perpendicolare a OQ e passante per O , l'altro perpendicolare ad OP e passante pel suo punto medio. Tutti i piani $[\lambda(2q - 2p) = q]$, che passano per la retta R , tagliano la superficie secondo cerchi $[x^2 + y^2 + z^2 = \lambda q]$, onde si vede che i punti fissi possono anche stare sopra un cerchio.

cazioni. In queste, ove non siano note le lunghezze naturali, si potranno per esse assumere le lunghezze effettive l , che ne differiscono sempre pochissimo.

« Una soluzione più generale di quella data dalle (43) si presenterebbe ponendo

$$(49) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = l_{rs} - \mu_{rs}, \quad \tau_j = c_j - \gamma_j + b_j,$$

dando alle μ_{rs} e γ_j lo stesso significato che hanno nelle (43), e le b_j essendo sei quantità da determinare. Le equazioni a cui queste sei quantità dovrebbero soddisfare, sono

$$(50) \quad \frac{\partial A_v}{\partial x_i} (x_i - \xi_i) + \frac{\partial A_v}{\partial y_i} (y_i - \eta_i) + \frac{\partial A_v}{\partial z_j} (z_j - \zeta_j) + \sum_j b_j \frac{\partial A_v}{\partial c_j} = 0$$

Parrebbe da queste equazioni che ove le superficie A non fossero più di sei (*distinte*) le $\xi \eta \zeta$ potrebbero assumere qualsivoglia valore, e quindi essere anche nulle: e con ciò, si allargherebbe il campo della soluzione (48). Ma per concludere con sicurezza occorrerebbe penetrare più addentro nelle proprietà delle derivate $\frac{\partial A_v}{\partial c_j}$.

§ 14.

« La supposizione che esistano punti fissi, o linee fisse, o superficie fisse non è diversa da quella con cui si ammettono corpi rigidi ossia distanze invariabili. Ora se la rigidità non si ammette che come un caso limite, non si possono che al medesimo titolo ammettere superficie, linee e punti fissi. In realtà i punti, le linee o le superficie su cui si appoggiano i nodi, si deformano come le aste, con questa sola differenza che mentre le aste si allungano o si accorciano, gli appoggi si comprimono più o meno secondo la loro elasticità e secondo la pressione, opponendo una resistenza eguale e contraria a questa.

« Siccome i punti e le linee sono incontri di superficie, basterà considerare la pressione su superficie deformabili.

« Ritenendo le deformazioni piccolissime, si può ammettere che la resistenza alla compressione sia proporzionale allo spostamento subito dal nodo, nel passare da un punto della superficie non deformata a un punto della superficie deformata, spostamento che si può contare sulla normale all'una o all'altra delle due superficie, giacchè, per ipotesi le due normali fanno tra loro un angolo piccolissimo.

« Siano $x y z$ le coordinate del punto M della superficie deformata, ove trovasi un nodo in equilibrio, ed $x_0 y_0 z_0$ quelle di un punto esterno M_0 preso sulla normale alla stessa superficie deformata. La distanza $M_0 M$, che diremo n , sarà

$$n = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

ed i coseni direttori di $M_0 M$ saranno

$$\frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Sia M' la posizione del nodo prima dell'applicazione delle forze (sulla superficie non deformata, o fuori), e sieno $x - \delta x$, $y - \delta y$, $z - \delta z$ le sue coordinate. La proiezione di $M'M$ su $M_0 M$ sarà:

$$\frac{\partial n}{\partial x} \delta x + \frac{\partial n}{\partial y} \delta y + \frac{\partial n}{\partial z} \delta z$$

che rappresenteremo con δn . Se M' trovasi sulla superficie non deformata, la resistenza P della superficie sarà data da

$$P = \epsilon \delta n$$

essendo ϵ un coefficiente costante determinato o da determinarsi dall'esperienza. Ma, come si è già notato, quando al sistema articolato non sono applicate forze esterne, non sempre tutti i nodi potranno essere collocati sulle superficie non deformate, onde la precedente equazione non potrà ammettersi che in casi particolari.

« Possiamo però sempre ammettere che il sistema prima della posizione d'equilibrio, che consideriamo, si trovasse in altra posizione pure d'equilibrio, sotto altre forze, ma appoggiato alle stesse superficie, deformate o no. Se diciamo P_0 la resistenza o pressione nella posizione precedente, e P la resistenza o pressione nella posizione attuale, avremo

$$P = P_0 + \epsilon \delta n,$$

dove δn è sempre la proiezione sulla normale n della distanza tra le due posizioni del nodo

« L'equazione dei lavori virtuali è

$$\delta U - \sum_{rs} T_{rs} dl_{rs} - \sum_{rv} P_{rv} dn_{rv} = 0$$

ove P_{rv} è la resistenza di una superficie S_v su cui si appoggia il nodo r e dn_{rv} è uno spostamento virtuale contato normalmente alla superficie S_v , come dl_{rs} è l'allungamento dell'asta l_{rs} proveniente dagli spostamenti virtuali dei nodi r ed s , e δU è l'incremento della funzione delle forze applicate dovuto a tutti gli spostamenti virtuali. Per maggior generalità ed uniformità noi supponiamo tutti i nodi appoggiati, ma è chiaro che per i nodi non appoggiati basterà porre le relative P uguali a zero. Altrettanto dicasi delle T : quando due nodi non sono congiunti, ossia un'asta non c'è, la relativa T è nulla.

« Se consideriamo le l_{rs} e le n_{rv} come funzioni delle coordinate, le equazioni d'equilibrio sono

$$(51) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_r} = \sum_s T_{rs} \frac{dl_{rs}}{\partial x_r} + \sum_v P_{rv} \frac{\partial n_{rv}}{\partial x_r} \\ \frac{\partial U}{\partial y_r} = \sum_s T_{rs} \frac{dl_{rs}}{\partial y_r} + \sum_v P_{rv} \frac{\partial n_{rv}}{\partial y_r} \\ \frac{\partial U}{\partial z_r} = \sum_s T_{rs} \frac{dl_{rs}}{\partial z_r} + \sum_v P_{rv} \frac{\partial n_{rv}}{\partial z_r} \end{cases}$$

La posizione d'equilibrio del sistema è conosciuta e quindi in queste $3n$ equazioni tutto è noto, tranne le tensioni che sono $\frac{n(n-1)}{2}$ e le resistenze che sono k . Onde le T e le P si potranno considerare come funzioni di

$$\frac{n(n-1)}{2} - 3n + k$$

quantità indeterminate.

« Abbiamo già veduto, come $3n - 6$ delle coordinate xyz si possono considerare come funzioni dei lati l , e delle sei coordinate rimanenti $c_1 c_2 \dots c_6$. Quindi le normali n si possono considerare come funzioni delle stesse quantità, o in altri termini che tra le n , le l e le c sussistono k relazioni che indicheremo con

$$N_1 = 0, N_2 = 0, \dots, N_k = 0,$$

mentre seguitaremo ad indicare le relazioni tra le l con

$$\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 0, \dots, \Omega_m = 0$$

Ciò posto, dall'equazione dei momenti virtuali, avremo

$$(52) \quad \begin{cases} T_{rs} = \frac{\partial U}{\partial l_{rs}} + \sum_v \alpha_v \frac{\partial N_v}{\partial l_{rs}} + \sum_u \omega_u \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} \\ P_{rv} = \sum_v \alpha_v \frac{\partial N_v}{\partial n_{rv}} \\ 0 = \frac{\partial U}{\partial c_j} + \sum_v \alpha_v \frac{\partial N_v}{\partial c_j} \end{cases}$$

Queste equazioni sono equivalenti alle equazioni d'equilibrio (51).

« È facile ora prevedere la forma di una funzione delle T e delle P le cui condizioni di massimo o minimo equivalgano all'equazioni che danno le tensioni delle aste in funzione degli allungamenti, e le resistenze degli appoggi in funzione delle compressioni. Le condizioni di massimo o minimo di F saranno:

$$(53) \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial \Omega_u}{\partial l_{rs}} = 0 \quad \sum_{rs} \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} \frac{\partial N_v}{\partial l_{rs}} + \sum_v \frac{\partial F}{\partial P_{rv}} \frac{\partial N_v}{\partial n_{rv}} + \sum_j \alpha_j \frac{\partial N_v}{\partial c_j} = 0.$$

« Se ora poniamo

$$(54) \quad \frac{\partial F}{\partial T_{rs}} = \delta l_{rs}, \quad \frac{\partial F}{\partial P_{rv}} = \delta n_{rv}, \quad \alpha_j = \delta c_j$$

ed intendiamo che δl_{rs} , δn_{rv} , e δc_j siano gl'incrementi di l_{rs} , n_{rv} , c_j nel passaggio alla posizione attuale da un'altra in cui erano soddisfatte tutte le condizioni geometriche, le equazioni (53) sono soddisfatte. E siccome quell'equazioni vogliamo che equivalgano a

$$(55) \quad T_{rs} = T_{ors} + \varepsilon_{rs} \delta l_{rs}, \quad P_{rv} = P_{orv} + \varepsilon_{rv} \delta n_{rv}$$

avremo

$$(56) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{(T_{rs} - T_{ors})^2}{\varepsilon_{rs}} + \frac{1}{2} \sum_{rv} \frac{(P_{rv} - P_{orv})^2}{\varepsilon_{rv}} = \text{minimo}$$

« Dunque: nel passaggio di un sistema elastico articolato ed appoggiato da una posizione d'equilibrio ad un'altra, la somma dei lavori di deformazione dovuto agl'incrementi delle tensioni delle aste, e delle compressioni degli appoggi, è minima compatibilmente colle condizioni d'equilibrio relative alla seconda posizione.

« Se tolte le forze, il sistema resta senza tensioni ed appoggiato, la (56) diviene

$$(57) \quad F = \frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{T_{rs}^2}{\varepsilon_{rs}} + \frac{1}{2} \sum_{rv} \frac{P_{rv}^2}{\varepsilon_{rv}}$$

Se invece, tolte le forze, queste condizioni non si verificano, si opererà come al § 11, cioè si prenderà per posizione iniziale quella, in cui alcune aste siano alla lunghezza naturale L_p ed appoggiate senza deformazione degli appoggi, si determineranno geometricamente le lunghezze $L_q + \Delta L_q$ delle altre aste perchè vengano a toccare gli appoggi, e si avrà

$$F = \frac{1}{2} \sum_p \frac{T_p^2}{\varepsilon_p} + \frac{1}{2} \sum_q \frac{(T_q - \varepsilon_q \Delta L_q)^2}{\varepsilon_q} + \frac{1}{2} \sum_{rv} \frac{P_{rv}^2}{\varepsilon_{rv}} \quad (1)$$

(1) Il Castigliano nell'opera citata dopo avere notato a p. 46 che un corpo qualsiasi può considerarsi come un sistema articolato in cui tengano il luogo delle aste, le attrazioni e le ripulsioni tra le molecole che compongono il corpo, estende (a p. 52) l'enunciato del teorema del minimo lavoro nel seguente modo: « *Le forces élastiques qui ont lieu entre les couples moléculaires après la déformation du corps ou du système, sont celles qui rendent un minimum le travail de déformation, eu égard aux équations de conditions qui expriment qu'il y a équilibre entre ces forces autour de chaque molécule* ». Dopo quanto è stato osservato, è chiaro che questo teorema, che l'autore chiama « très important » va modificato, giacchè, com'è qui enunciato, si verificherebbe nella sola ipotesi che due molecole formanti una coppia in un corpo a cui non siano applicate forze esterne, si trovino alla distanza stessa, in cui si troverebbero se fossero isolate. Non so se vi siano corpi solidi in cui questa ipotesi sia ammissibile.

Chimica. — *Ricerche sulla Sordidina*. Nota del Socio E. PATERNÒ, e F. CROSA.

« La sordidina fu scoperta da uno di noi nel 1876 nella *Zeora sordida* ⁽¹⁾ e gli fu assegnata la formola $C_{13}H_{10}O_8$ ⁽²⁾. Avendone constatata la presenza nella *Zeora sulphurea* da noi recentemente studiata ⁽³⁾, ed essendoci riuscito di averne alcuni grammi allo stato di purezza, abbiamo preso l'occasione per studiarla un poco meglio.

« Siamo partiti da circa 900 grammi di estratto etero della *Zeora sulphurea*, che è un miscuglio di acido usnico e della sostanza $C_{27}H_{30}O_9$, con sordidina ed acido rangiformico.

« Sciolto tutto in benzolo bollente, si raccoglie la parte che cristallizza pel raffreddamento, quindi si distilla un terzo circa della benzina, si lascia raffreddare, si raccoglie un'altra porzione di sostanza cristallizzata, che si unisce alla prima e si tratta tutto con alcool bollente. L'alcool usato per questo trattamento si svapora a piccolo volume, il residuo cristallino si tratta con solfuro di carbonio, e si termina di purificare per ripetute cristallizzazioni dall'alcool bollente. Ottenemmo così gr. 25 di sordidina pura, fusibile a 210°.

« Una combustione ci ha dato i seguenti risultati che sono concordanti con quelli ottenuti precedentemente da Paternò:

gr. 0,4874 di sostanza fornirono gr. 0,9350 di CO_2 e gr. 0,1590 di H_2O .

« Cioè per 100:

	Trovato	Calcolato per $C_{13}H_{10}O_8$
Carbonio	52,32	53,06
Idrogeno	3,62	3,40

« A conferma di questa formola abbiamo determinato il peso molecolare col metodo ebullimetrico di Beckmann in soluzione benzolica; la poca solubilità della sordidina nella benzina e nell'acido acetico, non ci permise di avvalerci del metodo crioscopico.

« I risultati ottenuti furono i seguenti:

Concentrazione	Innalzamento termometrico	Peso molecolare	
		trovato	calcolato per $C_{13}H_{10}O_8$
0,74	0°,064	309	294

« Il dott. Luigi Brugnatelli ha avuto la gentilezza di esaminare cristallograficamente la sordidina, e ci ha comunicato quanto segue:

« I cristalli della sordidina, ottenuti dall'alcool, hanno l'aspetto di brevi e sottilissimi aghetti molto brillanti e di color bianco che, esaminati al mi-

(1) Gazz. Chim., t. VI, p. 129.

(2) Ibid., t. XVII, p. 281.

(3) Ibid., t. XXIV, p. 279.

croscopio, si presentano sotto forma di laminette molto allungate e limitate, quando non siano rotte od irregolarmente sviluppate, da contorno esagonale e più raramente rettangolare. Nei cristalli a contorno esagonale gli angoli piani tra i due spigoli paralleli, secondo i quali le laminette sono allungate e gli spigoli corti, furono misurati al microscopio e si ebbero valori molto vicini a 109° .

« Circa i caratteri ottici fu osservato quanto segue :

« L'estinzione è parallela (rispetto alla normale) alla direzione d'allungamento. A luce convergente si nota che la bisettrice acuta è alquanto inclinata, quasi al bordo del campo ottico del microscopio, essendo il piano degli assi ottici parallelo alla direzione di allungamento.

« Per questi caratteri si può quasi con sicurezza concludere che i cristalli di sordidina appartengono al sistema monoclinico e che la forma, secondo le cui faccie essi sono tabulari, appartiene alla zona (010).

« La sordidina fonde fra 209° - 210° , è inattiva alla luce polarizzata; alla temperatura di 22° gr. 100 di alcool ne sciolgono gr. 0,46, e gr. 100 di acetone alla stessa temperatura gr. 4,34; è pure solubile nella benzina, nell'etere acetico ecc..., ma il miglior solvente è l'alcool nel quale si scioglie abbastanza a caldo e quasi niente a freddo; si scioglie pure nell'acido solforico sì fumante che ordinario, riprecipitando inalterato per aggiunta di acqua.

« La potassa e la soda sciolgono la sordidina decomponendola, tantochè per l'aggiunta di un acido precipita una sostanza rossiccia resinosa che si scioglie in tutti i solventi e che non ci è riuscito di cristallizzare.

« La potassa e la soda in soluzione alcoolica diluita (10 %) la sciolgono prontamente a freddo, ed ancor meglio a caldo; la soluzione poi bollita con acqua e trattata con un acido, lascia precipitare una sostanza bianca, che raccolta, lavata e cristallizzata dall'acqua alcoolica si fonde fra 183° - 184° ; l'alcoolato sodico ci ha forniti dei risultati ancora più soddisfacenti, e di questa azione ce ne occupiamo più avanti; bollita per mezz'ora con una soluzione satura di carbonato sodico si scioglie completamente, ma per l'aggiunta d'un acido si separa in gran parte inalterata, trasformandosi solo in piccolissima quantità nella sostanza fusibile a 183° .

« Ossidata con acido nitrico diluito e con anidride cromica in soluzione acetica, si brucia completamente senza dare alcun prodotto caratteristico; fusa con potassa, si decompone profondamente; non reagisce coll'idrossilammina e con la fenilidrazina; non assorbe bromo, si resinifica per l'azione del pentacloruro di fosforo; non dà reazione col percloruro di ferro.

« L'acido iodidrico la riduce decomponendola.

« Una determinazione col metodo di Zeisel ci ha fornito i seguenti risultati: gr. 0,3315 di sostanza dettero gr. 0,2599 di ioduro d'argento.

« Supponendo che si sia formato ioduro di metile si deduce per 100

OCH_3

10,84

numero che corrisponde molto bene alla formola $C_{12}H_7O_7 \cdot OCH_3$ per la quale si calcola

$$OCH_3 \quad 10,54$$

Azione dell'anidride acetica.

« Coll'intento di preparare il derivato acetilico, abbiamo fatto bollire a ricadere gr. 2 di sordidina con gr. 2 di acetato sodico e gr. 8 di anidride acetica per 5 ore; il prodotto della reazione ripreso con acqua, lascia un residuo solido appena colorato in giallo che si lava con soluzione di carbonato sodico, poi si raccoglie, si tratta con alcool a caldo che scioglie la sostanza colorante e quasi niente il prodotto della reazione, il quale viene ripreso con acetone nel quale si scioglie abbastanza a caldo, e per raffreddamento si separa in cristalli bianchissimi in parte opachi ed in parte trasparenti che si fondono fra 236° e 237° e che all'analisi ci fornirono i risultati seguenti:
gr. 0,4770 di sostanza fornirono gr. 0,9142 di CO_2 e gr. 0,1536 di H_2O cioè per 100.

	Trovato
Carbonio	52,26
Idrogeno	3,57

« La teoria per un monoacetilderivato $C_{13}H_9(C_2H_3O)_8$ richiederebbe 53,98 % di carbonio e 3,70 % d'idrogeno.

« I risultati ottenuti invece portano alla stessa composizione della sordidina, per la quale si calcola

Carbonio	53,06
Idrogeno	3,40

e lo studio di questa sostanza mostra infatti, come vedremo, che essa non è altro che un polimero della sordidina.

« Ma prima d'ogni altro daremo luogo allo studio cristallografico fatto con la solita cortesia dal dott. Brugnatelli, il quale ci comunicato quanto segue:

« Anche per questa sostanza a motivo della piccolezza dei cristalli, non fu possibile eseguire che uno studio al microscopio, dal quale risulta che i cristalli appartengono con ogni probabilità al sistema triclino. Essi sono limitati generalmente da tre coppie di faccie, due a due parallele, delle quali due coppie alquanto più sviluppate della terza, cosicchè i cristalli hanno l'aspetto di brevi prismetti terminati da una base inclinata. Assumendo le due coppie di faccie più sviluppate come (100) e (010), e l'altra coppia come (001), si trova che l'angolo piano (100):(001) è uguale a circa $77^\circ,30'$ e l'angolo (010):(001) è uguale circa a 89° . L'estinzione sopra le faccie delle forme (100) e (010) è inclinata, e per (100) la sua direzione fa con (001) un angolo di circa 5° nell'angolo ottuso (010):(001) (A) e per (010) la direzione d'estinzione fa con (001) e nell'angolo ottuso (100):(001) (B) un angolo di circa 39° .

« Dalle faccie di (100) esce un asse ottico all'estremità del campo ottico del microscopio, e dalle faccie di (010) esce di poco inclinata la bisettrice acuta.

« Questo nuovo composto non è affatto solubile nell'alcool alla temperatura di 22° ed è anche pochissimo solubile a caldo; nell'acetone ed alla stessa temperatura se ne sciolgono 0,66 %, mentre a caldo è molto più solubile separandosi pel raffreddamento nelle forme cristalline più sopra descritte e si fonde fra 236° e 237°.

« È pure solubile nel benzolo, nell'acido acetico, ma in proporzioni minori della sordidina.

« Insieme alle ricerche cristallografiche ed ai caratteri fisici riferiti, abbiamo creduto bene di determinare la grandezza molecolare col metodo di Beckman, scegliendo come solvente il benzolo, ed abbiamo avuto i risultati seguenti:

Concentrazione	Innalzamento	Peso molecolare	
		Trovato	Calcolato per $(C_{13}H_{10}O_8)_3$
0,97	0,030	868	
1,93	0,068	886	882

« Questo composto, oltre che per l'azione dell'anidride acetica, si ottiene pure per una lunga ebollizione della sordidina (da 15 a 20 ore) con cloruro di acetile e col cloruro di benzoile, ma in questi casi accanto al polimero si formano pure i derivati acetilico e benzoilico, la cui separazione non è di attuazione tanto facile.

« La soda e la potassa alcoolica lo decompongono abbastanza profondamente, e l'alcoolato sodico fornisce l'acido fusibile a 184° che si ottiene direttamente per la stessa azione sulla sordidina.

Derivato benzoilico.

« L'abbiamo ottenuto facendo bollire a ricadere per un'ora gr. 2 di sordidina con gr. 10 di cloruro di benzoile; la sordidina si scioglie quasi subito senza colorarsi molto e si osserva uno sviluppo lento di acido cloridrico; finita la reazione si versa il prodotto in acqua, si aggiunge carbonato sodico e si riscalda a b. m. sino a decomposizione completa del cloruro, con che si separa una sostanza solida abbastanza colorata che si tratta prima con alcool e poi con acetone bollente, dal qual solvente si separa incolore e ben cristallizzata e si fonde fra 220°-223°.

« L'analisi ci ha forniti i risultati seguenti:

- I. gr. 0,4490 di sostanza fornirono gr. 0,9414 di CO_2 e gr. 0,1504 di H_2O .
- II. gr. 0,4442 di sostanza fornirono gr. 0,9470 di CO_2 e gr. 0,1494 di H_2O .
- III. gr. 0,3408 di sostanza fornirono gr. 0,7160 di CO_2 e gr. 0,1176 di H_2O .

	Trovato		Calcolato per $C_{13}H_8O_8 \cdot C_7H_2O$
	I.	II.	III.
Carbonio	57,17	58,12	57,32
Idrogeno	3,72	3,73	3,83
			60,30
			3,51

« Naturalmente la poca concordanza di questi risultati con la teoria, indurrebbe facilmente a credere che si trattasse qui d'un prodotto di decomposizione più che d'un derivato benzoico, ma, e come più sopra abbiamo avuto occasione di notare, il cloruro di benzoile esercitando un'azione polimerizzante sulla sordidina, accanto al derivato benzoico si è pure formato in piccola quantità il polimero della sordidina, che forse per la piccola quantità che abbiamo avuto per le mani, o per la solubilità simile delle due sostanze, non ci fu dato in nessun modo di separare, dolenti che l'esigua quantità di sostanza ci abbia impedito di tentare la preparazione in una proporzione più grande. Pertanto, ammesso che si tratti qui d'un miscuglio intimo di questi due composti, è facile spiegare l'oscillazione dei risultati analitici riferiti, quando si pensi che il polimero della sordidina non contiene che 53,06 % di carbonio in confronto del 60,30 % che deve contenere il derivato benzoico. Del resto, che si tratti d'un vero derivato benzoico, ce ne siamo assicurati, saponificandolo con alcoolato sodico che lo ha scisso in acido benzoico e nell'acido fusibile a 184° che si ha per l'azione dell'alcoolato sodico sulla sordidina.

« Oltrechè nell'acetone, si scioglie questo derivato abbastanza bene nell'alcool, nel benzolo, e si separa in cristallini prismatici incolori o leggermente bianchi fondentisi fra 222°-223°.

Derivato acetilico.

« Bollendo gr. 2 di sordidina con gr. 20 di cloruro d'acetile, si osserva sviluppo di acido cloridrico che accenna di finire in capo a 4 ore; la sordidina si discioglie subito, ed il liquido si mantiene abbastanza incolore; finita così la reazione si allontana l'eccesso del reattivo, si tratta con acqua che precipita una sostanza solida bianca; questa si lava con poco carbonato sodico e si cristallizza dall'alcool bollente, dal qual solvente si separa subito ben cristallizzata, ma con l'apparenza d'un miscuglio di più sostanze, e difatti la massa era costituita a volte di cristalli trasparenti e duri, a volte di cristalli minutissimi aghiformi e che neppure dopo ripetute cristallizzazioni dall'alcool e dall'acetone, non ci è riuscito di separare; i cristalli più distinti e duri fondevano fra 236°-237° e quelli più minuti verso 198°-200°.

« Malgrado l'impossibilità di separazione di queste sostanze e la mancanza assoluta di dati positivi per arrivare a qualche conclusione nella composizione

chimica di esse, noi riteniamo che, come succede pel derivato benzoilico, anche qui il clororo d'acetile eserciti un'azione polimerizzante più potente ancora del cloruro di benzoile, tanto da darci un miscuglio del derivato acetilico e del polimero.

Azione dell'amalgama di sodio in soluzione acetica.

« Gr. 5 di sordidina sciolti nella quantità sufficiente di acido acetico glaciale si trattano con amalgama di sodio; l'amalgama si aggiunge a poco per volta senza impedire che la massa si riscaldi, e se ne aggiunge tanto sino a che la soluzione si fa satura da lasciar separare l'acetato sodico nel liquido riscaldato in ultimo a b. m.; si tratta poi la massa con acqua che precipita una sostanza fioccosa di color giallo ranciato che si raccoglie, si lava e si cristallizza ripetutamente dall'alcool, dal quale solvente si separa sempre colorata e fonde verso 180°. Trattata per tre o quattro volte con alcool, si riprende poi successivamente per altrettante volte con benzol bollente, e si ottiene così una massa bianca voluminosa di cristallini aghiformi flessibili, che fondono fra 180°-181°, e che analizzati ci hanno forniti i dati seguenti:

I. gr. 0,41,20 di sostanza fornirono gr. 0,8225 di CO₂ e gr. 0,1566 di H₂O.
II. gr. 0,2948 di sostanza fornirono gr. 0,5863 di CO₂ e gr. 0,1157 di H₂O.

« Ciè per 100

	Trovato		Medie
	I.	II.	
Carbonio	54,19	54,24	54,21
Idrogeno	4,22	4,35	4,19

da cui si ricava la formula C₅H₄O₃ per la quale si calcola

$$C = 53,57$$

$$H = 3,57$$

« Abbiamo eseguita la determinazione del peso molecolare di questa sostanza con l'apparecchio di Beckmann, in soluzione benzolica, ottenendone i seguenti risultati:

Concentrazione	Innalzamento	Trovato	Calcolato per (C ₅ H ₄ O ₃) ₃
0,83	0,070	317	336
2,49	0,198	341	

« Secondo queste determinazioni, la formula semplice ricavata dai dati analitici riferiti più sopra, va triplicata; per cui la formola del nuovo composto sarebbe:



« Questa sostanza, come dicemmo, è solubile nell'alcool, nel benzolo ed in quasi tutti i solventi comuni, ma per separarla meglio dalle materie coloranti che l'accompagnano, è conveniente scioglierla nel benzolo e poi aggiun-

gervi a caldo l'etere del petrolio (porzione bollente fra 30° e 50°) finchè il liquido comincia ad intorbidarsi, poi si aggiunge un altro poco di benzolo e si lascia raffreddare; allora la sostanza si separa bianchissima e fonde fra 180° e 181°. Il miscuglio poi di benzolo e ligroina svaporato, abbandona una sostanza rossa cristallizzata in ammassi prismatici durissimi fondentisi a 277°, e di cui, per l'esigua quantità, non ci è riuscito occuparci ulteriormente. Facendo bollire questo prodotto di riduzione per 10 ore con cloruro d'acetile, si osserva da principio un rapido ed abbondante sviluppo di acido cloridrico che decresce man mano senza che per questo il liquido si colori; poscia, distillata la massima parte del cloruro, si tratta il residuo con acqua e precipita una sostanza solida bianca che si lava con poco carbonato sodico e si cristallizza dall'alcool. Per il raffreddamento si separa una sostanza bianca in cristalli laminari fondentisi fra 149°-150°, che analizzammo.

gr. 0,4655 di sostanza fornirono gr. 0,9270 di CO_2 e gr. 0,1798 di H_2O .

« Cioè per 100

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{15}\text{H}_{11}(\text{G}_3\text{H}_5\text{O})_2$
Carbonio	54,30	53,96
Idrogeno	4,29	3,70

« Da questa sola analisi non possiamo arguire che questa sia un derivato acetilico del prodotto di riduzione, tanto più che mancandoci la materia prima per seguitare le ricerche, non ci è riuscito fare adesso una determinazione d'acetile.

Azione dell'alcoolato sodico.

« Nell'alcool, prima raffreddato, abbiamo aggiunto sodio a pezzetti sino ad avere una certa concentrazione, poi senza impedire il riscaldamento abbiamo aggiunto tanto sodio d'avere una soluzione concentrata d'alcoolato; a questa soluzione aggiungemmo gr. due di sordidina ed abbiamo riscaldato per mezz'ora a b. m.: la sordidina si sciolse subito, e trattato con acqua il prodotto della reazione, si neutralizzò con acido solforico diluito che sposta una sostanza leggermente giallastra che si raccolse, si lavò e si cristallizzò da un miscuglio di volumi eguali di acqua ed alcool, da cui si separa in bei cristalli aghiformi e leggermente colorati; i quali purificati ancora per due successive cristallizzazioni si ottengono perfettamente incolori e si fondono fra 182°-183°. Analizzati ci dettero i risultati seguenti:

I gr. 0,3825 di sostanza fornirono gr. 0,7350 di CO_2 e gr. 0,1630 di H_2O ;

II gr. 0,3666 di sostanza formarono gr. 0,7050 di CO_2 e gr. 0,1555 di H_2O .

	Trovato		Calcolato per $\text{C}_{15}\text{H}_{14}\text{O}_2$
	I	II	
Carbonio	52,49	52,42	52,34
Idrogeno	4,94	4,71	4,69

« Ne abbiamo poi determinato la grandezza molecolare col metodo di Beckmann in soluzione benzolica ed eccone i risultati:

Concentrazione	Innalzamento	Trovato	Peso molecolare
			Calcolato per $(C_{18}H_{14}O_8)_2$
1,36	0,065	571	596
2,91	0,135	577	

per cui secondo questi dati bisogna raddoppiare la formula data più sopra:



essendo probabile che la sordidina per azione dell'alcoolato sodico assorba una molecola d'idrogeno e si trasformi in questo nuovo composto.

« Ha reazione nettamente acida alle carte di tornasole, è solubilissimo nell'alcool, nel benzolo, nell'acido acetico, ed il miglior solvente è un miscuglio di volumi eguali di alcool ed acqua da cui si separa in bei cristalli bianchi aghiformi che fondono fra 182° e 183°.

« Si scioglie a freddo nella soda, nell'ammoniaca, nel carbonato sodico, dai quali solventi si separa nuovamente per l'aggiunta d'un acido; le soluzioni però di ammoniaca sono colorate in violetto, e si fanno pure violette se si riscaldano quelle di soda e di carbonato decomponendosi parzialmente.

« Questa sostanza ha carattere veramente acido e le soluzioni di ammoniaca e di carbonato trattate con sali metallici precipitano, dando così per doppia decomposizione dei sali insolubili; quello d'argento riscaldato si decompone colorando la soluzione in violetto intenso. Vista l'impossibilità d'avere dei sali caratterizzabili, abbiamo cercato di eterificarlo sciogliendolo nell'alcool metilico e saturando la soluzione con acido cloridrico, ma l'operazione non ci è riuscita perchè il composto è rimasto inalterato; e così pure ci è fallita l'azione del pentacloruro di fosforo e l'azione dell'ammoniaca nel prodotto della reazione del pentacloruro. Ossidato con permanganato in soluzione alcalina e con acido nitrico diluito ($d = 1,20$) si distrugge completamente.

« Questi sono i risultati delle ricerche che noi abbiamo istituite nella sordidina col pochissimo materiale che avemmo a nostra disposizione (gr. 25); da queste risulta probabilissimo che la sordidina contenga un ossimetile ed un ossidrilile, ma nulla ancora ci è dato di affermare sulla sua costituzione. Se, come speriamo, ci sarà dato di avere una nuova quantità di sordidina, non mancheremo di continuare lo studio di questa sostanza, che sembra molto importante ».

Matematica. — Correzione alla Nota: *Sulle linee assintotiche di una classe di superficie gobbe di genere zero* ⁽¹⁾. Nota di GIULIO PITTARELLI, presentata dal Socio CREMONA.

« Avendo ripreso la trattazione dell'argomento di quella Nota, mi avvidi di un errore intorno al modo di conteggiare certi punti doppi che si rispecchia nella formola 8) che dà il genere dell'assintotica. Dalle parole « ond'essa è del genere » ecc. fino alle parole « multiplo O », la correzione dev'esser fatta come segue.

« ed inoltre in ciascun ramo, che tocca in O un fattor lineare di γ , è una tacnode, cioè in quel punto sono due punti doppi infinitamente vicini, cosicchè in O sono riuniti altri $\mu - n - 1$ punti doppi, tanti quant'è l'ordine della forma γ . Perciò il genere della curva è

$$p = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - \frac{(\nu - 2)(\nu - 3)}{2} - (\mu - m) - (\mu - n - 1)$$

$= m + n - 3 = N - 3$, risultato che coincide con quello della formola 17) della Nota a pag. 232 del precedente fascicolo.

Posto poi $\mu = m$, la curva 7) diviene:

$$k(\alpha\beta)\nu^2\lambda_3^2 - (ab) = 0$$

la quale non è ridotta alla forma *normale*, chè nel punto O figurano ancora le tacnodi. La riduzione invece della 7) si fa, qualunque sia μ , come più giù con reti di curve d'ordine $\nu - 1$ aventi in O lo stesso punto multiplo secondo $\nu - 2$, con le stesse tangenti complessivamente al numero di $2(n - 1) + 2(\mu - n - 1) = 2(\mu - 2)$, passanti semplicemente per i $\mu - m$ punti doppi situati sul lato $\lambda_3 = 0$, per p dei punti di contatto, fuori di O, delle tangenti uscenti da esso O, ed infine per i $\mu - n - 1$ punti doppi infinitamente vicini al punto multiplo O.

« L'ordine ν' della curva trasformata sarà dato dalla:

$$\begin{aligned} \nu' &= \nu(\nu - 1) - (\nu - 2)^2 - 2(\mu - 2) - 2(\mu - m) - p - 2(\mu - n - 1) \\ &= 3\nu - 6\mu + p + 8 = 3(2\mu - 2) - 6\mu + p + 8 = p + 2 \end{aligned}$$

ch'è la conosciuta relazione tra il genere e l'ordine minimo di una curva iperellittica normale ».

⁽¹⁾ Inserita a pag. 291 e seg. di questi Rendiconti, vol. VII, 1° sem., fasc. 9.

Geologia. — *Appunti sopra i terreni neogenici e quaternari dell'Isola di Candia.* Nota ⁽¹⁾ del dott. V. SIMONELLI, presentata dal Socio CAPELLINI.

« I depositi del Miocene medio, nella parte occidentale dell'isola di Candia, son principalmente sviluppati intorno al golfo di Kisamo, nei piani e nelle collinette litorali all'ovest di Canea, nell'Akrotiri del C. Maleka e in quasi tutta la regione che cinge i fianchi nord-est degli Asprovouna. Seguono poi con rare interruzioni lungo la costa settentrionale fino al Capo Kodro, raggiungendo a sud i monti d'A. Vasilios e i primi contrafforti del Psiloriti. All'est di questo sistema montuoso, nella parte centrale dell'isola, occupano l'area vastissima del Temenos, arrivando a levante fino al piede dei monti di Lassiti, a sud fino ai piani di Messara, e a nord fino alla spiaggia di Megalokastron. Formano in generale colline e terrazzi di elevazione assai modesta, in confronto a quella raggiunta dai calcari cretacei. Il punto più alto a cui salga il Miocene nei luoghi da me visitati è il colle d'A. Thomas, a 550 m. sul livello del mare.

« La natura di questi depositi è molto svariata. Le due *facies* predominanti sono l'elveziana e la langhiana, rappresentata questa da marne bianche di mare profondo, quella da calcari nulliporici della zona a laminarie. Ma non mancano neppure le formazioni decisamente litorali (scogliere madreporiche di Prosnero e di Kutù, molasse e puddinghe d'Inia), nè quelle, così dette tortoniane, della zona coralligena (argille di Xopoli e di Miros). Generalmente i calcari nulliporici stanno sopra a tutti gli altri depositi, compresi, come vedremo, certi strati di tripoli e di marne gessifere.

« Per dare un'idea dei rapporti che corrono fra le diverse formazioni, descriverò sommariamente qualcuno fra i moltissimi tagli che ho potuto osservare. — Fra Larani ed Evgeniki ad est del Psiloriti: 1) calcari cretacei, sui quali riposano successivamente, con uniforme pendenza di circa 12° verso est: 2) strati di grossolana puddinga e di molassa con grandi ostriche; 3) marne bianche; 4) puddinga come al n. 2; 5) calcari nulliporici con *Chlamys latissima* Br., *Ostrea crassissima* Lam., *Pholadomya gigantea* Raul.; 6) calcari marnosi a lastre, con *Amussium* cfr. *Philippii*, *Michti* e numerose *Orbitolites*; 7) calcari nulliporici come al n. 5. — Fra Xopoli ed Almyros nell'Apokorona: in alto calcari nulliporici, in basso argille a *facies* tortoniana con *Arca Fichteli* Desh., *Corbula gibba* Olivi, numerose turrítelle etc. — Alla foce dello Stavromeno stanno, in serie discendente: 1) calcari nulliporici; 2) tripoli con ittioliti; 3) marne bianche con *Chlamys Angelonii* Mgh. (*Pecten histrix* Dod.), *Cassidaria echinophora* L., *Terebratulina* aff. *sinuosa* Seg.; 4) tripoli come al n. 2. — Nella

(1) V. pag. 236.

valle del torrente Milos vicino a Retimo; in alto calcari nulliporici, inferiormente marne bianche con bivalvi mal conservate ma certamente marine, e fra le marne ammassi di gesso che i paesani scavano qualche volta. Anche presso il famoso labirinto di Gortyna i calcari nulliporici, con la solita fauna caratteristica, ricoprono marne bianche con gesso saccaroide. — All'isola di Gavidos, sempre in serie discendente: 1) Calcari con *Clypeaster altus* Lam., *Ostrea crassissima* Lam., *Heterostegina* ecc.; 2) marne fogliettate giallastre, con avanzi di pesci e di vegetali (*Laurus*, *Cinnamomum*, *Callitris Brongniarti* Endl.) ricchissime di foraminiferi e di spicule di spongiari; 3) argille azzurrognole con *Cleodora pyramidata* Leach e frammenti di briozoi, e con cristalli sparsi di selenite: 4) sabbie argillose giallognole, con impronte di foglie.

« Sperando di poter presto pubblicare una completa descrizione del ricchissimo materiale raccolto in queste come negli altri terreni di Candia, mi limito ad accennare qui soltanto alcuni fossili più abbondanti o caratteristici.

« Nei calcari: *Heterostegina depressa* d'Orb., *Clypeaster altus* Lam., *C. tauricus* Des., *C. pyramidalis* Mich., *Ostrea crassissima* Lam., *Chlamys latissima* Br., *C. scabrella* Lam., *Pecten aduncus* Eichw., *P. Besseri* Andr., *Cardita Jouanneti* Bast., *Tellina lacunosa* Chmn., *Pholadomya gigantea* Raul., *Strombus coronatus* DeFr. — Nelle marne di mare piuttosto profondo: foraminiferi abundantissimi, *Ostrea cochlear* Poli, *Chlamys spinulosa* Münster., *Amusium denudatum* Reuss, *A. Philippii* Michti, *Arca pectunculoides* Scacchi, *Lima subauriculata* Mont., *Cuspidaria cuspidata* Olivi, *Cleodora pyramidata* Leach, *Cavolinia peraffinis* Seg. — Nelle argille della zona coralligena: *Arca Fichteli* Desh., *Corbula gibba* Olivi, *Conus* cfr. *Puschi* Michti, *Chenopus Uttingerianus* Risso, *Natica millepunctata* Lam., *Turritella* sp. ecc. — Nei tripoli: oltre a numerose bacillariee (*Coscinodiscus*, *Navicula*, *Grammatophora*, *Rhabdonema*, *Biddulphia*, *Triceratium* ecc.) foraminiferi di dimensioni estremamente piccole (*Globigerina bulloides* d'Orb., *Bolivina punctata*, *Virgulina schreibersiana* Czjzek, *Pulvinulica Haueri* d'Orb., ecc.) e radiolari, prevalentemente Cirtoidi e Discoidi, assai ben conservati e di forme in gran parte nuove.

« Le formazioni d'acqua dolce o leggermente salmastra che riferisco al piano levantino, compariscono in aree piuttosto limitate. Le vidi la prima volta all'est di Canea, presso la fortezza di Kalami, dove i calcari cretacei son coperti da calcari bianchi compatti, somigliantissimi a quelli di Daphni in Grecia, tutti pieni d'impronte di dreissene, melanie e *Melanopsis* aff. *costata* Fér. Un altro lembo ricompare a breve distanza, fra Kondopoulo e Malaxa, con calcari giallognoli a lastre, che contengono in copia resti vegetali, *Melanopsis*, idrobie e neritine assai mal conservate. Ritrovai depositi analoghi percorrendo la regione sud-est dell'Apokorona, presso allo sbocco della valle compresa fra le alture di Xopoli e Karamiti da una parte, e quelle di Prosnero dall'altra. Quivi una collinetta alta un centinaio di metri, che

s'allunga nella direzione della vallata, mostra nel suo fianco sud calcari marnosi duri, con qualche fossile di acqua dolce, e più in basso calcari bianchi terrosi che ricoprono marne grigie lignitifere con grandi melanie benissimo conservate, neritine, numerosi ostracodi e girogoniti di *Chara*. Venendo ancora verso levante, s'incontrano, nella valle di Kolipa presso Apostolous, dei calcari a lastre grigi, fetidi sotto il colpo del martello, che contengono le stesse impronte di fossili già vedute a Kalami. Nel fondo del bacino di Paleolutra, cinto tutt'intorno dai calcari cretacei, sotto a potenti strati di una brecciola fatta con tritumi di schisti cristallini, di quarzo e di calcare, legati da cemento marnoso, appaiono argille grigiastre untuose, che contengono i banchi di lignite coltivati al tempo di Mehemet Ali e dove si trova qualche mal conservata melania. Ho seguito quei terreni fin verso Koxares e li ho ritrovati poi tali e quali dopo avere attraversato il Kordalotikon Pharangi nella valle fra i monti Krioneriti e la catena litorale di Preveli. L'argilla untuosa lignitifera di Asomatos, nel fianco nord di questa valle, conteneva discreti esemplari di *Planorbis*, *Hydrobia* ecc., e qualche impronta di foglie di *Sabal*. Un ultimo lembo della formazione medesima si presenta a Khersonesos, sulla costa settentrionale, a circa 25 chilometri da Megalo-kastron, appoggiato verso sud ai calcari cristallini della catena litorale di Pediadha e verso nord ai calcari elveziani. Gli strati levantini, che quivi raggiungono in complesso una potenza di una trentina di metri, son costituiti inferiormente da argille cenerognole gremite di fossili (*Melanopsis abnormis* Jenk., *Goniochilus abnormis* Jenk., *Neritina Spratti* Jenk., *Unio cretensis* Jenk.), quindi da sabbie giallicce quasi sciolte con rare *Melanopsis*, e in alto finalmente da calcari bianchi ad impronte di *Unio* e *Melanopsis*, in tutto identici a quelli di Kalami presso Canea. Non ho visto le alternanze con letti a *Potamides* accennate dal De Stefani, sulla fede di Jenkins, parlando di questo medesimo giacimento ⁽¹⁾.

« I terreni quaternari, prescindendo dai depositi tuttora in via di formazione che colmano certi bacini interni, dalle *terre rosse* e via dicendo, comprendono importanti depositi ossiferi, panchine e grossolani conglomerati che appaiono in più luoghi lungo le coste. Le panchine, costituite da minutissimi frammenti di conchiglie marine e da foraminiferi agglutinati da cemento calcareo, son, principalmente sviluppate presso le coste di Canea e di Retimo. Oltre a numerosi molluschi, delle medesime specie che vivono attualmente nel mare vicino, contengono qualche volta avanzi umani, fra i quali ricorderò lo scheletro quasi completo che M.^r Caporal trovò molti anni fa presso il lazzeretto di Canea, una porzione di cranio, denti ed ossa lunghe in cattivo stato, che io stesso raccolsi vicino al fanale della medesima città. Nella panchina

⁽¹⁾ De Stefani, *Les terrains tertiaires supérieurs du bassin de la Méditerranée*, p. 145. Liège, 1893.

si osservano frequentemente cavità imbutiformi, di 30-40 centimetri in diametro, profonde qualche volta fino a due metri, che sembrano dovute ad un processo simile a quello che originò le marmitte dei giganti. Nell'isola di Gavdos questo deposito si ripete con le stesse modalità, raggiungendo l'altezza di quasi un centinaio di metri sul livello del mare.

« I più considerevoli ammassi di grossolano conglomerato quaternario si vedono lungo la costa di Sphakià fin verso lo sbocco del *Pharangi* di Asphen-tou, in una zona che il Raulin indicò inesattamente come costituita dal Sub-appennino. Son breccie a grossi elementi, per lo più di calcare grigio con selce, identico a quello che costituisce le montagne vicine; formano, sopra gli schisti cristallini, banchi dello spessore di fin 20 metri, inclinati di circa 15° verso il mare. Sembra che raggiungano il massimo sviluppo di fronte agli sbocchi delle numerose gole che dai monti di Kallikrati scendono quasi normalmente verso la costa. — Al nord dell'Akrotiri del C. Maleka vidi i conglomerati grossolani, somigliantissimi a questi di Sphakia, ricoperti dalla panchina che quivi costituisce l'angusta piattaforma litorale.

« La costa di Retimo, fra C. Karakia e Balì, presenta in più luoghi vaste caverne, che s'addentrano nelle rocce mioceniche o cretacee, a 10, 15 m. e più sul livello del mare attuale, ma che certamente debbono l'origine loro all'erosione marina, perchè presentano nelle pareti sfioracchiature di litofagi. Si son depositate in queste caverne, e spesso in strati molto regolari, delle argille rosse miste a frantumi angolosi di calcare e qualche volta anche ad ossami di mammiferi. — Citerò fra questi i magnifici avanzi di *Elephas priscus* (mandibola, omero completo, atlante, diverse coste ecc.) e di cervidi non ancora determinati, che potei raccogliere nelle grotte di A. Antoni, di Kuluridi e di Balì ecc., e che ora fanno parte delle collezioni del Museo di Bologna con tutto il resto del materiale che riportai da Candia.

« Non saprei chiudere questi cenni sommarî sui risultati del mio viaggio senza una parola di ringraziamento a tutti coloro che si adoperarono perchè io potessi compierlo e contribuirono, in un modo o in un altro, a far sì che le mie ricerche non fossero del tutto infruttose; al sen. prof. Capellini, al Ministro d'Italia in Grecia Conte Fè d'Ostiani, al sig. Zanotti Bianco, Console di di Canea, a S. E. Mahmud Pascià governatore di Candia, ai signori Mancuso ed ing. Chilaidis, ed alla intelligentissima e fedele mia guida Alevisos Papalexakis di Atsipopoulo ».

Anatomia. — *Sull'origine del simpatico nei Vertebrati.* Nota del dott. G. MAZZARELLI, presentata dal Socio TRINCHESE.

« Il Balfour ⁽¹⁾ nella sua estesa *Monografia dello sviluppo degli Elasmobranchi*, descrisse l'origine del simpatico. Per questo Autore gli abbozzi dei gangli di questo sistema sono rappresentati, nel *Pristiurus* e in altri Selaci, da cumuli di cellule collocati dorsalmente rispetto alle vene cardinali, e provenienti dai gangli spinali e quindi dall'*ectoderma*. Anzi nella fig. 3 della tav. XVII del suo lavoro, il Balfour rappresenta una sezione longitudinale di un embrione di *Pristiurus*, nella quale scorgonsi dei gangli spinali che si prolungano ventralmente mediante un ramo o cordone nervoso, perpendicolare alla superficie del corpo dell'embrione, cordone nervoso la cui estremità ventrale si rigonfia, abbozzando così un ganglio simpatico. Ma l'origine dei gangli del simpatico dai gangli spinali, successivamente sostenuta dallo Schenk e dal Birdsall ⁽²⁾, che si valsero nelle loro ricerche di embrioni di Uccelli e di Mammiferi, fu più ampiamente dimostrata dall'Onodi ⁽³⁾. Questo autore infatti dal 1884 al 1886 pubblicò una serie di ricerche, istituite particolarmente su embrioni di Selaci e di Uccelli, con le quali egli veniva alla conclusione, che i « gangli del simpatico traggono la loro origine dai gangli spinali e quindi dall'*ectoderma* ». Secondo l'Onodi ciascun ganglio spinale, in un'epoca precoce dello sviluppo dell'embrione si allunga ventralmente, dirigendosi verso le pareti dell'aorta e della vena cardinale corrispondente. Nell'estremità ventrale di questo prolungamento verrebbe a formarsi il ganglio simpatico. Le vedute dell'Onodi, confermate dalle ricerche del Beard ⁽⁴⁾ furono accettate dal Wiedersheim ⁽⁵⁾ ed in seguito, solo però in tesi generale, anche dall'His ⁽⁶⁾. Questo autore infatti in un lavoro pubblicato nel 1890, mentre ammette col Balfour e con l'Onodi

(1) Balfour F. M., *A Monograph on the Development of Elasmobranch Fishes*. London, 1878.

(2) Schenk & Birdsall, *Die Entwicklung des Sympathicus*; in: Mitth. embr. Inst. Wien. Bd. 1. 1879.

(3) Onodi A. D., *Ueber die Entwicklung des sympathischen Nervensystemes*; in: Sitz. v. 15 Juni 1885 der Ungar. Akad. — *Ueber die Entwicklung des Sympathischen Nervensystem*. II. in: Arch. mikr. An. Bd. XXVI. *Die Entwicklungsgeschichte des sympathischen Nervensystems*. Naturwiss. u. Math. Bericht aus Ungar. III. *Ueber die Entwicklung der Spinalganglien und der Nervenwurzeln*. Mathem. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn. II. Sitz. v. 18 Febr. 1884.

(4) Beard J., *Morphological Studies*. II. *The Development of the Peripheral Nervous System of Vertebrates*, in: Quart. Journ. micr. Sc. v. XXIX, n. S. 1888-89.

(5) Wiedersheim R., *Lehrbuch von vergl. Anat. der Wirbelthiere*. Jena, 1886 u. *Grundriss von vergl. Anat. der Wirbelthiere* 3^o Aufl. Jena, 1893.

(6) His W., *Histogenese und Zusammenhang der Nerven Elemente*; in: Arch. f. Anat. u. Physiol. An. Abth. Suppl. Bd. 1890.

l'origine *ectodermica* dei gangli del simpatico, contrariamente alle sue vecchie vedute in proposito ⁽¹⁾, sostiene d'altra parte che la formazione di tali gangli ha luogo per effetto dell'accumularsi di elementi *migrati* dagli abbozzi dei gangli spinali. L'His non crede che, dopo le ricerche dell'Onodi, possa ancora mettersi in dubbio l'origine dei gangli del simpatico dai gangli spinali, ma egli però non ammette che i gangli del simpatico vengano a formarsi per un semplice strozzamento delle estremità ventrali dei gangli spinali prolungati. Pur restando i gangli spinali a livello del canale midollare, avrebbe luogo una particolare emigrazione degli elementi dei medesimi, che ad uno ad uno si dirigerebbero verso le pareti dell'aorta e della corrispondente vena cardinale, per formarvi i gangli del simpatico. Le osservazioni dell'His furono eseguite su di embrioni di gatto. Nel medesimo senso dell'His si esprime, in generale, il Goldberg ⁽²⁾ in un lavoro apparso nel 1891 e così pure nel 1892 di passaggio l'His jun. ⁽³⁾. Parecchi altri Autori hanno infine ammessa l'origine *ectodermica* dei gangli del simpatico unitamente a quella dei gangli spinali e ricorderò tra questi particolarmente il Golowine ⁽⁴⁾ e il Kupffer ⁽⁵⁾, ma nessuno ha più trattato dopo l'His di proposito la quistione dell'origine *ectodermica* dei gangli del simpatico.

« Intanto nel 1891 e nel 1892, cioè dopo il lavoro dell'His, sono apparsi due lavori notevolmente estesi, l'uno del Paterson in Inghilterra ⁽⁶⁾ e l'altro del Fusari in Italia ⁽⁷⁾, secondo i quali l'origine dei gangli del simpatico non dovrebbe più cercarsi tra elementi provenienti ad ogni modo dall'*ectoderma*, ma tra elementi provenienti invece dal *mesoderma*. Anzi le ricerche di questi Autori, eseguite le une su di embrioni di Mammiferi, le altre particolarmente su di embrioni di Uccelli (pollo), dando ragione alle antiche osservazioni del Götte ⁽⁸⁾, e a quelle ancora più antiche dell'His ⁽⁹⁾, menano senz'altro alla

(1) His W., *Untersuchungen über die erste Anlage des Wirbelthieres. — Die erste Entwicklung des Hühnchens im Ei.* 1868.

(2) Goldberg M., *Ueber die Entwicklung der Ganglien bei Hühnchen*; in: Arch. mikr. Anat. 37 Bd. 1891.

(3) His W. jun., *Ueber die Entwicklung des Sympathicus bei Wirbelthieren mit besonderer Berücksichtigung der Herzganglien*; in Verhandl. Anat. Gesellsch. 6^a. Versamml. in Wien. 7. 9 Juni 1892.

(4) Golowine E., *Sur le développement du système ganglionnaire chez le poulet*; in: Anat. Anz. 1890.

(5) Kupffer C., *Die Entwicklung der Kopfnerven der Vertebraten*; in: Verh. Anat. Gesellsch. 5. Versamml. in München. Jena, 1891.

(6) Paterson A. M., *Development of the Sympathetic Nervous System in Mammals*; in. Phil. Trans. vol. CLXXXI. 1891.

(7) Fusari R., *Contribuzione allo studio dello sviluppo delle capsule surrenali e del simpatico nel pollo e nei Mammiferi.* in: Arch. per le Sc. med. XVI. Torino, 1892.

(8) Götte, *Die Entwicklungsgeschichte der Unke.* Leipzig, 1872.

(9) His W., Op. cit. 1868.

conclusione che l'*origine dei gangli del simpatico è del tutto distinta da quella dei gangli spinali*. Mentre infatti i primi secondo gli Autori menzionati sarebbero di origine *mesodermica*, gli altri invece sarebbero di origine *ectodermica*: solo più tardi essi entrerebbero in rapporto tra loro (1).

« Avendo testè intrapreso delle ricerche tendenti ad illustrare nel miglior modo possibile la morfologia del simpatico nella serie dei Vertebrati, ho stimato necessario di cercare sin dal principio di assodare possibilmente l'origine, come si è visto notevolmente controversa, dai gangli del simpatico.

« Le ricerche da me intraprese sono state sinora eseguite su embrioni di Selaci (*Pristiurus*, *Torpedo*), di Anfibi (*Rana*), di Rettili (*Tropidonotus*, *Zamenis*) e di Uccelli (*Passer*). Le osservazioni che ora presento riguardano però in modo particolare embrioni di Passero, materiale gentilmente comunicatomi dall'egregio dott. Cirincione, al quale esprimo i miei più sentiti ringraziamenti.

« Due di questi embrioni, in due stadi consecutivi, mi hanno precisamente servito allo scopo cui miravo. Nel primo di questi la doccia midollare era interamente chiusa e il canale midollare che ne deriva, mentre nella regione anteriore del corpo dell'embrione si era maggiormente affondato nel mesoderma sottostante, nella regione posteriore era restato tuttora aderente all'ectoderma. Gli abbozzi ganglionari laterali vedonsi in questo stadio assai distintamente, rappresentate da cumuli di cellule collocate da ciascun lato in immediato contatto con la porzione latero-dorsale delle pareti del canale midollare. Nella regione posteriore del corpo si scorge nettamente che non v'è ancora alcun accenno di gangli del simpatico. Ma se si esaminano invece le sezioni che interessano la regione anteriore del medesimo, verso il capo, si scorge che tratto tratto dagli abbozzi ganglionari laterali partono dei prolungamenti i quali, perpendicolarmente all'asse longitudinale del corpo, si dirigono ventralmente. Questi prolungamenti sono costituiti di elementi provenienti senza dubbio per proliferazione dagli abbozzi ganglionari. Tali elementi sono abbastanza isolati gli uni dagli altri, dimodochè non costituiscono dei cumuli molto fitti, e trovansi per la loro struttura in uno stadio corrispondente ai « neuroblasti » dell'His. Essi presentano cioè dei processi, anzi si scorge abitualmente un sol processo diretto ventralmente rispetto al corpo dell'embrione. Il loro protoplasma si colora (ematossilina) molto più vivacemente di quello degli elementi mesenchimatici circostanti, e così pure il loro nucleo.

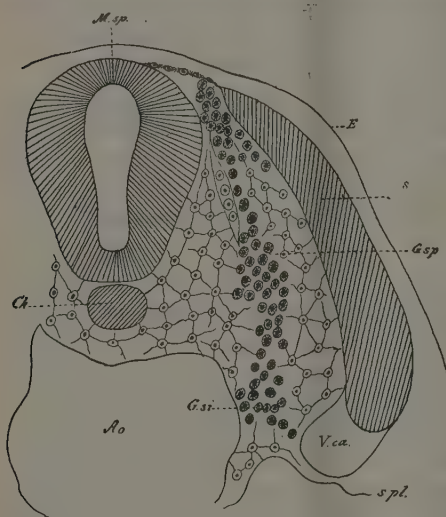
« Infine in qualche sezione, interessante sempre la regione anteriore del corpo dell'embrione, si notano degli elementi affatto simili ai precedenti, e

(1) Lascio da parte per ora le questioni relative alla così detta « nota ganglionare » (*Ganglienleiste* degli autori tedeschi), massime in rapporto con le vedute del Goronowitsch (*Morph. Jahrb.* 20 Bd. 1893) e della Platt (*Arch. mikr. Anat.* 43 Bb. 1894). Di esse mi occuperò, esponendo le mie ricerche in proposito, nel lavoro completo che pubblicherò tra breve.

che sembrano soltanto privi di processi (= cellule germinali [Keimzellen] dell'His), i quali, sparsi qua e là nel mesenchima circostante, si estendono dall'estremità ventrale del prolungamento sopra descritto sino alle pareti dell'aorta primitiva corrispondente, insinuandosi tra queste e quelle della vena cardinale dello stesso lato.

« Nell'altro embrione di passero che ho preso a studiare, e che trovasi in uno stadio di sviluppo più avanzato, si nota che gli elementi ora descritti, aumentati grandemente in numero, non si presentano più rari e lontani gli uni dagli altri, ma invece si accumulano in modo da costituire la continuazione dei prolungamenti ventrali delle note ganglionari.

« A questo stadio di sviluppo si osservano quindi negli embrioni di passero dei « cordoni » simmetrici di elementi nervosi, che partono tratto tratto rispettivamente da ciascun abbozzo ganglionare a livello delle pareti latero-dorsali del canale midollare, si dirigono ventralmente verso le pareti dell'aorta e quelle della corrispondente vena cardinale, e tra le une e le altre terminano



Sezione trasversale semischematica di un embrione di PASSER mostrante l'origine del simpatico. (Sublimate, Ematossilina) - Leitz oc. 3 abb. 7 - Camera lucida Nacet.

M. sp. midollo spinale; *E.* ectoderma; *s. s.* somite; *G. sp.* ganglio spinale; *V. ca.* vena cardinale; *s. pl.* somatopleura; *G. si.* ganglio simpatico; *Ao.* aorta; *Ch.* corda dorsale.

rigonfiandosi in modo particolare (vedi la figura). Questa sorta di « cordone », osservato nelle sezioni che interessano la regione anteriore del corpo di questo medesimo embrione, si presenta nettamente diviso in due in senso trasversale. Di esso non restano quindi gradatamente che la porzione dorsale (*G. sp.*) e la ventrale. La prima, notevolmente rigonfiata, a livello della parete laterale del canale midollare, costituisce l'accenno di un ganglio spinale, l'altra (*G. si.*), rigonfiata anch'essa, collocata tra le pareti dell'aorta e quelle della vena cardinale corrispondente, costituisce invece l'abbozzo di un ganglio simpatico. Questo fatto del distaccarsi tra loro delle due porzioni dor-

sale e ventrale di un cordone trasversale, che, come abbiamo visto, avviene relativamente tardi nello sviluppo dell'embrione è stato invece considerato come precoce dal Paterson e dal Fusari. Questi due autori credono che lo stadio da loro rappresentato nel pollo e nei Mammiferi, e che

corrisponde all'ultimo da me descritto, sia lo stadio « iniziale » dello sviluppo del simpatico. Siccome in questo stadio il simpatico è ben distinto dal ganglio spinale da cui ha tratto origine, e trovasi quasi del tutto circondato dal mesoderma, così i due autori menzionati hanno creduto di poterne trarre la conclusione « che l'origine del simpatico è affatto distinta da quella dei gangli spinali », e che i gangli del simpatico si formano « per differenziamento dei nuclei delle protovertebre » (Fusari), e quindi nel mesoderma. Evidentemente nè il Paterson nè il Fusari sarebbero giunti a tali conclusioni se avessero potuto studiare degli stadi di sviluppo meno avanzati.

« Solo più tardi i singoli abbozzi dei gangli del simpatico, riunendosi tra loro in senso longitudinale, vengono a costituire i così detti « cordoni limitrofi del simpatico » — che il Paterson considera come primitivi —, da cui poi si differenzieranno i gangli simpatici definitivi.

« Da queste osservazioni io credo di poter concludere in primo luogo, che l'origine dei gangli del simpatico dai gangli spinali, e quindi dall'ectoderma, non può più ormai esser messa in dubbio. In secondo luogo poi, quanto alle modalità di quest'origine, io credo poter affermare, che essa ha luogo mediante una proliferazione in senso ventrale dagli abbozzi ganglionari. Gli elementi che si producono per effetto di questa proliferazione, gradatamente si vanno accumulando dorsalmente, e poi a poco a poco si estendono sin verso le pareti dell'aorta e quelle delle vene cardinali. Essi dapprima sono sparsi qua e là nel mesenchima in modo da giustificare pienamente le osservazioni dell'His. In seguito però, moltiplicandosi maggiormente, tutti questi elementi vengono a costituire un vero « cordone » nel senso voluto dall'Onodi, cordone che l'His non ha osservato nei Mammiferi, ma di cui a torto egli non ammette l'esistenza, perchè esso esiste invece, come scorgesi nella figura sopra riportata, ed io l'ho osservato anche, in modo evidentissimo, nel *Pristiurus*, dove è stato ben descritto dall'Onodi.

« Questo cordone poi strozzandosi trasversalmente nel modo voluto dall'Onodi dà origine dorsalmente a un ganglio spinale, ventralmente a un ganglio del simpatico.

« Le suesposte osservazioni sono state ripetute, oltre che su embrioni di Selaci (*Pristiurus*, *Torpedo*) anche su embrioni di anfibì (*Rana*) e di Rettili (*Tropidonotus*), e dovunque sono abbastanza evidenti i « cordoni nervosi trasversali » perpendicolarmente disposti rispetto all'asse longitudinale dell'embrione. Solo è da notare che il numero degli elementi che proliferano con direzione ventrale dagli abbozzi ganglionari laterali, è molto maggiore nei Selaci e scema gradatamente procedendo verso gli Uccelli. È probabile che nei Mammiferi esso sia ancora minore che negli Uccelli, in modo tale da lasciar sospettare in questi animali l'esistenza di un processo di emigrazione (His) che d'altra parte probabilmente non è che apparente ».

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio straniero N. PRINGSHEIM, mancato ai vivi in Berlino il 6 ottobre 1894; apparteneva il defunto Socio all'Accademia dal 7 novembre 1893.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 novembre 1894.

F. BRIOSCHI Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Terremoto calabro-messinese del 16 novembre 1894.* Nota del Socio P. TACCHINI.

“ Sul movimento sismico verificatosi avant'ieri in Sicilia e Calabria ulteriore-prima pervennero all'U. c. di meteorologia e geodinamica in Roma le seguenti notizie telegrafiche relative alle tre fasi del fenomeno:

16 nov. 6^h.15^m. Reggio-Calabria. Scossa ondulatoria N.S.

” 6. 15. Messina. Scossa ondulatoria NW-SE, durata 4^s avvertita generalmente. Mineo scossa leggera.

16 nov. 18^h.52^m. Messina. Intensissima scossa sussultoria-ondulatoria durata 10^s circa: continuano intervalli numerose altre scosse di intensità decrescente, accompagnate da rombi. Moltissime case assai lesionate, qualche individuo ferito.

” 18.55. Reggio-Calabria. Violenta scossa, seguita da altre 3 leggere, con spavento nella popolazione. A Gerace-calabro la popolazione uscì all'aperto. A Palmi Seminara, S. Eufemia, S. Procopio, gravi danni agli edificî e vittime.

16 nov. 18^h.59^m. Stromboli. Scossa fortissima ondulatoria, durata 10^s. Case lesionate, chiesa e campanile più gravemente.

" 18.55. Zafferana Etnea. Fortissima scossa ondulatoria E. W, 8^s. Panico generale.

" 18.55. Acireale. Forte scossa sussultoria-ondulatoria durata 10^s. Panico generale.

" 19. 0. Milazzo. Forte scossa sussultoria-ondulatoria 15^s. Nessun danno, popolazione allarmatissima.

" 18.52. Catania. Scossa forte sussultoria-ondulatoria NE-SW, forte pure a Giarre, Belpasso, Biancavilla, Palagonia, mediore Nicolosi, Viagrande, avvertita pure S. Venerina e Vizzini, e fortissima Randazzo, Linguaglossa, Bronte, Paternò.

" 18.56. Mineo. Tre scosse sussultorie-ondulatorie SE-NW; l'ultima più forte avvertita intera popolazione che uscì all'aperto.

" 18.51, Cotrone. Lieve scossa ondulatoria.

" 19. 0. Catanzaro. Forte scossa di terremoto, avvertita pure in parecchi comuni della provincia.

" 18.50. Tiriolo. Scossa ondulatoria.

" 18.53. Ischia. Ondulazioni sismiche avvertite istrumenti.

" 18.54. Benevento. Agitazione istrumenti sismici.

" 18.53. Rocca di Papa. Movimento sismico, indicato dagli apparecchi registratori.

" 18.52. Roma C. R. Movimento sismico, indicato dagli apparecchi registratori.

" 19. 0. Siena. Grandi oscillazioni microsismografiche.

" 18.56. Pavia. Prime ondulazioni sismiche.

" 23.20. Milazzo. Scosse di terremoto. Panico nella popolazione.

" 23.35. "

" 23.24. Scosse minori a Lipari, Messina, Randazzo, Linguaglossa, Palagonia, Vizzini, Acireale.

" 23.27. A Catania e Mineo avvertita scossa ondulatoria meno intensa della precedente.

" 23.41. Stromboli, scossa più leggera della precedente.

" 23.38. A Tiriolo altra scossa.

17 nov. 1^h.40^m. Milazzo. Avvertite scosse di terremoto.

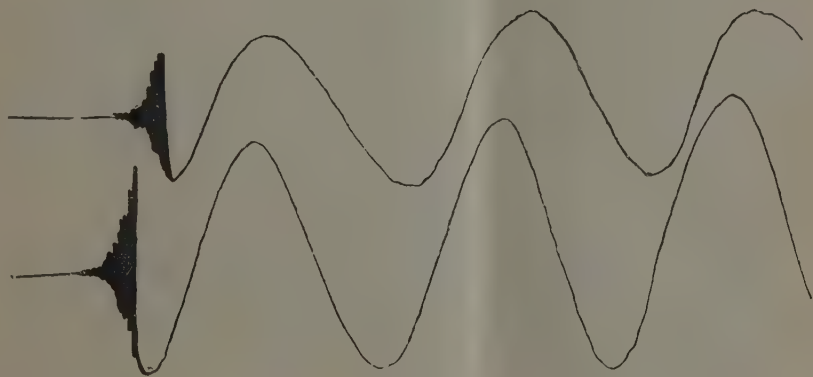
" 2.30. "

" Reggio Calabria, nel mattino altre scosse forti.

" Nel mattino fino a 7^h $\frac{1}{2}$ scosse leggere a Lipari, Messina, Palagonia, Mineo e Vizzini.

" Dai dati contenuti nei surriferiti telegrammi risulta chiaro, che si

tratta di un terremoto disastroso localizzato e che non si estende con carattere rovinoso al di là della costa di Messina per lo stretto fino a Palmi, e che per ciò fa ricordare il grande terremoto del 1783, che riuscì ben più disastroso, specialmente sul versante occidentale della provincia di Reggio-Calabria e nel Valdemone, cioè nella piana di Messina e nelle Eolie pure come nel caso presente. E da notarsi poi, che in questa occasione i vulcani etneo-eolici non presentarono fenomeni straordinari secondo quanto fino ad ora ci fu telegrafato. Presento intanto all'Accademia il diagramma ottenuto dal sismonotrografo a doppia velocità, ideato dal dott. Agamennone e di cui altra volta ho intrattenuto l'Accademia stessa. In detto diagramma si vedono nel modo migliore le successive oscillazioni del pendolo, mentre sulle stesse tracce si discergono i piccoli spostamenti dovuti realmente alle vibrazioni del suolo, così che solo queste piccole irregolarità devono prendersi in conto per determinare le oscillazioni del terreno, mentre col sistema finora usato di piccole velocità di scorrimento una cosa si sovrappone all'altra senza possibilità di separazione; con ciò resta così provato, che per risolvere alcune interessanti questioni di sismologia, si rende assolutamente necessario l'impiego di un apparecchio eguale o analogo a quello ora in prova al Collegio Romano, il cui pendolo ha la lunghezza di 16 metri e la massa chilogrammi 200.



« Solo dopo 2 minuti, cioè a 18^h.54^m.25^s, dal principio del movimento sismico si osservano le ondulazioni di grande ampiezza, causate appunto dal fatto della grande velocità della carta, che non poté aver luogo subito, perchè appositamente tenuto l'istrumento in queste condizioni necessarie nell'at-

tuale suo collocamento provvisorio nella torre. Delle due curve, la superiore si riferisce alla componente NW-SE e l'inferiore alla NE-SW; si deve notare che lo spostamento delle due curve è dovuto al fatto che le pennine scriventi non possono tenersi allineate. L'ampiezza delle grandi ondulazioni nella figura corrisponde precisamente a quella del pendolo, mentre, come fu avvertito, i varî e piccoli movimenti dell'edificio sono indicati dalle dentellature, che si trovano nelle curve stesse e che nel diagramma originale sono naturalmente più distinte ».

Chimica. — *Sul polimero dell'epicloridrina.* Nota del Socio E. PATERNÒ.

« In una Nota pubblicata alcuni mesi addietro insieme al prof. V. Oliveri ⁽¹⁾ abbiamo riportato con riserva alcune determinazioni crioscopiche da me fatte nel 1889, allo scopo di determinare il peso molecolare del polimero dell'epicloridrina, e nel trascrivere le quali, evidentemente dovette incorrersi in qualche errore. Ho creduto perciò necessario di ripetere tali esperienze, ed anzi ho determinato il peso molecolare del polimero dell'epicloridrina col metodo crioscopico, in soluzione nella benzina e nell'acido acetico, e col metodo ebulliometrico in soluzione benzolica.

« Il polimero dell'epicloridrina fu preparato come è indicato nella cen-
nata Nota. Una porzione (A) fu purificata sottoponendo il prodotto all'azione prolungata del vapor d'acqua per eliminare l'epicloridrina che conteneva, un'altra porzione (B) fu invece purificata sciogliendo il prodotto, prima ben lavato con soluzione di carbonato sodico ed acqua, in alcool, filtrando, svaporando l'alcool, riscaldando per un quarto d'ora a 130° e finalmente abbandonandolo nel vuoto sopra l'acido solforico per parecchi giorni.

« All'analisi si ebbero i seguenti risultati:

- I. Porzione A. gr. 0,3752 di sostanza diedero gr. 0,5438 di AgCl, ossia gr. 0,1345 di cloro;
- II. Porzione B. gr. 0,4645 di sostanza diedero gr. 0,668 di AgCl, ossia gr. 0,1654 di cloro.

« E per 100 parti:

	trovato	calcolato
	I	II
Cloro	35,84	35,60
		38,37.

(1) Gazz. Chim. T. XXIV, parte I, p. 305.

« Si vede adunque che il prodotto non era purissimo, cosa del resto difficile a conseguirsi.

« Per il peso molecolare si ebbero i risultati seguenti:

I. *Determinazioni crioscopiche in benzina.*

Porzione A

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare	Peso molecolare
1,847	0°,220	0,119	11,007	420,17
3,805	0,390	0,103	9,527	
7,922	0,695	0,088	8,140	
13,252	0,830	0,062	5,735	
22,914	1,300	0,057	5,272	1086,9
35,557	1,640	0,046	4,225	

Porzione B

2,017	0°,220	0,109	10,082	458,71
6,657	0,585	0,088	8,140	
12,484	0,895	0,072	6,660	
24,283	1,46	0,060	5,55	
44,646	2,13	0,047	4,337	1063,83

II. *Determinazioni crioscopiche in acido acetico.*

Porzione A

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Coefficiente di abbassamento	Abbassamento molecolare	Peso molecolare
2,395	0°,30	0,125	11,56	312

Porzione B

1,213	0°,14	0,115	10,637	339,13
4,124	0,425	0,103	9,527	
8,919	0,84	0,094	8,695	
20,842	1,84	0,088	8,140	
37,716	3,185	0,082	7,585	475,61

III. *Determinazioni ebulliometriche in benzina.*

Concentrazione	Innalzamento termometrico	Coefficiente d'innalzamento	Innalzamento molecolare	Peso molecolare
0,67	0°,033	0,049	181,30	550
1,92	0, 140	0,072	266,40	367
2,99	0, 200	0,066	244,20	400
3,98	0, 268	0,067	247,90	397
5,29	0, 380	0,071	259,00	372

« I pesi molecolari sono stati calcolati scegliendo 50 per costante della benzina e 39 per l'acido acetico.

« Il peso molecolare dell'epicloridrina C_3H_5ClO è 92,5 e perciò si ha per

$(C_3H_5ClO)_3$	277,5
$(C_3H_5ClO)_4$	370,0
$(C_3H_5ClO)_5$	462,5.

« Confrontando questi numeri con i risultati ottenuti, a noi sembra possa prima d'ogni altro escludersi che si tratti d'un polimero trimolecolare dell'epicloridrina; tutto fa invece supporre che il polimero sia invece tetramolecolare e corrisponda perciò alla formola $C_{12}H_{20}Cl_4O_4$.

« Una conseguenza importante che si trae dal comportamento crioscopico di questa sostanza in soluzione benzolica, è che essa ha funzione marcata-mente alcoolica. Il p. m. che è di poco più di 400 per una concentrazione di circa il 2 %, sale rapidamente e perviene a più di 1000 per una concentrazione del 35 %.

« Questo comportamento, come è stato provato da me fin dal 1889 e recentemente confermato da K. Anwers, è caratteristico delle sostanze a funzione alcoolica e può servire alla loro diagnosi.

« In quanto alla costituzione di questo polimero dell'epicloridrina, per le difficoltà di averlo completamente puro e per la natura dei derivati che fornisce, non sono in grado, per ora, di poter aggiungere gran cosa.

« Dirò soltanto che il cloro ch'esso contiene si presta facilmente al doppio scambio. L'epicloridrina trattata con potassa alcoolica fornisce quantitativamente l'etere bietilico della glicerina $CH^2.O C_2H_5.CH.OH.CH_2.O C_2H_5$; il polimero reagisce similmente, già a freddo con la potassa alcoolica al 10 %; si separa abbondantemente del cloruro potassico, e resta in soluzione nell'alcool un'olio che distilla alla pressione ordinaria fra 250° e 300° scomponendosi un poco. Questa sostanza non è però affatto priva di cloro, del quale

non perde le ultime tracce nemmeno per la ebollizione con un eccesso di potassa alcoolica. Il prodotto da me ottenuto conteneva ancora 1,47 % di cloro.

« Esso è però senza dubbio un derivato ossietilico. Una determinazione di ossietile fatta col metodo di Zeisel fornì

$$52,68 \% \text{ di } \text{OC}_2\text{H}_5.$$

« Però è chiaro che in questa determinazione il ioduro d'argento doveva contenere cloruro, proveniente dal cloro tuttora contenuto nella sostanza. Non è quindi improbabile che si tratti d'un composto $\text{C}_{12}\text{H}_{20}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4\text{O}_4$ e per il quale si calcola: 44,11 % di $\text{O}, \text{C}_2\text{H}_5$ ».

Astronomia. — *Osservazioni ed elementi ellittici di (303) Josephina in IV^{ta} opposizione.* Nota del Corrispondente E. MILOSEVICH.

« Del pianetino (303) Josephina vi è una mia Nota, presentata dal prof. Blaserna, e inserita nel Rendiconto di questa Accademia del primo marzo 1891, giusto all'epoca, nella quale lo scopersi (12 febbraio 1891). Gli studi orbitali, e i risultati delle perturbazioni per Giove e Saturno, trovarono posto in una serie di Note inserite nel Giornale degli Spettroscopisti italiani e nelle Astronomische Nachrichten. L'ultima di quelle porge gli elementi osculanti in IV^{ta} opposizione, che sono i seguenti:

$$T = 1894 \text{ ottobre } 2,0 \text{ Berlino (equinozio medio 1892.0)}$$

$$M = 314^\circ 59' 20''.4$$

$$L = 14 \quad 3 \quad 16.2$$

$$\pi = 59 \quad 3 \quad 55.8$$

$$q = 3 \quad 39 \quad 53.8$$

$$\mu = 643''.77066$$

$$\log a = 0,494184$$

$$\Omega = 345^\circ 14' 17''.5$$

$$i = 6 \quad 54 \quad 28.9$$

« Con questi elementi, e in base ad una effemeride pubblicata nelle A.N. il pianeta venne osservato in IV^{ta} opposizione da Charlois a Nizza il 20 settembre 1894, da Cerulli a Teramo il 23, e da me il 3 e 5 ottobre.

« Il luogo normale che risultò da queste osservazioni è (1894.0) 1894

Sept 28 12^h B $\left\{ \begin{array}{l} 0^h 25^m 58^s.28 \\ + 7^\circ 9' 30''.0 \end{array} \right.$ e la correzione alla mia effemeride fu:

$$\Delta \alpha \cos \delta (0 - C) = + 4^s.66$$

$$\Delta \delta = + 46''.4.$$

« L'opposizione di quest'autunno era favorevole per la correzione degli elementi, e le piccole correzioni geocentriche avvertono che gli elementi hanno bisogno di piccole modificazioni, le quali vennero da me apportate coi metodi noti in astronomia, e il nuovo sistema osculante in IV^{ta} opposizione è diventato il seguente:

T = 1894 ottobre 2,0 Berlino (equinozio 1892.0)

(Sistema nuovo meno sistema precedente)

M = 315° 3' 8".5	(+ 3' 48".1)
L = 14 4 0. 3	+ 0 44. 1
π = 59 0 51. 8	— 3 4. 0
φ = 3 39 59. 0	+ 5. 2
μ = 643".81632	+ 0".04566
Ω = 345 14 1. 1	— 16. 4
i = 6 54 28. 6	— 0. 3

« Se si mettono in conto le perturbazioni già calcolate si ottengono quattro sistemi osculanti alle quattro opposizioni già revolute, i quali rappresentano bene le osservazioni da febbraio 1891 a ottobre 1894.

« Così ad es.: I nuovi elementi osculanti in III^{za} opposizione rappresentano il luogo normale 1893 agosto 11,5 coi residui minimi + 0".13; — 1".6 (0—C), e quelli scritti or ora rappresentano il luogo normale sopra citato coi residui pur minimi e di segno diverso — 0".13; + 1".5.

« Si deve quindi concludere che gli elementi così corretti debbono essere assai vicini ai veri. Una quinta opposizione permetterà, dopo il calcolo delle perturbazioni, di sottoporli alla prova delle osservazioni ».

Chimica. — *Sull'ossidazione dell'acido canforico* (1). Nota del Corrispondente L. BALBIANO.

« Nell'ultima Nota (2) scritta su quest'argomento ho stabilito, che il prodotto principale dell'ossidazione dell'acido canforico col permanganato potassico in soluzione alcalina ed alla temperatura ordinaria, era un'acido bibasico $C^8H^{12}O^5$ di cui descrissi allora le proprietà fisiche ed un sale di calcio cristallizzato con 2 mol. di acqua.

« Ho ossidato ora un kg. di acido canforico nelle condizioni prima esposte (3) ed ho ottenuto gr. 180 di sale calcico dell'anzidetto acido, seccato a 100°-140°, cioè privo dell'acqua di cristallizzazione e nello stesso tempo ho recuperato gr. 450 di acido canforico inalterato; perciò dei 550 gr.

(1) Lavoro fatto nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Roma.

(2) Rend. Acc. Lincei. Vol. II, 2° sem., p. 240.

(3) Idem. Vol. I, p. 278.

di acido canforico che hanno subito l'ossidazione, il 27 % s'è trasformato in acido $C^8H^{12}O^5$.

« Ho modificato l'estrazione del nuovo acido nel modo seguente :

« Dopo aver eliminato colla distillazione in corrente di vapor d'acqua gli acidi volatili dalla massa degli acidi sirroposi ottenuta mediante estrazione con etere, la soluzione acquosa degli acidi fissi, si neutralizzò esattamente con idrato sodico, ed alla soluzione diluita e riscaldata a 60°-80° si aggiunse una piccola quantità di soluzione di cloruro calcio al 15 %. Si filtrò dalla piccola quantità di ossalato di calcio formatosi e nella soluzione limpida si versò un eccesso della soluzione di cloruro di calcio. Riscaldando all'ebollizione per qualche tempo, incominciò il deposito del sale di calcio $C^8H^{10}O^5Ca, 2H^2O$, che si completò col raffreddamento della massa. Per evitare l'impiego di grandi quantità d'acqua nelle cristallizzazioni, sciolsi tutto il sale di calcio nella quantità strettamente necessaria di acido cloridrico diluito, indi riprecipitai il sale di calcio neutralizzando la soluzione calda con idrato sodico. Ripetendo un paio di volte quest'operazione lo ottenni perfettamente puro.

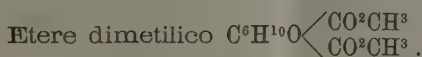
« Analisi :

trovato	calcolato per $C^8H^{10}O^5Ca, 2H^2O$.
14,02-14,07	H ² O 13,74
17,64-17,90	Ca 17,69.

« L'acido libero presenta i caratteri descritti nella Nota citata (2).

« Analisi :

trovato	calcolato per $C^8H^{10}O^5$
C 51,03 H 6,90	C 51,06 H 6,38
C 51,05 H 6,59	



« Si ottenne saturando con acido cloridrico gassoso e secco una soluzione di 30 gr. di acido in 36 gr. di alcole metilico, non impedendo il riscaldamento che si produce nella reazione ed abbandonando per 48 ore la miscela alla temperatura ordinaria. In queste condizioni si eterificò solo il 55 % nell'acido e si produsse esclusivamente l'etere dimetilico.

Analisi :

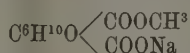
trovato	calcolato per $C^{10}H^{16}O^5$
C 55,41	C 55,55
H 7,64	H 7,40.

« Quest'etere è un liquido denso, incolore, di odore aggradevole resinoso, di sapore pungente; insolubile nell'acqua, solubile nell'alcole e nell'etere. Bolle indecomposto alla pres. di 20 mm. di mercurio alla temperatura cor-

retta di 164°-165°. Il suo peso specifico a 15° riferito all'acqua a 15° è 1,145. Raffreddato a -10° diventa vischioso, ma non si solidifica.

« L'acido rimasto inalterato venne convertito in sale di calcio e mediante frazionamento di questo sale si constatò l'omogeneità dell'acido residuo.

« Saponificando l'etere dimetilico colla quantità richiesta di alcoolato sodico in soluzione alcoolica, perchè si formasse un sale



si ottenne invece il sale sodico neutro $\text{C}^6\text{H}^{10}\text{O}(\text{CO}^2\text{Na})^2$ ed etere inalterato.

« Per dimostrare la presenza di un' ossidirile alcoolico nell'acido $\text{C}^8\text{H}^{12}\text{O}^5$ se ne preparò i derivati benzoilico ed acetilico.

« Il derivato benzoilico $\text{C}^6\text{H}^9(\text{OC}^7\text{H}^5\text{O}) \begin{array}{l} \diagup \text{CO}^2\text{CH}^3 \\ \diagdown \text{CO}^2\text{CH}^3 \end{array}$ si ottenne facendo bollire a ricadere l'etere metilico con un eccesso di cloruro di benzoile. È un liquido scolorito, oleoso, di odore agreevole, che bolle verso i 200° alla pressione di 20 mm. di mercurio. Saponificato con alcoolato sodico dette acido benzoico e l'acido $\text{C}^8\text{H}^{12}\text{O}^5$, caratterizzato dal sale di calcio.

« Analisi :

	trovato		calcolato per $\text{C}^{17}\text{H}^{20}\text{O}^6$
C	63,48	C	63,75
H	7,16	H	6,25.

« Il derivato acetilico $\text{C}^6\text{H}^9(\text{OC}^2\text{H}^3\text{O}) \begin{array}{l} \diagup \text{CO}^2\text{CH}^3 \\ \diagdown \text{CO}^2\text{CH}^3 \end{array}$ si ottiene facendo bollire a ricadere l'etere metilico con un eccesso di anidride acetica ed acetato sodico fuso. È un liquido oleoso, di odore un po' pungente, che distilla a 165°-166°, alla pressione di 22 mm. di mercurio.

« Analisi :

	trovato		calcolato per $\text{C}^{12}\text{H}^{18}\text{O}^6$
C	55,58	C	55,81
H	7,47	H	7,47.

Questo derivato saponificato con alcoolato ridà acido acetico e l'acido $\text{C}^8\text{H}^{12}\text{O}^5$.

Riduzione coll'acido jodidrico.

« Per effettuare questa riduzione si adoperò acido jodidrico bollente a 127° e si fece bollire a ricadere l'acido $\text{C}^8\text{H}^{12}\text{O}^5$ con un leggero eccesso di detta soluzione ed un po' di fosforo rosso.

« Si ottennero due acidi, uno rappresentato dalla formola $\text{C}^8\text{H}^{12}\text{O}^4$, l'altro

dalla formola $C^8H^{14}O^4$, che si separarono mediante il sale di calcio. Il sale $C^8H^{12}O^4Ca$ è quasi insolubile nell'acqua bollente, mentre si discioglie a freddo.

« Per la separazione non si ha da far altro, che saturare esattamente la miscela dei due acidi, separati dall'acido jodidrico mediante estrazione con etere, con idrato sodico, e la soluzione dei sali sodici si fa bollire con soluzione al 30 % di cloruro di calcio. Coll'ebollizione si deposita in piccoli cristalli tabulari, bianchi, microscopici, il sale $C^8H^{12}O^4Ca, 2\frac{1}{2}H^2O$.

« Analisi :

	trovato		calcolato
H ² O	16,83-18,07	H ² O	17,50
Ca	18,76-18,78	Ca (sul secco)	18,86

« L'acido libero $C^8H^{14}O^4$ cristallizza dall'acqua riscaldata a 80° in bei cristalli prismatici, bianchi, duri; se l'acido si discioglie nell'acqua bollente, esso si deposita dapprima oleoso e dopo col raffreddamento si concreta in una massa cristallina. Fonde a 88°-89°, è molto solubile nell'etere acetico e nell'acqua a caldo, meno in detti veicoli freddi; poco solubile nel benzolo, quasi insolubile nel solfuro di carbonio e negli eteri di petrolio (50°-60°).

« Analisi :

	trovato		calcolato
C	54,95-54,73	C	55,17
H	8,3-8,37	H	8,04.

« La sua composizione è quella di un'acido dimetiladipico, ma le sue proprietà non coincidono con quelle dell'acido $\alpha_1-\alpha_2$ dimetiladipico di N. Zelinsky ⁽¹⁾ ripreparato recentemente da I. Kitzing ⁽²⁾. Sono occupato a tentare la sintesi di un isomero di quest'acido adipico dimetilato, avente i due metili attaccati allo stesso atomo di carbonio α per confrontarlo col mio, e spero fra breve presentare i risultati della ricerca.

« Le acque, dalle quali s'è separato il sale di calcio coll'ebollizione, decomposte con acido cloridrico ed estratte con etere, danno un acido che si ha facilmente puro cristallizzandolo diverse volte da una miscela di etere acetico, benzolo ed eteri di petrolio (50°-60°).

« Questo nuovo acido cristallizza in bei prismi appiattiti, poco solubili nell'acqua fredda, di più nella calda, solubile nell'alcool e nell'etere, poco nel benzolo freddo e negli eteri di petrolio. Fonde senza decomorsi alla temperatura corretta di 163°-164°.

« Analisi :

	trovato		calcolato per $C^8H^{12}O^4$
C	55,46	C	55,81
H	7,23	H	6,97.

(1) Berl. Ber. 24, p. 3997.

(2) Berl. Ber. 27, p. 1578.

« La composizione ed il punto di fusione m'avevano fatto dapprima sospettare di avere tra le mani l'acido cis-esaidroisofthalico di Perkin ⁽¹⁾, ma ho dovuto convincermi che esso non era quello supposto, perchè per ebollizione a ricadere col cloruro di acetile non dà l'anidride fusibile a 187°-189°, ma rimane inalterato.

« Se si ossida col permanganato potassico in soluzione alcalina ed a caldo l'acido $C^8H^{12}O^4$, una parte si distrugge dando acido ossalico, ed un'altra parte si ossida nell'acido $C^8H^{12}O^5$, caratterizzato mediante l'analisi e le proprietà del sale di calcio.

« Lo studio di questi due acidi verrà continuato per discutere la costituzione dell'acido canforico dal quale derivano ».

Morfologia vegetale. — *Sulla germinazione e sulla struttura della piantina della Keteleeria Fortunei* (Murr.) Carr. Nota del Corrispondente R. PIROTTA.

« Nel 1887 io facevo conoscere l'infiorescenza maschile di questa interessante Conifera, rilevando l'importanza della struttura morfologica della infiorescenza medesima a favore del distacco di questa pianta dai generi *Abies*, *Pinus* e *Pseudotsuga*, nei quali era stata collocata rispettivamente dal Murray, dal Parlatore e dal Bertrand, ed a favore della istituzione per essa di un genere a parte, *Keteleeria*, fondato dal Carrière.

« Più tardi, nel 1890, io esprimevo sommariamente i risultati delle mie ricerche sulla struttura del corpo vegetativo (radice, caule, foglia) della stessa pianta adulta, mettendo in rilievo i caratteri anatomici e istologici speciali, che essa offriva, e che ancora corroboravano l'opinione della validità del genere *Keteleeria*.

« Colla presente Nota faccio ora conoscere, pure sommariamente, la maniera con cui si compie la germinazione del seme nella *Keteleeria*, e la struttura morfologica e anatomica della piantina che ne proviene, contribuendo ancora a far sempre maggiormente spiccare i caratteri differenziali di questa pianta dalle altre Abietinee, colle quali si colloca.

« Seme ⁽¹⁾. — Il seme somiglia molto a quello dei Pini, degli Abeti ecc. E nel complesso irregolarmente obovato, lungo da 10-15 mm., e fornito nel suo terzo superiore di un'ampia ala membranosa, consistente, lunga da 20 a 25 mm., larga circa 15 mm., di color bruno chiaro, diritta da un lato,

⁽¹⁾ Chem. Soc. 1891 I, 798.

⁽¹⁾ Debbo alla squisita cortesia dei signori fratelli Rovelli, egregi e noti orticoltori di Pallanza, e della Direzione dell'Orto Botanico di Firenze, il materiale occorrente alle mie ricerche.

curva nel resto, a margine intero. L'endosperma è abundantissimo; l'embrione è fornito di due cotiledoni, lineari, lunghi, simili alle foglie normali.

• *Germinazione.* — Messo nelle condizioni favorevoli per la germinazione, disteso sopra il suolo orizzontalmente o coperto dal terreno, il seme gonfia considerevolmente e perde ben presto per decomposizione la sua ala. La radichetta coll'asse ipocotile breve ma grosso esce dal micropilo e si curva geotropicamente in basso, penetrando nel suolo, dove si allunga verticalmente in un distinto fittone.

• I cotiledoni non escono dalla buccia del seme, ma vi stanno racchiusi, avvolti dall'endosperma, finchè quest'ultimo è stato in parte riassorbito, e si decompongono soltanto dopo che la piantina è completamente sviluppata. I due cotiledoni però allungano considerevolmente la loro base di inserzione, a guisa di piccioli, che si curvano pure in basso, mentre il seme rimane sdraiato sul suolo. Poi la piumetta o asse epicotileo sporge tra i piccioli cotiledonari e rapidamente cresce verticale verso l'alto.

• La radice primaria ha lo spessore di circa un mm. verso la base e all'epoca del completo sviluppo della piantina, che si fa in tempo relativamente breve. È alla superficie di color bruno sempre più intenso verso la base del fusticino; produce prestissimo le prime radici laterali.

• I piccioli cotiledonari esterni al seme sono pure bruni, lunghi circa 10 mm., grossi un mezzo mm. circa.

• Il caulicino epicotileo, a causa dell'allungamento della base dei cotiledoni, si svolge lontano circa un centimetro dal seme, è eretto, cilindrico, alto a completo sviluppo circa $4\frac{1}{2}$ -5 centim., verde bruniccio in basso, dove è più grosso, verde in alto. Nella porzione inferiore, per un tratto di un centimetro è nudo, poi per circa due centimetri porta da otto a dieci catafilli brevi, piccoli, squamiformi, sessili, appressati al caule, ovato-acuminati, bruno-rossicci in basso, poi mano mano coloriti in verde, sparsi e con disposizione non molto regolare, talora avvicinati due a due.

• Ad essi seguono i nomofilli, dei quali i primi due sono brevi (misurano circa 5 mm. in lunghezza), appena divergenti dal caule, e formano evidentemente passaggio alle vere foglie normali, alle quali del resto sono simili per colore e per forma. Queste sono in numero di 14 a 16, più lunghe quelle di mezzo per posizione (fino a 28 mm.), sparse, ad internodi relativamente brevi ma ben distinti, distese in direzione leggermente obliqua verso l'alto. Misurano 2-3 mm. in larghezza, sono piuttosto rigide, lineari-piane, un po' ristrette verso la base, dove presentano un piccolo rigonfiamento o cuscinetto, intere nel margine, acute o mucronate all'apice, colla nervatura mediana sporgente specie nella faccia superiore, di color verde chiaro superiormente con una larga striscia glauca ai lati della nervatura mediana inferiormente.

• L'apice del fusto, a completo sviluppo della piantina, termina con una

piccola gemma ricoperta di squamettine verdicce, terminate in punta breve come i catafilli.

« *Struttura.* — La struttura dei *cotiledoni*, per quanto ho potuto conoscere dallo studio di materiale avariato, è assai semplice. In un taglio trasversale la sezione si presenta ovale nel complesso, convessa nel lato superiore, un po' concava nell'inferiore. L'epidermide è ben distinta, gli stomi mancano; il mesofillo è omogeneo e fatto di grandi cellule; manca l'ipoderma, mancano i canali resiniferi; il fascio vascolare è poco differenziato, però già distinto dal lato dello xilema in due lobi.

« La struttura delle *foglie normali* della piantina presenta i gradi di passaggio da quella poco più complicata dei cotiledoni, data dalle brevi foglie inferiori, a quella ben differenziata e simile alla struttura delle foglie adulte, date dalle foglie mediane più grandi.

« Verso la metà della sua lunghezza una di queste foglie offre la seguente struttura. La sezione trasversale ha forma di un ovale molto lungo, convesso verso la metà tanto nella faccia superiore, che nella inferiore. L'epidermide manifesta è a cellule con parete ispessita fortemente su tutto il contorno ma più verso l'esterno. Si riscontra un ipoderma uniseriato in corrispondenza della sporgenza del nervo mediano tanto dal lato superiore che dall'inferiore, nel quale ultimo è spesso raddoppiato. Gli stomi occupano, da ciascun lato della zona ipodermica inferiore, quindi della sporgenza della nervatura mediana, un largo tratto, disposti in tre serie longitudinali abbastanza slontanate l'una dall'altra. Il mesofillo è differenziato, essendo la struttura nettamente dorsoventrale. Il tessuto a palizzate forma dal lato superiore una zona interrotta nel mezzo dall'ipoderma superiore, e che si estende ai lati di questo fin verso il margine della foglia, cioè fino in vicinanza dei canali resiniferi. È biseriato, a cellule esterne più lunghe che larghe nel senso radiale, rettangolari in sezione trasversale, talora ramificate come nei Pini; la seconda di cellule più corte in serie regolare. Il palizzata occupa 1/6-1/5 della sezione totale; il resto del diachima è costituito da un parenchima a cellule irregolari verso il margine e la faccia inferiore, allungate verso il mezzo dove si dispongono in giro alla serie delle cellule della guaina vascolare.

« I canali resiniferi stanno presso il margine e contro l'epidermide inferiore avvolti dal loro ipoderma.

« Il fascio è ben differenziato, grosso coll'ampia porzione legnosa divisa incompletamente in due masse, ed è limitato da una distinta guaina vascolare a grandi cellule circolari in sezione trasversale.

« La sezione trasversale della *radice primaria* verso l'apice vegetativo ci mostra sotto l'epiblema un ampio parenchima corticale di circa sei serie di cellule a sezione circolare, ellittica o poligonale, delle quali più grandi quelle delle due serie mediane. L'endodermide è distinta, il periciclo è fatto

di 3-4 serie di cellule, i raggi vascolari sono tre o quattro e non giungono ad incontrarsi al centro della radice, ma lasciano un midollo relativamente ampio, nel mezzo del quale sta un largo canale resinifero assile.

« La sezione trasversale dell'*asse epicotileo* poco sopra l'inserzione dei cotiledoni è a contorno ondulato. All'epidermide semplice a pareti cuticolarizzate fa seguito un parenchima corticale distinto in una porzione esterna di circa tre serie di cellule, un po' schiacciate, scolorite, ed in una porzione interna ampia a cellule ricche di contenuto, nella quale, e più verso la periferia, stanno dei canali resiniferi disposti in una serie unica interrotta. Il legno secondario già molto abbondante a completo sviluppo della piantina è senza canali resiniferi. Il midollo è ampio e pure senza canali resiniferi.

« Il modo di comportarsi della *Keteleeria* nella germinazione del seme mostra che essa è a tipo ipogeo. Ora, per quanto è noto, le *Conifere* nella grande maggioranza e le *Abietinee* tutte sono a germinazione epigea, cioè i cotiledoni escono dalla buccia del seme più o meno presto e formano sulla piantina il primo verticillo fogliare, a distanza più o meno considerevole dal livello del suolo. Così pure sono a germinazione epigea le *Gnetacee*, cioè le *Gimnosperme* più evolute; sono invece a germinazione ipogea le *Cicadacee*, cioè le meno evolute e le più antiche delle *Gimnosperme*. E fra le *Conifere* sono precisamente quelle che sono più affini alle *Cicadacee* e più antiche (*Gingko*, *Podocarpus*) quelle che presentano germinazione ipogea.

« Questo carattere pertanto riscontrato nella *Keteleeria Fortunei* (e che pare si riscontri in un'altra pianta che il Masters ascrive al genere *Keteleeria* benchè non se ne conoscano i fiori maschili, l'*Abies Davidiana*) ha dunque valore e importanza di carattere ancestrale. Tanto più sono indotto ad ammetterlo, perchè le *Gimnosperme* a germinazione ipogea presentano due altri caratteri comuni, e cioè i seguenti. L'epicotile porta in basso un numero più o meno considerevole di catafilli i quali in modo più o meno rapido passano ai nomofilli e questi ultimi sono già nella piantina simili per forma, dimensione, inserzione, disposizione e struttura a quella della forma adulta.

« In secondo luogo è importante la costanza nel numero dei cotiledoni. Mentre questo numero in tutte le *Abietinee*, secondo Lubbock, è superiore a due, nella *Keteleeria Fortunei* (ed anche nella *K. Davidiana* secondo Masters) sono due, come sono due in tutte le altre *Conifere* ipogee.

« La *Keteleeria* pertanto e per i caratteri morfologici e per il modo di germinazione è un tipo di *Conifere*, che si appalesa molto antico, e che da una parte si collega colle *Abietinee* vere, dall'altra se ne scosta per avvicinarsi a forme più antiche a germinazione ipogea ».

Meccanica. — *Sulle equazioni dell'elasticità negli iperspazii.*
Nota di E. CESÀRO, presentata dal Socio BELTRAMI.

« I calcoli accennati dal prof. Beltrami nella Memoria *Sulle equazioni generali dell'elasticità* ⁽¹⁾ si possono eseguire con una certa speditezza, non priva di eleganza, anche per uno spazio curvo a quante si vogliano dimensioni, facendo uso della segnatura da noi adoperata nella Nota sulle *Formole di Codazzi negli iperspazii* ⁽²⁾. Prima osserviamo che i coefficienti di allungamento sono dati dalle formole

$$\theta_i = \frac{\partial u_i}{\partial s_i} + \sum G_{ij} u_j,$$

in cui le u_i sono le componenti dello spostamento, e le G_{ij} sono quelle che nella predetta Nota abbiamo chiamate le *curvature geodetiche* dello spazio. La loro espressione è, per $i \geq j$,

$$G_{ij} = \frac{1}{Q_i Q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}, \quad (1)$$

in un sistema qualunque di coordinate curvilinee ortogonali. Per $i=j$ converrà supporre $G_{ij} = 0$. La dilatazione unitaria è

$$\Theta = \sum \theta_i = \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + G_i \right) u_i,$$

rappresentando con G_i la somma di tutte le G , che hanno il secondo indice uguale ad i . Avremo inoltre da considerare i mutui scorrimenti ω_{ij} degli elementi lineari coordinati, e le doppie componenti \mathcal{P}_{ij} della rotazione del mezzo. Le loro espressioni si ricavano dalle formole

$$\frac{1}{2} (\omega_{ij} + \mathcal{P}_{ij}) = \frac{\partial u_i}{\partial s_j} - G_{ji} u_j, \quad \frac{1}{2} (\omega_{ij} - \mathcal{P}_{ij}) = \frac{\partial u_j}{\partial s_i} - G_{ij} u_i, \quad (2)$$

che si riducono in sostanza ad una sola se si osserva che

$$\omega_{ij} = \omega_{ji}, \quad \mathcal{P}_{ij} = -\mathcal{P}_{ji}.$$

Tutte queste formole si potrebbero dimostrare assai semplicemente supponendole stabilite prima in uno spazio lineare, ed applicando poi i metodi *intrinseci* a misurare gli effetti della curvatura dello spazio. Così, per esempio, per trovare le espressioni delle \mathcal{P} , che ordinariamente si ottengono con una trasformazione d'integrali multipli, basta immaginare una particella come immersa in uno spazio lineare con una dimensione di più, e calcolare la ro-

⁽¹⁾ Annali di matematica, 1881.

⁽²⁾ Rend. dell'Acc. di Napoli, 12 Maggio 1894

tazione della normale alla particella, nel moto rigido di questa, mercè le formole fondamentali della Geometria intrinseca degli iperspazii. A questa sola rotazione si debbono, nelle espressioni delle \mathfrak{A} , le parti lineari nelle u .

* Ciò premesso, quando si assume

$$-\frac{1}{2}(A\Theta^2 + B \sum \mathfrak{A}_{ij}^2) \quad (3)$$

come sola parte efficace del potenziale per la formazione delle equazioni indefinite, si perviene, col solito procedimento, alle equazioni

$$X_i + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_i} + B \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j - g_{ij} \right) \mathfrak{A}_{ij} + 2B a_i = 0, \quad (4)$$

prive, nel primo membro, dell'ultimo termine. È questo termine che bisogna calcolare affinché le (4) siano, a prescindere dalla variazione delle costanti d'isotropia, le equazioni generali dell'elasticità dei mezzi isotropi in qualsiasi spazio o iperspazio curvo. Intanto, seguendo il processo tenuto dal prof. Beltrami per trovare le formole (4) della sua Memoria, si ottengono, invece delle nostre (4), le equazioni

$$X_i = \left(\frac{\partial}{\partial s_i} + g_i \right) \Theta_i - \sum g_{ji} \Theta_j + \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j + g_{ij} \right) \Omega_{ij}, \quad (5)$$

nelle quali le Θ_i e le Ω_{ij} sono le tensioni degli elementi (lineari e superficiali) coordinati. L'indice i posto all'ultimo segno sommatorio serve a ricordare che bisogna escludere dalla corrispondente somma il termine definito dal valore i di j . Le formole (5) sono indipendenti dalla natura geometrica dello spazio come dalla costituzione fisica del mezzo. Quando questa si particolarizza introducendo l'ipotesi dell'isotropia, si ha

$$\Theta_i = -(A - 2B) \Theta - 2B \theta_i, \quad \Omega_{ij} = -B \omega_{ij},$$

e le equazioni (5) diventano

$$X_i + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_i} - 2B \frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j + 2B \sum g_{ji} (\theta_i - \theta_j) + B \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j + g_{ij} \right) \omega_{ij} = 0.$$

Ora il paragone con (4) dà subito, osservando le (2),

$$\begin{aligned} a_i = & -\frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j + \sum g_{ji} (\theta_i - \theta_j) \\ & + \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial s_i} - g_{ij} u_i \right) + \sum g_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial s_j} - g_{ji} u_j \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Intanto

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j = \sum^{(i)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_j \partial s_i} + \frac{\partial}{\partial s_i} \sum (g_j - g_{ij}) u_j.$$

D'altra parte, in virtù della nota condizione d'integrabilità

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_i} + g_i \right) \frac{\partial}{\partial s_j} = \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j \right) \frac{\partial}{\partial s_i};$$

si ha pure

$$\sum^{(i)} \frac{\partial^2 u_j}{\partial s_j \partial s_i} = \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial s_i} \\ + g_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \sum g_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial s_j} - \sum (g_j - g_{ij}) \frac{\partial u_j}{\partial s_i}.$$

Quindi

$$\frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \theta_j = \sum^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial s_j} + g_j \right) \frac{\partial u_j}{\partial s_i} \\ + g_i \frac{\partial u_i}{\partial s_i} - \sum g_{ji} \frac{\partial u_j}{\partial s_j} + \sum u_j \frac{\partial}{\partial s_i} (g_j - g_{ij}).$$

Poi, sostituendo in (6),

$$a_i = g_i \left(\theta_i - \frac{\partial u_i}{\partial s_i} \right) - \sum g_{ji} \left(\theta_j - \frac{\partial u_j}{\partial s_j} \right) \\ - u_i \sum \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial s_j} + g_j g_{ij} \right) - \sum \left(\frac{\partial}{\partial s_i} (g_j - g_{ij}) + g_{ij} g_{ji} \right) u_j.$$

Così è dimostrato che a_i è una forma lineare delle u :

$$a_i = \sum a_{ij} u_j$$

Raccogliendo i termini che moltiplicano u_j si ottiene

$$a_{ij} = (g_i - g_{ji}) g_{ij} - \frac{\partial}{\partial s_i} (g_j - g_{ij}) - \sum g_{ki} g_{kj} \quad (7)$$

per $i \geq j$. Invece

$$a_{ii} = - \frac{\partial g_i}{\partial s_i} - \sum \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial s_j} + g_j g_{ij} + g_{ij}^2 \right). \quad (8)$$

La formola (1) permetterebbe ora di esprimere i coefficienti a mediante le funzioni Q ; ma è più conveniente introdurre le *curvature normali* \mathfrak{T} e le *torsioni geodetiche* \mathfrak{S} , tenendo presenti i gruppi (γ) e (δ) delle formole generali di Codazzi, dimostrate nel citato lavoro. La formola (8) si può scrivere nel seguente modo:

$$a_{ii} = - \sum \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial s_i} + g_{ij}^2 + g_{ji}^2 \right) - \sum (g_j - g_{ij}) g_{ij}.$$

La seconda somma è uguale a

$$\sum_j \sum_k^{(i)} g_{kj} g_{ij} = \sum_k^{(i)} \sum_j g_{kj} g_{ij} = \sum_j \sum_k g_{ik} g_{jk}.$$

Dunque

$$a_{ii} = - \sum^{(i)} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial s_j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial s_i} + g_{ij}^2 + g_{ji}^2 + \sum g_{ik} g_{jk} \right),$$

ovvero, per le (γ) ,

$$a_{ii} = \sum (\mathfrak{T}_i \mathfrak{T}_j - \mathfrak{E}_{ij}^2) , \quad (9)$$

senza escludere esplicitamente alcun valore di j , purchè \mathfrak{E}_{ii} si consideri come uguale a $-\mathfrak{T}_i$. Similmente alle (7) si può dare la forma

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \mathfrak{G}_{ij} \sum^{(j)} \mathfrak{G}_{ki} - \frac{\partial}{\partial s_i} \sum^{(i)} \mathfrak{G}_{kj} - \sum \mathfrak{G}_{ki} \mathfrak{G}_{kj} \\ &= - \sum^{(i,j)} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}_{kj}}{\partial s_i} + (\mathfrak{G}_{kj} - \mathfrak{G}_{ji}) \mathfrak{G}_{kj} \right) , \end{aligned}$$

cioè, in virtù delle (δ) ,

$$a_{ij} = - \sum (\mathfrak{T}_k \mathfrak{E}_{ij} + \mathfrak{E}_{ik} \mathfrak{E}_{jk}) . \quad (10)$$

Questa formola mostra che $a_{ij} = a_{ji}$. Si è dunque condotti a considerare la forma quadratica

$$U = \frac{1}{2} \sum a_{ij} u_i u_j , \quad (11)$$

le cui derivate parziali prime sono appunto le a_i . Per esempio, nel caso d'uno spazio a due dimensioni, si ha, chiamando α la curvatura totale,

$$a_{11} = a_{22} = \mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 - \mathfrak{E}^2 = \alpha , \quad a_{12} = 0 ;$$

quindi $U = \frac{\alpha}{2} (u_1^2 + u_2^2)$, e le equazioni (4) diventano

$$\begin{cases} X_1 + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_1} - B \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s_2} + 2B \alpha u_1 = 0 , \\ X_2 + A \frac{\partial \Theta}{\partial s_2} + B \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial s_1} + 2B \alpha u_2 = 0 . \end{cases}$$

Esse restano inalterate nelle deformazioni della superficie, supposta flessibile ma inestendibile.

« Alle equazioni (4) saremmo egualmente pervenuti assumendo come parte efficace del potenziale l'espressione (3) aumentata di $2BU$. Ciò si può esprimere dicendo che la curvatura dello spazio produce una *perdita di energia* elastica, come se una parte di questa energia venisse spesa dal corpo a vincere le difficoltà che incontra per deformarsi in uno spazio non lineare. Può tuttavia accadere che sia $U < 0$, ed allora l'energia elastica è invece più intensa di quella che si avrebbe in uno spazio lineare, come se la forma dello spazio fosse tale da agevolare piuttostochè contrariare le deformazioni elastiche. In altri termini, se immaginiamo lo spazio irrigidito nella sua essenza geometrica, e d'altra parte supponiamo la materia dotata d'una specie d'*inerzia*, in virtù della quale essa tenda sempre a deformarsi come se si trovasse in uno spazio lineare, possiamo dire che contro tale tendenza reagisce lo spazio con forze che ammettono il potenziale $2BU$.

« Notevoli fra gli spazii che favoriscono le deformazioni elastiche sono quelli che hanno nulla la prima curvatura media. Solo in tali spazii può esistere un *sistema assintotico* ortogonale. Assumendo questo come sistema di riferimento, sono nulle tutte le curvature κ , e dalle formole (9) e (10) si ha

$$a_{ij} = - \sum \epsilon_{ik} \epsilon_{jk},$$

quindi

$$U = - \frac{1}{2} \sum (\epsilon_{1k} u_1 + \epsilon_{2k} u_2 + \epsilon_{3k} u_3 + \dots)^2.$$

« Abbiamo visto che, sopra una superficie, la perdita di energia è proporzionale al quadrato dello spostamento ed alla curvatura totale della superficie nel punto che si considera. Per uno spazio qualunque avviene qualche cosa di analogo. Immaginiamo infatti che lo spazio sia riferito al suo *sistema di curvatura*. Sono allora nulle tutte le torsioni ϵ , e dalle (10) si ha $a_{ij} = 0$. Dalle (9) si vede che a_{ii} è la somma delle curvature totali di tutte le superficie coordinate che contengono la linea q_i . Ora, rappresentando con u_{ij} la proiezione dello spostamento sulla superficie $q_i q_j$, e con α_{ij} la curvatura totale di questa, l'eguaglianza (11) diventa

$$U = \frac{1}{2} \sum \alpha_{ij} u_{ij}^2.$$

La perdita di energia elastica in uno spazio ad n dimensioni è dunque uguale alla somma delle perdite dovute alle $\frac{1}{2} n(n-1)$ superficie di curvatura ».

Elettricità. — *Sul ritardo della polarizzazione nei dielettrici* ⁽¹⁾. Nota di RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio G. FERRARIS.

« Ewing e Miss Klaassen ⁽²⁾ hanno dimostrato: 1° che il lavoro w consumato per l'isteresi magnetica nel ferro si può rappresentare, in funzione dell'induzione magnetica b , per mezzo di una relazione della forma

$$w = kb^\epsilon,$$

ove ϵ e k hanno valori che variano col variare dei limiti di b ; 2° che le variazioni dell'esponente ϵ corrispondono ai passaggi dall'uno all'altro dei successivi stati nel processo della magnetizzazione, e che precisamente i valori relativamente elevati di ϵ corrispondono agli stati iniziale e finale, ove la permeabilità magnetica è piccola, mentre in corrispondenza degli stati inter-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Museo industriale italiano in Torino.

(2) *The Electrician* 13 aprile 1894, p. 668: *Magnetic qualities of iron*.

medi, ove è maggiore la permeabilità magnetica, i valori di ϵ diventano notevolmente più piccoli ⁽¹⁾.

« D'altra parte, da una serie di esperienze, i cui risultati sono esposti in alcune Note precedenti ⁽²⁾, io fui condotto a stabilire: 1° che in un cilindro dielettrico, collocato in un campo elettrico rotante, avviene una dissipazione di energia, poichè il cilindro si trova soggetto ad una coppia che tende a farlo rotare nella direzione del campo stesso; 2° che la relazione tra l'energia dissipata W nel cilindro dielettrico e l'induzione elettrostatica B , in un punto qualunque del campo rotante, è della forma

$$W = KB^x,$$

ove x e K hanno valori che variano col variare dei limiti di B ; 3° che per la carta paraffinata l'esponente di B , nella relazione tra W e B , è rispettivamente uguale a 1,83; 1,65; 1,90, secondo che i valori di B , con cui si sperimenta, sono compresi fra 0,06 e 0,17; 0,95 e 2,65; 9,90 e 14,58 unità elettrostatiche C. G. S.

« Questi risultati, posti a confronto con quelli delle esperienze di Ewing e Miss Klaassen sulle proprietà magnetiche del ferro, pongono in chiaro l'analogia che sembra sussistere fra la legge dell'isteresi magnetica nei corpi magnetici e la legge del fenomeno che sto studiando nei corpi dielettrici, e fanno prevedere: 1° che il fenomeno della rotazione di un cilindro dielettrico in un campo elettrico rotante sia dovuto ad un ritardo con cui la polarizzazione del dielettrico segue la rotazione del campo elettrico, precisamente come in un campo magnetico rotante un cilindro di ferro, sezionato per modo che in esso non si possono produrre correnti di Foucault, si pone in rotazione in grazia del ritardo col quale la magnetizzazione del ferro segue la rotazione del campo magnetico; 2° che i valori dell'esponente x , nella relazione tra W e B , abbiano a corrispondere a stati diversi nel processo della polarizzazione e che, analogamente a quanto succede nella magnetizzazione dei corpi magnetici, i valori di x relativamente più grandi abbiano a corrispondere agli stati iniziale e finale, e quelli relativamente più piccoli agli stati intermedi.

(¹) Per il campione di ferro sperimentato e per valori di b compresi fra 200 e 500; 500 e 1.000; 1.000 e 2.000; 2.000 e 8.000; 8.000 e 14.000 unità elettromagnetiche C. G. S. è stato infatti trovato ϵ rispettivamente uguale a 1,9; 1,68; 1,55; 1,475; 1,70.

(²) Rendiconti, fascicoli del 16 ottobre 1892, p. 284; 30 aprile 1893, p. 341; 12 novembre 1893, p. 260; 18 marzo 1894, p. 272; 17 giugno 1894, p. 585: *Campo elettrico rotante e rotazioni dovute all'isteresi elettrostatica. — Sulla dissipazione di energia in un campo elettrico rotante e sulla isteresi elettrostatica. — Ricerche quantitative sulla dissipazione di energia nei corpi dielettrici in un campo elettrico rotante. — Esperienza con un sistema di condensatori a coibente mobile. — Sulla legge della dissipazione di energia nei dielettrici sotto l'azione di campi elettrici di debole intensità.*

« Una serie di nuove ricerche, i cui risultati sono riassunti in questa Nota, confermano tali previsioni.

« Gli apparecchi usati ed il cilindro dielettrico sperimentato sono quelli stessi che servirono alle ricerche, i cui risultati sono esposti nell'ultima delle mie Note sovraccitate. La frequenza della corrente alternativa era uguale a 40. La distanza fra le lastre, racchiudenti lo spazio in cui si generava il campo elettrico rotante, era di 4,4 cm. e la distanza dello specchio dalla scala di 2660 mm. Il cilindro dielettrico sperimentato era di carta paraffinata, aveva l'altezza di 26 mm., il diametro esterno di 30 mm., la grossezza di 1 mm., ed il peso di 2,011 grammi.

« In tali condizioni ed in corrispondenza di settanta valori diversi dell'induzione elettrostatica B , compresi fra 0,030 e 5,30 unità elettrostatiche C. G. S. ⁽¹⁾, si eseguirono altrettante esperienze, le quali vanno raggruppate a dieci a dieci in sette serie di esperimenti, ciascuna delle quali si riferisce ad una determinata sensibilità dell'apparecchio. Ad ottenere poi, per ognuna di tali serie di esperimenti, lo stesso peso nelle misure, ho disposto, per mezzo di trasformatori di conveniente rapporto di trasformazione, le cose in guisa che il valore dell'induzione elettrostatica in unità elettrostatiche C. G. S. si avesse a dedurre, in ogni esperimento, della misura, fatta per mezzo di un voltmetro di Cardew, di una differenza di potenziale sempre compresa fra gli stessi limiti (40 e 112 volt.).

« Nelle prime colonne della seguente tabella sono indicati i risultati dei miei esperimenti, per ciascuno dei quali sono registrate, rispettivamente nella seconda, terza e quarta colonna, la differenza di potenziale alternativa efficace V indicata dal voltmetro, l'induzione elettrostatica B e la lettura d fatta col canocchiale. Quest'ultima, a cui è proporzionale il lavoro W in erg fatto dalle forze elettriche deviatrici nell'unità di tempo, si riferisce, a seconda dei limiti di B fra cui si è sperimentato, a sette sensibilità diverse dello strumento, ottenute col variare sia il peso P sostenuto dalla sospensione bifilare, sia la lunghezza della medesima, sia la distanza superiore a ed inferiore b fra i due fili costituenti la sospensione stessa ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Per ottenere valori dell'induzione elettrostatica molto diversi fra di loro, ho adoperato, nei miei esperimenti, trasformatori con un rapporto di trasformazione rispettivamente da 1 a 2, 1 a 4, 1 a 18, 1 a 250.

⁽²⁾ Nella tabella è indicata per ciascuna serie di esperienze, corrispondente ad una determinata sensibilità dell'apparecchio, la temperatura t con cui le esperienze stesse furono eseguite.

N°			V in volt.	B in unità elettrosta- tiche C. G. S.	d in mm. osservato	d in mm. calcolato	Δ	$\approx \%$
I	P = 5,575 gr.	1	40	0,030	11,7	11,30	+ 0,40	+ 3,4
	l = 31,5 cm.	2	48	0,036	16,1	15,79	+ 0,31	+ 1,9
	a = 0,075 cm.	3	56	0,042	20,3	20,99	- 0,69	- 3,4
	b = 0,075 cm.	4	64	0,048	26,1	26,84	- 0,74	- 2,8
	t = 22° C.	5	72	0,054	32,6	33,33	- 0,73	- 2,2
	—	6	80	0,060	40	40,52	- 0,52	- 1,3
	—	7	88	0,066	48,5	48,22	+ 0,28	+ 0,6
	x = 1,843	8	96	0,072	57,2	56,65	+ 0,55	+ 1,0
	—	9	104	0,078	66	65,72	+ 0,28	+ 0,4
	K = 327,593	10	112	0,084	77	75,29	+ 1,71	+ 2,2
II	P = 11,438 gr.	11	40	0,060	18	17,31	+ 0,69	+ 3,8
	l = 30,4 cm.	12	48	0,072	23,4	24,15	- 0,75	- 3,2
	a = 0,075 cm.	13	56	0,084	30,8	32,03	- 1,23	- 4,0
	b = 0,075 cm.	14	64	0,096	39,8	40,90	- 1,10	- 2,8
	t = 20° C.	15	72	0,108	50	50,70	- 0,70	- 1,4
	—	16	80	0,120	61,2	61,55	- 0,35	- 0,6
	—	17	88	0,132	73,2	73,46	- 0,26	- 0,4
	x = 1,830	18	96	0,144	85,6	85,86	- 0,26	- 0,3
	—	19	104	0,156	100,4	99,50	+ 0,90	+ 0,9
	K = 287,240	20	112	0,168	113,2	113,87	- 0,67	- 0,6
III	P = 11,438 gr.	21	40	0,120	18,4	17,38	+ 1,02	+ 5,5
	l = 30 cm.	22	48	0,144	25,2	24,58	+ 0,62	+ 2,5
	a = 0,15 cm.	23	56	0,168	31,6	32,97	- 1,37	- 4,3
	b = 0,15 cm.	24	64	0,192	39,6	42,52	- 2,92	- 7,4
	t = 23° C.	25	72	0,216	50,4	53,18	- 2,68	- 5,5
	—	26	80	0,240	62,4	65,08	- 2,68	- 4,3
	—	27	88	0,264	73,8	78,24	- 4,44	- 6,0
	x = 1,905	28	96	0,288	86,8	92,03	- 5,23	- 6,0
	—	29	104	0,312	101	107,30	- 6,30	- 6,2
	K = 385,782	30	112	0,336	115	123,47	- 8,47	- 7,4
IV	P = 11,438 gr.	31	40	0,270	24	23,02	+ 0,98	+ 4,1
	l = 30 cm.	32	48	0,324	32	31,61	+ 0,39	+ 1,2
	a = 0,30 cm.	33	56	0,378	40	41,36	- 1,36	- 3,4
	b = 0,30 cm.	34	64	0,432	50	52,20	- 2,20	- 4,4
	t = 26° C.	35	72	0,486	63	64,06	- 1,06	- 1,7
	—	36	80	0,540	76	77,05	- 1,05	- 1,4
	—	37	88	0,594	91	90,83	+ 0,17	+ 0,2
	x = 1,743	38	96	0,648	106	105,80	+ 0,20	+ 0,2
	—	39	104	0,702	123	121,76	+ 1,24	+ 1,0
	K = 352,513	40	112	0,756	142	138,44	+ 3,56	+ 2,5
V	P = 11,438 gr.	41	40	0,54	30	28,87	+ 1,13	+ 3,8
	l = 30 cm.	42	48	0,65	40	39,67	+ 0,33	+ 0,8
	a = 0,55 cm.	43	56	0,76	51	51,95	- 0,95	- 1,9
	b = 0,55 cm.	44	64	0,87	63	65,60	- 2,60	- 4,1
	t = 26° C.	45	72	0,98	79	80,53	- 1,53	- 1,9
	—	46	80	1,09	97	96,90	+ 0,10	+ 0,1
	—	47	88	1,20	115	114,28	+ 0,72	+ 0,6
	x = 1,747	48	96	1,31	134	133,15	+ 0,85	+ 0,6
	—	49	104	1,42	155	153,29	+ 1,71	+ 1,1
	K = 445,096	50	112	1,53	177	174,34	+ 2,66	+ 1,5

N°			V in volt.	B in unità elettrosta- tiche C. G. S.	\bar{d} in mm. osservato	\bar{d} in mm. calcolato	Δ	= %
VI	P = 35,528 gr.	51	40	0,94	29	27,98	+ 1,02	+ 3,5
	l = 30 cm.	52	48	1,13	38	37,86	+ 0,14	+ 0,4
	a = 0,55 cm.	53	56	1,32	48	48,94	- 0,94	- 2,0
	b = 0,55 cm.	54	64	1,51	59	61,11	- 2,11	- 3,6
	t = 27° C.	55	72	1,70	73	74,28	- 1,28	- 1,8
	—	56	80	1,89	89	88,99	+ 0,41	+ 0,5
		57	88	2,08	105	103,65	+ 1,35	+ 1,3
	x = 1,663	58	96	2,27	121	119,89	+ 1,11	+ 0,9
		59	104	2,46	138	137,08	+ 0,92	+ 0,7
	K = 509,251	60	112	2,65	156	154,95	+ 1,05	+ 0,7
VII	P = 81,935 gr.	61	40	1,88	30	30,03	- 0,03	- 0,1
	l = 32 cm.	62	48	2,26	41,5	40,77	+ 0,73	+ 1,8
	a = 0,85 cm.	63	56	2,64	53	52,84	+ 0,16	+ 0,3
	b = 0,50 cm.	64	64	3,02	64,5	66,13	- 1,63	- 2,5
	t = 27° C.	65	72	3,40	80	80,57	- 0,57	- 0,7
	—	66	80	3,78	96	96,27	- 0,27	- 0,3
		67	88	4,16	112	112,82	- 0,82	- 0,7
	x = 1,681	68	96	4,54	130	130,69	- 0,69	- 0,5
		69	104	4,92	149	149,66	- 0,66	- 0,4
	K = 518,240	70	112	5,30	172	169,40	+ 2,60	+ 1,5

« Se in un sistema di due assi coordinati ortogonali si portano come ascisse i valori di $\log B$ e come ordinate i valori di $\log W$, ricavati, per uno qualunque dei sette gruppi di esperimenti, dalla precedente tabella, si trovano punti, il luogo geometrico dei quali è, con sufficiente approssimazione, una linea retta. Ciò dimostra che i valori medesimi soddisfano ad una relazione della forma

$$W = KB^x,$$

ove x e K sono, per ciascuna serie di esperimenti, delle costanti, le quali furono determinate col metodo dei minimi quadrati e registrate nella tabella precedente. A dette costanti corrispondono valori di W tali che per essi \bar{d} assume i valori registrati nella quinta colonna della tabella. Le differenze Δ e le corrispondenti percentuali si trovano rispettivamente indicate nelle due ultime colonne della tabella stessa ».

Fisica. — *Intorno ad una modificazione della bilancia di Mohr e ad un semplice apparato per la misura del volume dei solidi* (1). Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio BLASERNA.

« *Modificazione della bilancia di Mohr.* Questa bilancia che con la sola pesata di un apposito corpo immerso in un liquido, dà immediatamente un valore abbastanza esatto della densità del liquido, richiede che la quantità di questo sia non troppo piccola, circa 100 cm³., quindi talvolta assai maggiore di quella di cui si può disporre.

« Collo stesso strumento è possibile ottenere con una sola pesata ed immediatamente un valore altrettanto esatto della densità di un liquido di cui non si hanno che pochi centimetri cubi. Perciò basta usare il metodo della boccetta, applicando ad esso semplificazioni analoghe a quelle che nelle bilance di Mohr e di Reimann si trovano applicate al metodo della bilancia idrostatica.

« Si può cioè: 1°. Usare un contrappeso, preparato una volta per sempre, che faccia equilibrio alla boccetta vuota. 2°. Regolare la capacità della boccetta in modo che il peso dell'acqua in essa contenuta sia uguale all'unità di peso che si è adottata (che generalmente pesa 5 grammi), e così il numero di pesi che aggiunti al contrappeso suddetto fanno equilibrio alla boccetta piena d'un liquido sarà uguale alla densità del liquido. 3°. Come nella bilancia di Mohr si potranno usare i pesi 1, 0,1, 0,01, 0,001 in forma di cavalletto, da collocarsi lungo i bracci della bilancia, diminuendo così il numero dei pesi e rendendo più rapido e comodo l'ottenimento dell'equilibrio; oppure come nell'areometro di Reimann si potranno collocare i pesi nel modo solito in un piatto appeso ad una estremità del giogo, per evitare gli errori provenienti dall'imperfetta mobilità dei cavalletti e dalla indeterminatezza del punto del giogo in cui essi sono applicati; oppure finalmente si potranno combinare i vantaggi dei due sistemi ed appendere i pesi maggiori 1, 0,5, 0,2, 0,1 all'estremità del giogo ed i pesi minori 0,1, 0,01, 0,001 lungo il giogo, poichè per questi ultimi le cause d'errore suddette sono senza dubbio del tutto trascurabili.

« Per l'uso di questo metodo, colla bilancia di Mohr non occorre che la boccetta di 5 cm³ e il suo contrappeso, e solo nel caso che per maggior esattezza o per risparmiare liquido si usi una boccetta di 10 cm³ o una di 1 cm³, occorrerà altresì pei liquidi più densi dell'acqua un peso di 10 gr. o uno di 1 gr. rispettivamente, che si dovranno prendere per unità di peso.

(1) Gabinetto fisico della R. Università di Cagliari.

« Siccome la bilancia di Mohr di solito viene fornita dai costruttori con due piatti per le pesate ordinarie, e con un piattello con uncino per determinare la densità dei solidi col metodo idrostatico, l'aggiunta di una o più boccette servirebbe a completare, con poca spesa, la bilancia suddetta come strumento per la misura dei pesi e delle densità, e ad estenderne l'uso in anche ai casi cui si dispone di poca quantità di liquido.

« Con una boccetta da 10 grammi si potrebbe anche determinare con discreta esattezza il coefficiente di dilatazione dei liquidi; però è da notare che le variazioni di temperatura e l'azione dei bagni per il riscaldamento, esporrebbero la boccetta a variazioni di capacità e di peso che renderebbero necessaria una frequente verificaione di queste due quantità, e perciò sarebbe conveniente che per le dilatazioni si usasse una boccetta diversa da quella che serve per le densità.

« Queste boccette si possono costruire con molta facilità e senza molta perdita di tempo tirando alla lampada un tubo d'assaggio in modo che prenda la forma di dilatometro, avendo cura di lasciar ispessire molto le pareti nel punto che si riscalda, e di tirare leggermente in modo che il tratto capillare riesca corto p. es. 1 cm. e a pareti spesse e quindi poco fragile. Si prepara una volta per sempre un grosso filo d'ottone che faccia equilibrio al tubo e all'uncino che serve di sostegno, e si pesano nel tubo 5 cm³ di mercurio, che servono per indicare il punto dove si deve scaldare il tubo (occorre scaldare in un punto 5 mm. circa al disopra della posizione del livello del mercurio, altrimenti il bulbo riesce troppo piccolo) e per verificare se il bulbo ha la capacità voluta. Scaldando il fondo del tubo finchè il vetro si rammollisce e soffiando o no si riesce ad aumentare o ridurre la capacità.

« Usando una boccetta in forma di dilatometro è comodo per riempirla, vuotarla, asciugarla ecc. far uso di un tubo o pipetta affilata a un capo in tubo capillare; però avviene spesso che questo si rompe dentro il tubo capillare della boccetta e vi rimane conficcato. Si può estrarlo facilmente col seguente artificio.

« Si prende un filo metallico che entri molto comodamente nel frammento di tubo che si vuole estrarre, si ricopre l'estremità del filo di un sottile strato di ceralacca, si introduce questa estremità nel frammento, si scalda il tubo in modo che la ceralacca fonda e si lascia raffreddare senza muovere il filo. In tal modo la ceralacca serve di cemento fra il tubetto ed il filo, tirando questo vien fuori anche il tubetto.

« *Apparecchio per la misura del volume dei solidi.* Generalmente il volume dei solidi viene dedotto dalla determinazione coi noti metodi del peso d'un volume uguale di un liquido di nota densità. Questo metodo molto preciso è altresì comodo quando, come nelle determinazioni della densità, occorre conoscere il peso del solido; se invece ciò non è necessario, torna più comodo e spiccio di immergere il solido in un liquido e misurare l'aumento

apparente del volume di questo, oppure misurare il volume del liquido che bisogna togliere perchè il livello ritorni alla posizione di prima.

« La causa d'errore principale inerente a questo metodo si è che qualora il solido non sia riducibile in frammenti, occorre che il recipiente ove è contenuto il liquido sia piuttosto largo, quindi un piccolo errore nell'apprezzare la posizione del livello produce un errore non trascurabile nella misura del volume; l'uso di tappi o coperchi smerigliati terminanti in un tubo capillare non eliminano questa causa d'errore nel caso di recipienti piuttosto larghi. Un altro errore pure non trascurabile si ha nella possibile differenza della quantità di liquido che rimane aderente alle pareti e nel menisco prima e dopo l'immersione del solido.

« Credo che il seguente apparato elimini o riduca le suddette cause di errore meglio di moltissimi finora proposti; esso inoltre ha il vantaggio di poter essere facilmente e rapidamente composto, delle dimensioni che si ritengono più opportune, con recipienti d'uso comune nei Laboratori.

« Esso si compone d'un bicchiere di vetro A, ad orlo smerigliato, nel cui interno trovasi fissata stabilmente alle pareti, con ceralacca o altrimenti, una astina di vetro o di platino α ricurva all'insù, la cui estremità è affilata, distante dalle pareti 5 a 10 mm. e termina nel piano dell'orlo. Una buretta di Mohr B, munita alla parte superiore di un tubo di gomma, permette di lasciare effluire nel bicchiere o di aspirare dal medesimo un volume noto di liquido.

« Affinchè l'astina termini esattamente nel piano dell'orlo del bicchiere, la si fissa per es. con ceralacca press'a poco ad altezza conveniente, poscia, mentre il mastice adoperato è ancor molle, si capovolge il bicchiere su di un piano, e così l'estremità dell'astina cade o viene sollevata sino al piano suddetto.

« Per misurare il volume d'un solido si spalma leggermente con grasso o paraffina la superficie piana e resa orizzontale dell'orlo del bicchiere, si riempie questo d'acqua e di questa si regola la quantità insino a che essa nel bicchiere affiori esattamente alla punta dell'astina e che nella buretta il livello si trovi alla parte inferiore della graduazione. Quindi si aspira nella buretta un volume di acqua maggiore di quello del solido, s'introduce questo nel bicchiere e si lascia effluire acqua dalla buretta finchè il livello affiora nuovamente alla punta suddetta. L'aumento del volume dell'acqua rimasta nella buretta è uguale al volume del solido, che si suppone coperto interamente dall'acqua del bicchiere (1).

(1) L'astina α potrebbe anche trovarsi fuori del liquido, colla punta rivolta all'ingiù e terminante nel piano dell'orlo del bicchiere. L'affioramento è indicato dal salire che fa il liquido lungo la punta, che deve essere asciugata ogni volta, per adesione; la determinazione è meno esatta che colla punta immersa, ma più facile.

« In questo modo si evita completamente l'errore che può provenire dalla variazione della quantità d'acqua rimasta aderente alle pareti del bicchiere, poichè questo è pieno fino all'orlo; si evita altresì l'errore che può derivare da variazioni della forma del menisco e della quantità d'acqua in esso contenuta, poichè il menisco manca affatto e la superficie libera dell'acqua è piana in tutta la sua estensione; finalmente l'errore derivante da una possibile differenza della posizione del livello dell'acqua prima e dopo l'immersione del solido, è reso se non nullo, almeno molto piccolo.

« La sensibilità di questo modo di ridurre il livello d'un liquido sempre a una stessa posizione è, almeno teoricamente, grandissima. Difatti un elemento qualsiasi della superficie liquida, vicino alla verticale passante per la punta dell'astina, costituisce uno specchietto piano, orizzontale, mobilissimo, perfettamente equilibrato, il quale viene a ruotare d'un angolo relativamente grande quando il livello comincia ad essere anche menomamente deformato dalla punta.

« Se quindi osserviamo l'immagine d'una linea (p. es. la linea di separazione d'un campo o di un oggetto oscuro da uno brillante) prodotta per riflessione sulla superficie del liquido, le parti della immagine che si trovano sulle visuali passanti presso la punta appariranno spostate e quindi l'immagine apparirà deformata, qualora la punta abbia fatto deviare anche in grado minimo la superficie del liquido. Spostando l'occhio in modo che la punta s'avvicini all'immagine della linea suddetta e anche l'attraversi, si trova facilmente il punto di dove la deformazione di questa appare maggiore o per lo meno si osserva più facilmente e con maggior sicurezza. — Se la rotazione della superficie del liquido è molto grande, lo spostamento dell'immagine è così grande che guardando verso la punta apparirà un punto luminoso in campo oscuro, o una macchia oscura in un campo brillante.

« In pratica è difficile ottenere tutta la sensibilità e specialmente tutta la precisione che risultano teoricamente; è probabile che la distanza alla quale la punta comincia a deformare sensibilmente la superficie liquida non sia rigorosamente costante neppure per uno stesso liquido in condizioni apparentemente immutate; tuttavia il grado di sensibilità e di precisione realmente ottenibili sono sufficienti per lo scopo attuale; e così per una differenza di 0,001 mm. fra le due posizioni del livello prima e dopo l'immersione del solido, l'errore nel volume di questo è solamente di 0,1 mm³. per ogni cm² dell'area della sezione della bocca del recipiente.

« Avviene talvolta che l'acqua non bagna bene la punta, e quando questa trovasi ancora a distanza relativamente grande sotto la superficie dell'acqua, questa si spezza formando una depressione che termina sulla punta, più o meno vicino alla sua estremità, e che non sparisce se non quando la punta si trova ancora molto più al disotto del livello. Ho cercato di evitare questo inconveniente, che rende impossibile di ridurre con qualche esattezza il li-

vello ad una stessa posizione, ed ho trovato che se l'astina è di vetro, l'arrovantare la punta per liberarla da tracce di grasso riesce piuttosto dannoso che utile; il lavarla con ammoniaca, soluzione di carbonato sodico, acido nitrico bollente, e così pure l'aggiungere all'acqua un po' di glicerina per aumentarne la scorrevolezza riesce pressochè inutile. Trovai invece utile lo sciogliere nell'acqua un po' di sapone (usai quello cosiddetto di glicerina) che probabilmente rende possibile che sussista al disopra della punta una pellicola liquida anche sottile; la soluzione deve essere recente e deve esser la stessa prima e dopo l'immersione del solido, per evitare che la punta possa cominciare a deformare la superficie liquida a distanze diverse. È utile altresì di provare la punta prima di fissarla al bicchiere (il vetro vecchio pare meno adatto di quello recente) immergendola ripetutamente nell'acqua, e scegliendone una che non manifesta alcuna tendenza a dar origine alla suddetta depressione. Questo inconveniente si evita pure completamente usando, invece di acqua, petrolio.

« Qualora il volume del solido che si vuol determinare sia maggiore della capacità della buretta, si potrà con una pipetta calibrata aspirare dal bicchiere in una o più volte un volume sufficiente e misurato di liquido; oppure si potrà far uso di una pipetta non calibrata e misurare il volume di liquido tolto coi soliti recipienti graduati. Si dovrà poi al solito ottenere l'esatto affioramento del livello dell'acqua alla punta mediante la buretta.

« È comodo altresì l'uso d'una buretta chiusa in fondo da un rubinetto a tre vie invece che da uno semplice; si può così aspirare successivamente un volume misurato di liquido e lasciarlo effluire per la terza via, ripetendo l'operazione, finchè si è tolto dal bicchiere un volume sufficiente di liquido.

« Molte misure eseguite con questo metodo diedero valori concordanti, entro i limiti d'esattezza della buretta ».

Fisica terrestre. — *Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884.* Nota del dott. G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. TACCHINI.

« Tra le molte relazioni pubblicate intorno a questo terremoto, le più notevoli sono senza dubbio quella della Commissione italiana ⁽¹⁾ e l'altra della Commissione francese ⁽²⁾. In entrambe si ritiene che, ad eccezione dell'ora

(1) *I terremoti andalusi cominciati il 25 dicembre 1884.* Memoria di T. Taramelli e G. Mercalli, pubblicata negli Atti della R. Acc. dei Lincei, anno CCLXXXIII, 1885-86.

(2) *Mission d'Andalusie. Études relatives au tremblement de terre du 25 décembre, 1884 etc.* Mémoires présentés par divers savants à l'Acad. des Sc. de l'Inst. Nat. de France,

ottenuta all'Osservatorio astronomico di S. Fernando presso Cadice, tutti i dati di tempo osservati nella Spagna, lasciano molto a desiderare in quanto ad esattezza. Così le diverse ore, fornite da città anche assai importanti, sono talmente incerte ed in contraddizione tra loro, che la Commissione italiana credette bene di rinunciare a qualsiasi calcolo sulla velocità di propagazione delle onde sismiche. Stando alla Commissione francese, le indicazioni orarie fornite in Spagna sia dagli orologi dei privati, sia da quelli degli stabilimenti pubblici, sia infine da quelli delle ferrovie, variano da 9^h 9^m a 9^h 34^m p.! Tanta diversità nei dati del tempo non può spiegarsi colla sola differenza di longitudine, ma deve per la maggior parte attribuirsi agli orologi mal regolati; di guisa che anche la Commissione francese venne alla conclusione che non solo era impossibile di servirsi delle varie ore per la determinazione della velocità di propagazione del movimento, ma eziandio di fissare, a mezzo delle stesse, la posizione e la forma dell'epicentro.

« Ma nella Relazione francese si trova riportata a pag. 22 la seguente osservazione interessante, fatta in Andalusia, che a prima vista parrebbe condurre ad una soddisfacente soluzione nella ricerca della velocità: « au « moment de la première et principale secousse, deux employés de l'administration des télégraphes, l'un à *Malaga*, l'autre à *Velez Malaga*, étaient « en train de correspondre. Ce dernier, surpris par la secousse, cesse brusquement la correspondance. Son collègue s'étonne de cet arrêt subit, lorsque, « 6 secondes environ après l'interruption de la dépêche, il sent à son tour la « secousse. Or la distance de Velez Malaga à Malaga est d'environ 30 kilomètres, et si l'on tient compte de la distance de ces deux localités au point « médian de la zone centrale, d'où l'on peut supposer que partait à peu près « le mouvement, il en résulte que l'ébranlement se serait propagé avec une « vitesse d'au moins 1500 mètres par seconde. La vitesse ainsi déterminée « est un minimum, car le chiffre de 6 secondes constaté entre l'arrivée du « mouvement ondulatoire à Velez Malaga et à Malaga est un maximum. En « réalité, la durée de la transmission du mouvement sismique a été de 4 à « 6 secondes, et, par suite, la vitesse observée a été comprise entre 1500 e « 2200 mètres; mais si l'on tient compte de ce que la position de la partie « médiane de la zone centrale n'est pas exactement connue, il faut en conclure « que la vitesse de propagation en question a pu dépasser ces nombres ». Ed infatti, attenendoci alla posizione dell'epicentro stabilita nella Relazione italiana, si trova che Velez Malaga e Malaga distando rispettivamente circa 22 e 44 km. dall'epicentro, la distanza percorsa dalle onde sismiche sarebbe ap-

t. XXX, n. 2. — Gran parte delle notizie ivi contenute sono riportate nell'opera del sig. F. Fouqué: *Les tremblements de terre*. Paris, 1889 a pag. 120 e 286-307; come pure nel t. C dei Comptes Rendus di Parigi, 1^o sem. 1885, pag. 598, 1049, 1113, 1436.

prossimativamente di 22 km.; il che darebbe una velocità di 3666 o di 5500 metri al secondo, a seconda che si assuma nel calcolo l'intervallo massimo di 6 secondi o quello minimo di 4 ⁽¹⁾. Ma da questi calcoli noi non possiamo attenderci alcun risultato serio, perchè la velocità dipende dalla posizione dell'epicentro, la quale è naturalmente alquanto indeterminata; e la prova ne è che, stando alla Commissione francese, Malaga sarebbe soltanto 9 km. più distante di Velez Malaga per rispetto all'epicentro, invece che 22. Adunque, essendo così indeterminata la distanza vera, percorsa dalle onde sismiche, e troppo incerto il tempo impiegato a percorrerla, non deve recare maraviglia il trovare tanta discordanza tra i valori della velocità che si possono dedurre dall'osservazione fatta all'ufficio telegrafico di Malaga. Un'altra ragione per non prendere in alcuna considerazione le predette velocità si è che, stando alla Relazione italiana, sembra che si tratti di una replica (del 26 dicembre 1884) e non della grande scossa del 25 dicembre come si dice nella Relazione francese nel brano testè riportato ⁽²⁾.

« Però le onde sismiche, propagandosi a distanze ben più ragguardevoli al di fuori della Spagna, giunsero a perturbare i magnetografi a registrazione continua di Lisbona, Parigi, Greenwich e Wilhelmshaven; e le ore del loro passaggio nelle suddette località risultando sufficientemente garantite, tenuto conto delle ragguardevoli distanze, si potevano prestare assai bene al calcolo della velocità. Se non che la Commissione italiana non credette utilizzare tali ore, perchè si trattava di fenomeni troppo isolati per poter concludere con certezza che essi fossero veramente l'effetto dell'arrivo del movimento sismico andaluso fino a quei punti così distanti, anzichè dipendenti da fenomeni locali. Ma in occasione dell'altro non meno celebre terremoto ligure del 23 febbraio 1887 si verificarono nuovamente consimili perturbazioni nei magnetografi d'Europa, anzi questa volta in maggior numero di osservatori.

« Nella relazione della Commissione francese sul terremoto dell'Andalusia, pubblicata appunto dopo il terremoto ligure, si utilizzano i nuovi fatti e si discute sulle possibili cause di siffatte perturbazioni. In tale discussione si è maggiormente inclinati verso l'ipotesi che quest'ultime siano dovute alla conseguenza diretta d'una trasmissione del movimento nel suolo anzichè allo sviluppo di correnti elettriche; ed in seguito, senza volersi pronunciare definitivamente su tale questione, allora molto dibattuta, si fa un tentativo nel

(1) Nella Relazione italiana si dubita che la stessa velocità di 3666 metri al secondo sia troppo grande, perchè quasi 9 volte maggiore della media (416 metri) delle velocità trovate in sette terremoti da Schmidt, Mallet, Seebach e Lasault.

(2) Nel rapporto del Fouqué: *Explorations de la Mission chargée de l'étude des tremblements de terre de l'Andalusie*, pubblicato nei Comptes Rendus di Parigi (t. C, 1° sem. 1885, pag. 1049) si trova pure riportata quasi con le stesse parole l'osservazione fatta a Malaga; ma il fatto viene riferito al 26 dicembre 1884, come appunto si dice nella Relazione italiana.

calcolare la velocità di propagazione in base alle ore di Cadice (9^h 18^m) Lisbona (9^h 19^m), Greenwich (9^h 25^m) e Wilhelmshaven (9^h 29^m), ore tutte espresse in t. m. di Parigi. Ecco il risultato a cui giunse la Commissione francese:

« Combinando Cadice con Lisbona si trova una differenza di distanza delle stesse da Alhama (assai vicina all'epicentro) di circa 220 km. e una velocità di metri 3600 per secondo.

« Combinando Alhama con Greenwich si trova, sopra una distanza di 1650 km., una velocità di 4500 metri.

« Combinando Alhama con Wilhelmshaven si trova, sopra una distanza di 2040 km., una velocità di 3100 metri.

« Combinando Greenwich con Wilhelmshaven si ottiene una differenza di distanza delle medesime da Alhama di 390 km. ed una velocità di 1600 metri.

« Però, quasi tutti questi calcoli sono inesatti a causa di parecchi equivoci commessi. Così nel 1° calcolo si attribuisce a Lisbona una maggior distanza di 220 km. da Alhama per rispetto a Cadice, mentre in realtà tale valore è assai più grande. Nel 2° e 3° calcolo, mentre si combinano le ore di Greenwich e Wilhelmshaven con quella di Cadice, le distanze invece si assumono da Alhama, ed in tal modo le medesime risultano circa 200 km. più grandi. Finalmente nel 3° calcolo, non si sa perchè, sembra che siasi diminuita di un intero minuto la differenza tra le ore di Cadice e Greenwich.

« Rifacendo i calcoli a dovere, conservando gli stessi dati orari della Commissione francese, e correggendo le sole distanze, contate a partire dall'epicentro, si ottiene quanto segue:

Combinando Cadice con Lisbona	si ottiene la velocità di 4830 metri
» Cadice con Greenwich	» » 3430 »
» Cadice con Wilhelmshaven	» » 2820 »
» Greenwich con Wilhelmshaven	» » 1750 »

« Nonostante le correzioni apportate, questi valori, se da una parte accennano in generale ad una forte velocità, sono però sempre molto divergenti tra loro e non ispirano davvero una grande fiducia (1). Tant'è vero che il capi-

(1) Nella *Meteorologische Zeitschrift* del febbraio 1885 a pag. 76 si trova una breve Nota del dott. Eschenhagen, in cui dopo aver descritti gli effetti del terremoto andaluso sopra gli strumenti magnetici di Wilhelmshaven, egli termina col fare alcune considerazioni sulla velocità di propagazione. In mancanza di dati orari più sicuri per la zona epicentrale, il dott. Eschenhagen assunse l'ora 8^h 53^m (t. m. l.) osservata a Madrid ed uguale a quella di Siviglia, e così trovò che le onde sismiche impiegavano 7 minuti per percorrere la distanza di 1650 km. dall'epicentro fino a Greenwich, 11,4 minuti per la distanza di 2040 km. dall'epicentro fino a Wilhelmshaven, e per conseguenza 4,4 minuti per percorrere

tolo sulla velocità di propagazione viene così chiuso nella Relazione francese: « Avec les données actuelles, il est impossible d'apporter plus de précision dans les calculs de ce genre et, par suite, d'en tirer aucune conséquence sérieuse ».

« Di tale parere non è stato però il dott. Cancani, il quale in un recente lavoro ⁽¹⁾ è ritornato sulla questione; ed utilizzando anche l'ora di Parigi, sebbene meno attendibile rispetto alle altre, ha trovati i seguenti valori, che su per giù s'accordano con quelli precedenti da me ricalcolati:

Alhama — Lisbona,	distanza di	530 km.,	velocità di	4200 metri
« — Parigi,	»	1350 »	»	3200 »
« — Greenwich,	»	1620 »	»	3600 »
« — Wilhelmshaven,	»	2000 »	»	2800 »

« Il Cancani ritenendo eccellenti i dati orarî su i quali ha fondato il precedente calcolo, ne conclude: « . . . si vede chiaramente come col diminuire la distanza, la velocità che si deduce va crescendo, appunto perchè col diminuire la distanza si fa maggiormente sentire sugli apparecchi l'effetto delle onde longitudinali ». Anzi egli si fonda in special modo su questa velocità così variabile nel terremoto andaluso, per vedere pienamente confermato quanto il Wertheim ⁽²⁾ scriveva già fin dal 1849, sulla possibilità cioè che nei terremoti si riscontri realmente l'esistenza delle onde longitudinali e trasversali contemplate nella teoria dell'elasticità dei corpi solidi, le quali si propagano nell'interno di una massa indefinita, la prima con una velocità circa doppia della seconda.

« Dinanzi ad una questione così importante io credo che valga la pena di studiare ancora più a fondo il presente terremoto andaluso, per vedere realmente fino a che punto possa il medesimo confermare le viste del Wertheim.

« Intanto non posso fare a meno di rilevare che col metodo adottato dal

la distanza di 390 km., che rappresenta la maggior distanza di Wilhelmshaven per rispetto a Greenwich contata dall'epicentro. Ecco le velocità che ne conseguono:

Combinando l'epicentro con Greenwich	circa	4000 metri.
« l'epicentro con Wilhelmshaven	»	3000 »
« Greenwich con Wilhelmshaven	»	1500 »

Questi valori s'accordano abbastanza con quelli di sopra trovati. In base ad essi, il dott. Eschenhagen crede che forse la velocità diminuisce considerevolmente colla distanza, ed aggiunge che non bisogna dimenticare che Wilhelmshaven è circondata da suolo paludoso, il quale potrebbe aver ritardata la propagazione delle onde sismiche. Su tale interpretazione io mi riservo di tornare in altra circostanza.

(1) *Sulle ondulazioni provenienti da centri sismici lontani.* Ann. dell'Uff. Centr. Met. e Geodinamico It., ser. 2^a, vol. XV, parte I, 1893, pag. 13.

(2) *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps solides et dans les liquides.* Ann. de chimie et de physique. Sér. 3^a, t. XXXI, p. 19.

Cancani si prende per punto di partenza l'ora di Cadice e con essa si confrontano successivamente le ore delle altre località più distanti. Ne consegue che se per una qualsiasi ragione l'ora di Cadice fosse troppo alta, anche di un sol minuto, tale errore basterebbe a spiegare a maraviglia il diminuire della velocità col crescere della distanza. Ed infatti, diminuendo di un sol minuto primo l'ora di Cadice, le velocità sopra riportate del Cancani si ridurrebbero rispettivamente a 2850, 2800, 3200, 2600, e così sparirebbe la presunta variazione colla distanza. Una spiegazione consimile si può dare nel calcolo, fatto dall'Offret, della velocità di propagazione del terremoto ligure del 23 febbraio 1887; poichè se l'ora di Mentone, sulla quale egli si è completamente basato, fosse realmente troppo bassa di qualche minuto soltanto, ciò spiegherebbe appunto l'accrescimento della velocità colla distanza, legge del tutto opposta a quella notata dal Cancani pel terremoto andaluso.

« Mi si accuserà giustamente di un pessimismo troppo spinto nel voler io supporre l'ora di Cadice errata d'un intero minuto primo, essendo notorio che la medesima fu dedotta dall'arresto di due pendoli astronomici del vicino osservatorio di S. Fernando. Io non ho difficoltà alcuna ad ammettere che quei pendoli fossero esattamente regolati fino entro pochi secondi; ma poichè lo scuotimento del suolo a Cadice avrà certamente avuta una sufficiente durata, chi sa dire a quale fase della scossa sarà avvenuto l'arresto dei pendoli? Quel che è certo si è, come vedremo in seguito, che le ore dedotte dai magnetografi di Lisbona, Parigi, Greenwich e Wilhelmshaven si riferiscono al principio della perturbazione, mentre potrebbe darsi benissimo che l'ora di Cadice si riferisse al massimo e fors'anco ad una fase ancor più inoltrata della scossa. Tale questione si trova pure accennata nella Relazione italiana, dove si ritiene che la scossa a Cadice dovette naturalmente cominciare 2 o 3 secondi prima dell'istante in cui si fermarono i pendoli. Anche nella Relazione francese si fa osservare che la discordanza nelle varie ore della Spagna può dipendere, oltre che da molte altre cause di errore, anche dalla circostanza che l'arresto degli orologi a pendolo non avvenne istantaneamente, bensì soltanto dopo un lasso di tempo variabile a partire dal momento della scossa e poté dipendere dal senso in cui giunse il movimento; e si fa inoltre notare assai giustamente che un orologio può arrestarsi al momento di una scossa consecutiva, mentre non è stato arrestato da una prima scossa, benchè più violenta, ma in direzione differente. Una bella conferma di ciò si ha nel grande terremoto degli Stati Uniti del 31 agosto 1886, in cui nella stessa Charleston, città assai vicina all'epicentro, degli orologi a pendolo, perfettamente regolati, fornirono ore assai diverse, perchè alcuni si arrestarono alla 1^a fase della scossa ed altri, diversamente orientati, alla 2^a fase della stessa, verificatasi circa 50 secondi dopo (!). Stando alla Relazione della Commis-

(!) Nell'importante relazione del Capt. Dutton, *The Charleston Earthquake* ecc. (United States Geol. Survey, Ninth Ann. Report. 1887-88) si parla molto a lungo, a

sione spagnuola, la durata della scossa ha variato da pochi secondi fino a 60 secondi (a Cadiar) secondo le differenti località della Spagna. Ad Alhama, presso l'epicentro, ed a Cadice la durata si pone di 15 secondi; ma questo dato si deve forse ritenere come grossolanamente approssimato. Ad ogni modo io debbo fare osservare che l'uomo suole in generale apprezzare la durata del movimento assai minore di quella che sussiste in realtà; ed i diagrammi che si ottengono di continuo da adatti strumenti, tanto al Giappone quanto in Italia, stanno a provarlo irrefutabilmente. Dunque non solo non ripugna, ma è molto probabile l'ipotesi che l'ora di Cadice, per il solo fatto di essere stata fornita dall'arresto di pendoli, si riferisca ad una fase piuttosto avanzata della scossa, mentre si sa che le ore delle località più distanti si riferiscono invece al principio. Questa circostanza potrebbe, da sola, essere senz'altro la causa della decrescenza della velocità colla distanza, sopra accennata.

« Il metodo poi adoperato dal Cancani e dall'Offret, che consiste nel combinare direttamente l'ora più bassa con tutte le rimanenti, sarebbe irreprensibile solo quando le ore fossero tutte esatte fino entro pochi secondi (segnatamente quella della località più prossima all'epicentro, che si prende nel calcolo per punto di partenza), ovvero quando le distanze di quest'ultima località da tutte le altre fossero così ragguardevoli da non farsi sensibilmente sentire un errore, anche di qualche minuto, nei dati del tempo. Ma nel caso

pag. 384-385, del fatto che l'arresto di un orologio a pendolo può avvenire assai dopo il principio della scossa. In generale, qualora è stato possibile comparare gli orologi arrestati con buone osservazioni personali, i primi mostrarono invariabilmente un tempo più alto. La differenza, dice il Dutton, è evidentemente dovuta al fatto che in generale si richiede un tempo considerevole prima che l'accumulazione degli effetti della vibrazione del fabbricato giunga ad arrestare un orologio a pendolo. A titolo di esempio mi piace qui riportare le differenze che si sono riscontrate in alcune località dagli Stati Uniti, tra le ore dedotte dall'arresto degli orologi e quelle osservate direttamente, in quei casi dove il confronto si rese possibile.

Nome della località	Distanza dall'epicentro	Intervallo decorso tra il principio della scossa all'epicentro e		Differenza
		il principio del movimento osservato personalmente	l'istante d'arresto dei pendoli	
Nashville. . . .	km. 705	144 ^s	186 ^s	42 ^s
Covington . . .	785	155	235	80
Cincinnati . . .	790	155	195	40
Pittsburgh. . .	845	174	234	60
Brooklyn. . . .	1035	204	234	30
New York . . .	1040	204	249	45

del terremoto andaluso non verificandosi nè l'una, nè l'altra di queste condizioni, è prudente il non dare la preferenza ad alcuna delle ore osservate, per non essere esposti ad ottenere strani risultati. Facendo altrimenti, equivarrebbe ad accordare all'ora prescelta quale punto di partenza, un peso tante volte maggiore delle altre ore, il che non è giusto fare senza speciali circostanze. Invece, tutte le ore possedute debbono ugualmente entrare nel calcolo, e tanto meglio se siasi in grado di accordare a ciascuna di esse il relativo peso, in seguito ad una conveniente discussione dei dati. Inspirato a questi concetti è precisamente il metodo adoperato dai signori Dutton e Newcomb nel calcolo della velocità di propagazione del terremoto di Charleston, metodo al quale mi sono io stesso attenuto nello studio dei terremoti di Zante del 1893 ⁽¹⁾, avendolo trovato pienamente soddisfacente e superiore a tanti altri fin qui adoperati, e specialmente per il fatto che in questo metodo vengono di molto attenuate le conseguenze di qualche errore nei dati del tempo. È pur vero che il medesimo si basa sull'ipotesi che la velocità rimanga costante col variare della direzione e della distanza; ma se ciò in realtà non si verificasse prossimamente in natura, noi dovremmo aspettarci di trovarne la prova nei residui delle equazioni di condizioni da noi stabilite per il calcolo de' minimi quadrati.

« In una prossima Nota mi riservo di far conoscere il risultato dei calcoli da me condotti a termine, basati sopra le ore relative alle cinque località prese in considerazione dal Cancani. Naturalmente nel calcolare la velocità del terremoto andaluso, parto anch'io dall'ipotesi che le perturbazioni riscontrate nei vari magnetografi siano realmente da attribuirsi al passaggio delle onde sismiche, ipotesi che ormai si avvicina alla certezza, in seguito all'esperienza avuta in tanti altri terremoti posteriori a venire fino a' nostri giorni ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Vedi il capo VI della Relazione del prof. Issel e dott. G. Agamennone: *Intorno ai fenomeni sismici osservati nell'isola di Zante durante il 1893* (Ann. dell'Uff. Centr. Met. Geod. It., vol. XV, parte I, 1893, p. 65, od anche i Rend. della R. Accad. dei Lincei, Classe di sc. fis., mat. e nat. Sedute del 17 dicembre 1893 e 15 aprile 1894).

. ⁽²⁾ Su di ciò possono consultarsi le seguenti mie Note:

Sopra la correlazione dei terremoti con le perturbazioni magnetiche. Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. VI, p. 21; seduta del 5 genn. 1890.

I terremoti e le perturbazioni magnetiche. Id., vol. II, p. 479; seduta del 21 maggio 1893.

Vedo con piacere che le idee, da me espresse in queste due Note, sono pienamente condivise dal sig. H. Wild in un suo importante articolo comparso nel *Journal de S.-Petersbourg* (dimanche 17 (19) juillet 1894) in cui egli riporta che anche il magnetografo di Pavlovsk fu perturbato in occasione del terremoto di Costantinopoli del 10 luglio 1894.

Chimica fisica. — *Ancora sulla dissociazione elettrolitica in relazione col potere rotatorio ottico.* Nota di G. CARRARA e G. GENNARI, presentata dal Corrispondente NASINI.

Chimica fisica. — *Sulla rifrazione atomica del Selenio.* Nota di I. ZOPPELLARI, presentata dal Corrispondente NASINI.

Chimica. — *Sul trisolfuro di etenile.* Nota del dott. P. CANDIANI, presentata dal Corrispondente NASINI.

Chimica. — *Osservazioni sulle relazioni tra il peso molecolare e la densità ne' corpi solidi e liquidi. — Sali alogenati.* Nota di UGO ALVISI, presentata dal Corrispondente NASINI.

Chimica fisica. — *Dissociazione elettrolitica e legge della diluizione nei solventi organici.* Nota di G. CARRARA, presentata dal Corrispondente NASINI.

Chimica. — *Nuova sintesi di Cumarine.* Nota di P. BIGINELLI, presentata dal Corrispondente BALBIANO.

Chimica. — *Sopra un nuovo alcool della lanolina.* Nota di G. MARCHETTI, presentata dal Corrispondente BALBIANO.

Chimica. — *Sull'esistenza della Coniina nel Sambucus nigra.* Nota del dott. G. DE SANCTIS, presentata dal Corrispondente BALBIANO.

Le precedenti Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

T. DEL BECCARO. *Sui resti quadratici.* Presentata dal SEGRETARIO.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BRIOSCHI ricorda brevemente le perdite fatte dalla Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, durante le ferie, nelle persone dei Soci stranieri H. VON HELMHOLTZ e N. PRINGSHEIM.

Il Segretario BLASERNA dà comunicazione delle lettere di ringraziamento, per la loro recente nomina, inviate dal Socio nazionale TACCHINI, dal Corrispondente PICCINI, e dai Soci stranieri: VON BAEYER, HALL, PRESTWICH, ROWLAND.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario BLASERNA presenta le numerose pubblicazioni giunte in dono all'Accademia durante le ferie, segnalando quelle inviate dai Corrispondenti: ARCANGELI, MILLOSEVICH, NASINI, VERONESE; e dai Soci stranieri: CAYLEY, KLEIN, LÉVY, POINCARÉ. Presenta inoltre un volume, inviato dalla vedova del prof. HERTZ, contenente le *Le lezioni sui principi di Meccanica*, fatte all'Università di Bonn dal defunto Socio straniero. Lo stesso Segretario BLASERNA segnala inoltre all'attenzione degli accademici un volume del *Catalogo di pubblicazioni scientifiche*, edito dalla Società Reale di Londra; un volume delle *Opere di Fermat* edite sotto gli auspici del Ministero della Pubblica Istruzione di Francia; il 7° fascicolo contenente i *Risultati scientifici delle campagne del Principe di Monaco*.

Il Socio TODARO presenta il 3° e 4° volume del periodico di morfologia animale da lui diretta, colle seguenti parole:

« Fo omaggio all'Accademia del terzo volume e dei due primi fascicoli del quarto volume delle *Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale di Roma ed in altri Laboratori biologici*.

« La pubblicazione di questo periodico venne iniziata nel 1873, anno in cui apparve il primo volume. Il secondo volume venne pubblicato nel 1878. Dopo tale anno ne era stata sospesa la pubblicazione, a motivo che la maggior parte dei lavori del predetto laboratorio vennero pubblicati nei Rendiconti e nelle Memorie dell'Accademia. Ma una pubblicazione speciale della morfologia animale, oramai che in Italia si sono accresciuti notevolmente i cultori di questa scienza, s'impone necessariamente da sè; e però io ho voluto riprendere l'antica pubblicazione, col renderla atta a raccogliere quanto d'importante si fa presso noi in tale scienza.

« Nei due volumi che vi presento troverete infatti, non solo i lavori eseguiti nel laboratorio che io dirigo, ma altresì lavori notevoli dei migliori cultori della morfologia in Italia, lavori che si conterranno anche nel fascicolo che chiude il volume dell'anno attuale, già in corso di stampa, e nel primo fascicolo del prossimo anno, pel quale i lavori sono già pronti.

« A me pare che con tale pubblicazione si venga a tutelare meglio la produzione scientifica italiana, nè gli stranieri potranno più addurre il motivo di ignorare quanto in questa scienza si fa in Italia, trovandosi ora riunite in un periodico le memorie di morfologia animale che prima venivano disperse in vari giornali di natura diversa ».

CONCORSI A PREMIO

Il Segretario BLASERNA dà comunicazione dell'elenco dei lavori presentati al Concorso SANTORO, scaduto il 30 giugno 1894.

1. GATTI MARIO. — *Soluzione del problema delle rotative, del problema della motrice ad aria compressa calda ecc. applicate alla filatura.*

2. NOTARI PIETRO. — *Filatura meccanica ed automatica della lana di legno.*

CORRISPONDENZA

Il Segretario BLASERNA dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziarono per le pubblicazioni ricevute:

La R. Accademia delle scienze di Amsterdam; le Società di scienze naturali di Emden e di Chemnitz; il Museo di geologia pratica di Londra; il Museo Nazionale di Buenos Aires.

Annunciarono l'invio delle proprie pubblicazioni:

Il Ministero di agricoltura, industria e commercio di Amsterdam; la Società scientifica di Santiago; la Società geologica di Calcutta; le Università di Basilea, di Halle, di Marburgo, di Tokyo; la Scuola politecnica di Berna; l'Osservatorio v. Kuffner di Vienna; l'Osservatorio Radcliffe di Oxford.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 18 novembre 1894.

- Albert 1^{er}*, prince souverain de Monaco. — Résultats des Champagnes scientifiques accomplies sur un Yacht. Fasc. VII. Monaco, 1894. 4°.
- Bilancio tecnico della Società di mutuo soccorso in Napoli detta Fondo del Grano. Roma, 1894. 8°.
- Bohicchio N.* — Contibuzione allo studio delle fermentazioni casearie. Modena, 1884. 8°.
- Id.* — Nota chimico-batteriologica sul vino cotto abruzzese. Casalbordino, 1894. 8°.
- Id.* — Nuovo contributo allo studio del gonfiamento dei latticini italiani. Modena, 1894. 8°.
- Catalogue of scientific papers (Royal Society). Vol. X. London, 1894. 4°.
- Choffat P.* — Flore fossile du Portugal. Nouvelle contribution à la Flore mésozoïque. Lisbonne, 1894. 4°.
- Fischer Th.* — Uebersicht ueber die wissenschaftliche Litteratur zur Länderkunde Südeuropas. S. I. 1893. 8°.
- Giannelli L.* — La forma del cervello nei plagiocefali. Siena, 1894. 8°.
- Id.* — Nuovo processo di topografia della scissura di Rolando ecc. Siena, 1894. 8°.
- Id.* — Sopra alcune anomalie dei vasi. Siena, 1894. 8°.
- Id.* — Topografia cranio-rolandica nei plagiocefali. Siena, 1894. 8°.
- Ginzel F. K.* — Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Cometen. I Th. (Veröff. d. Rechen-Inst. d. K. Sternw. zu Berlin N. 3). Berlin, 1893. 4°.
- Harperath L.* — Die Welt-Bildung. (Chemische Briefe. V.). Köln, 1894. 8°.
- Klein C.* — Optische Studien an Granat, Vesuvian und Pennin. Berlin, 1894. 8°.
- Klossovsky A.* — Distribution annuelle des orages à la surface du globe terrestre. Odessa, 1894. 4°.
- Id.* — Organisation de l'étude climatérique spéciale de la Russie etc. Odessa, 1894. 8°.
- Langley.* — Nouvelle recherches sur la région infra-rouge du spectre solaire. Paris, 1894.
- Leighton V.* — The development of the wing of *Sterna Wilsonii*. Tufts College, 1894. 8°.
- Levy M. et Pavie G.* — Étude des moyens mécaniques et électriques de traction des bateaux. Paris, 1894. 4°.

- Mc Adie A.* — Protection from lighting. Washington, 1894. 8°.
- Millosevich E.* — L'era volgare. Roma, 1894. 8°.
- Monticolo A.* — Ciclesigrafo, nuovo strumento da disegno. Rio marina, 1893. 4°.
- Id.* — Planimetro ortogonale. Milano, 1894. 8°.
- Namias R.* — Fotochimica dei sali di Mercurio e processi fotografici basati sul loro impiego. Modena, 1894. 8°.
- Oldham R. D.* — A manual of the geology of India. Calcutta. 1893. 8°.
- Riccò A. e Arcidiacono S.* — Osservazioni puteometriche eseguite nell'Osservatorio di Catania. Catania, 1894. 8°.
- Id. e Saija G.* — Confronto della temperatura all'Osservatorio etneo ed all'Osservatorio di Catania. Catania, 1894. 8°.
- Ricerche fatte nel laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma ecc., pubblicate da F. Todaro. Vol. III, IV, 1-2. Roma, 1893-94.
- Ricerche sperimentali eseguite nell'anno 1893 nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. R. Nasini. Padova, 1894. 8°.
- Setti E.* — Osservazioni sul *Distomum gigas* Nardo. Genova, 1894. 8°.
- Stone E. J.* — Catalogue of 6424 Stars for the epoch 1890. Oxford 1894. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 25 novembre 1894.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Velocità superficiale di propagazione delle onde sismiche, in occasione della grande scossa di terremoto dell'Andalusia del 25 dicembre 1884.* Nota del dott. G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. TACCHINI.

« Facendo seguito ad una mia precedente Nota ⁽¹⁾ sullo stesso argomento, comincio dal premettere i dati orari che servirono a stabilire le equazioni di condizione, per risolvere il problema proposto col metodo de' minimi quadrati :

« Cadice. — All'Osservatorio astronomico di S. Fernando, presso Cadice, si arrestarono per la scossa due orologi a pendolo a $8^h 43^m 55^s$ (t. m. l.), la quale ora corrisponde a $9^h 18^m 5^s$ (t. m. Parigi) ⁽²⁾. Trattandosi di orologi astronomici, questo dato orario sarebbe senza dubbio sicuro entro pochi secondi, se non vi fosse l'incertezza, abbastanza ragguardevole, relativa alla fase della

⁽¹⁾ Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884. V. pag. 303.

⁽²⁾ L'ora $9^h 18^m$, che si trova nel Fouqué (*Les tremblements de terre*) e nella Relazione francese, è evidentemente data in cifra rotonda, non essendosi tenuto conto dei pochi secondi in più.

scossa in cui avvenne l'arresto dei pendoli. Tenuto conto di siffatta questione, già da me accennata nella Nota precedente, non credo di esagerare nel supporre che l'ora di S. Fernando possa contenere un'errore di $\pm 0^m, 5$.

« Lisbona. — La perturbazione registrata in quest'Osservatorio magnetico fu estremamente netta. Le curve della comp.^e orizzontale, della comp.^e verticale e della declinazione furono tutte e tre bruscamente interrotte a $8^h 33^m$ (t. m. l.), ora che si riferisce senza dubbio al principio della perturbazione, e che corrisponde a $9^h 19^m 5^s, 6$ (t. m. Parigi) ⁽¹⁾. La perturbazione è stata più forte nel declinometro e minore nella bilancia di Llyod. In tutti e tre gli strumenti magnetici la perturbazione ha perdurato circa 12 minuti e sembra sia stata prodotta da un unico urto; poichè le tracce, forti da principio, vanno poi gradatamente e assai regolarmente decrescendo, ciò che non sarebbe stato se altri urti fossero sopraggiunti, come appunto si era verificato tre giorni prima, in occasione di altra scossa. A Lisbona la carta fotografica, su cui si ottengono le curve magnetiche, si muove colla velocità di circa 15^{mm} all'ora, ed a parere dello stesso direttore sig. João Capello, l'incertezza nell'ora del principio della perturbazione può essere di $\pm 1^m$ e difficilmente può raggiungere $\pm 2^m$.

« Parigi. — All'Osservatorio magnetico del Parc Saint-Maur, la perturbazione in quel magnetografo fu così piccola che da principio era passata inosservata; ma in seguito il sig. Moureaux costatò una lieve indicazione, che dà $9^h 24^m$ (t. m. Parigi) per l'ora del principio. Poichè nei magnetografi francesi la carta fotografica scorre con una velocità di soli 10^{mm} all'ora, così è ovvio che l'ora suddetta è meno attendibile di quella di Lisbona. E forse appunto per questa ragione non si è voluto tener conto dell'ora di Parigi nel calcolo della velocità, che si trova nella Relazione francese.

« Greenwich. — Esaminandosi attentamente le curve di quell'Osservatorio magnetico, scrive il direttore W. Ellis ⁽²⁾, si riscontrò una lieve perturbazione nel declinometro e nel bifilare a $9^h 15^m$ (t. m. l.). Entrambi i magneti furono

⁽¹⁾ Il Fouqué (*Les tremblements de terre*, pag. 295) riporta l'ora $9^h 19^m$, che certamente è la stessa di sopra, ma arrotondata; e la medesima ora, data in cifra rotonda, si trova a pag. 11 e 23 della Relazione francese. Ma quivi a pag. 13 viene pure riportata l'ora alquanto diversa $9^h 20^m$, che probabilmente è l'arrotondamento dell'ora $9^h 19^m 57^s$, la quale si trova scritta sopra il diagramma delle perturbazioni magnetiche, inserito a pag. 12. Non è poi improbabile che l'ora $9^h 19^m 57^s$ sia stata sostituita per equivoco alla vera ora $9^h 19^m 5^s, 7$, quasi identica a quella da me sopra calcolata; e con ciò resterebbe pienamente spiegata la differenza di un minuto in più. Questo mio modo di vedere sarebbe confermato dal fatto che anche negli altri due diagrammi, riportati nella stessa pagina, relativi alle scosse del 22 dicembre 1884 e del 23 febbraio 1887, si trovano scritte le ore $4^h 15^m 57^s$ e $5^h 51^m 57^s$ (t. m. Parigi) invece delle rispettive $4^h 15^m 5^s, 7$ e $5^h 51^m 5^s, 7$, che corrispondono appunto alle ore $3^h 29^m$ e $5^h 5^m$ (t. m. Lisbona), essendo precisamente di $46^m 5^s, 7$ la differenza di longitudine, espressa in tempo, tra Lisbona e Parigi.

⁽²⁾ « Nature » t. XXXI, 1885, p. 262.

contemporaneamente posti in oscillazione, ma i movimenti non ebbero affatto il carattere di quelli magnetici; e se in realtà essi furono prodotti dal terremoto andaluso, sono un semplice effetto dell'urto, poichè i magneti sono pesanti sbarre, appese a fili di seta di alcuni piedi di lunghezza. Circa 10 minuti dopo si riscontra, nel bifilare, indizio non dubbio di una 2^a perturbazione. In corrispondenza alle perturbazioni magnetiche, nessuna anomalia nelle curve delle correnti telluriche. Riducendo l'ora di Greenwich al t. m. di Parigi si ottiene 9^h 24^m 21^s, riportata tal quale dal Fouqué (1), il quale dice che la medesima si riferisce al principio della perturbazione, ed aggiunge che questa, benchè sia meno marcata di quella di Lisbona, nondimeno è ancora assai nettamente indicata. — Poichè a Greenwich la velocità della carta fotografica è presso a poco di 15^{mm} all'ora, così si può ritenere che l'ora relativa a questa località possa contenere un errore all'incirca uguale a quello di Lisbona (2).

« Wilhelmshaven. — Secondo il dott. Eschenhagen (3), dei tre strumenti magnetici solo la bilancia di Lloyd mostrò una percettibile traccia, mentre il declinometro rimase in perfetto riposo e non si poté ricavar nulla dal bifilare, perchè la curva relativa era interrotta in quel punto per causa accidentale. La perturbazione incominciò a 9^h 52^m (t. m. l.) e perdurò quattro minuti. Nuovi urti ebbero luogo a 9^h 59^m, 10^h 0^m, 10^h 2^m, 10^h 5^m. Il dott. Eschenhagen ritiene che la bilancia di Lloyd abbia indubbiamente funzionato in questa occasione come una specie di sismografo. Il principio della perturbazione corrisponde a 9^h 28^m 47^s (t. m. Parigi), ora riportata tal quale dal Fouqué (4), il quale aggiunge che sebbene la perturbazione fosse, al pari di quella di Greenwich, meno marcata di quella di Lisbona, pure fu nettamente registrata. In quanto alla precisione dell'ora di Wilhelmshaven dirò che, in occasione del terremoto ligure del 1887, essendo stato nuovamente perturbato quel magnetografo, il dott. Eschenhagen ebbe a dire che l'errore possibile nell'ora poteva stare entro un minuto, di cui mezzo dovuto al rilevamento sulla curva e mezzo all'orologio.

(1) *Les tremblements de terre*, pag. 295. — Invece nella Relazione francese una volta si riporta l'ora 9^h 24^m ed un'altra volta 9^h 25^m, che certamente stanno a rappresentare l'ora da me data; ma arrotondata la 1^a volta fino al minuto immediatamente inferiore e la 2^a volta fino a quello immediatamente superiore.

(2) In occasione del successivo terremoto ligure del 1887, il sig. W. Ellis, direttore dell'Osservatorio magnetico di Greenwich, interpellato in proposito, rispose che le ore ricavate dalle proprie curve magnetiche potevano essere affette dall'errore di circa un minuto.

(3) *Met. Zeit.* del febbraio 1885, pag. 76. — « *Nature* » XXXI, 1885, p. 491.

(4) *Les tremblements de terre*, pag. 295. — Invece nella Relazione francese si riporta l'ora 9^h 29^m, evidentemente data in cifra rotonda. Devesi pure ritenere inesatta l'ora 9.28.4 che il Fouqué riporta a pag. 1051 del t. C, dei C. R., secondo che egli stesso dice in altra successiva Nota a pag. 1436; ma è curioso ch'egli poi qui cambi quell'ora nell'altra del tutto diversa 9.19.26.

« Poichè nelle varie relazioni sulla grande scossa del terremoto andaluso si riporta la notizia che essa fu registrata anche negli osservatori italiani di Moncalieri, Velletri e Roma, così sento l'obbligo di spendere su ciò qualche parola. — In quanto all'Osservatorio meteorico di Moncalieri, presso Torino, non mi è riuscito di rintracciare notizie precise in proposito, neppure nello stesso Boll. Mens. di Moncalieri e nel Bull. del Vulc. Ital. del prof. De Rossi; ma il fatto che non è stata da alcuno riportata l'ora, neppure approssimata, in cui la scossa fu osservata in questa città, fa giustamente supporre che non abbia quivi funzionato alcun sismoscopio o sismografo, ma che il passaggio delle onde sismiche abbia forse posto il solo tromometro in oscillazione. — Per l'Osservatorio meteorico di Velletri, presso Roma, trovo che si ebbe nel sismodinamografo del prof. Galli una leggerissima scossa alle 10^h p. (t. m. Roma) ⁽¹⁾, corrispondenti a 9^h 19^m 25^s (t. m. Parigi), vale a dire ad un'ora superiore di pochi secondi a quella registrata a Lisbona, che pur dista dall'epicentro tre volte meno al confronto. Nella Relazione italiana si pone giustamente in rilievo l'inattendibilità dell'ora di Velletri, facendosi osservare che se essa fosse esatta, se ne dovrebbe inferire l'enorme velocità di circa 17000 metri al secondo. Perciò è a dubitare che il terremoto andaluso abbia realmente agito sul sismodinamografo di questa città, potendosi trattare di semplice coincidenza casuale, tanto più se si pensi che con lo stesso strumento si registrarono ben 104 scossette dal 25 al 31 gennaio, ossia in soli 7 giorni. Riguardo a Roma, il prof. De Rossi ⁽²⁾ dice che a 10^h 15^m (t. m. Roma) ossia a 9^h 34^m 25^s (t. m. Parigi) egli trovò al tromometro eccessive ondulazioni. Roma si trova per rispetto all'epicentro ad una distanza intermedia a quelle di Parigi e Greenwich; e poichè a quest'ultime due località abbiám visto corrispondere all'incirca l'ora 9^h 24^m (t. m. P.), così non è improbabile che il tromometro abbia realmente risentito il passaggio delle onde sismiche, e che l'ora riportata dal De Rossi sia appunto elevata, perchè lo strumento fu forse casualmente osservato parecchi minuti dopo che dalla scossa venne posto in oscillazione ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Bull. del Vulc. Ital. del prof. De Rossi, XII, 1885, pag. 23.

⁽²⁾ Bull. del Vulc. Ital. del prof. De Rossi, XII, 1885, pag. 25.

⁽³⁾ Il De Rossi dal fatto che si ebbero indicazioni sismiche a Roma ed a Velletri, ne inferisce che di tutta l'Italia la zona romana e centrale fu più pronta a vibrare in conseguenza dell'urto iberico. Imperocchè i registratori automatici, che esistevano anche in moltissimi altri osservatori d'Italia avrebbero, dice egli, indicato il moto del suolo se si fosse notevolmente propagato al di fuori dell'Italia centrale. Io non posso condividere siffatta opinione, anzitutto perchè contro di essa starebbe l'osservazione di Moncalieri al nord della penisola italiana, in secondo luogo perchè si può spiegare assai più facilmente la mancanza d'indicazioni strumentali nel resto d'Italia. Infatti, è assai più verosimile ammettere che anche i tromometri di tutti gli altri osservatori italiani siano stati perturbati al pari di quello di Roma; ma la perturbazione essendo cominciata a notte assai inoltrata

« Da tutto ciò si vede l'impossibilità di poter trarre il menomo profitto dai dati orari ottenuti in Italia. Lo stesso è a dirsi di alcune osservazioni fatte in altre regioni europee, come nel Belgio, in Svizzera, in Inghilterra e perfino in Norvegia, come ora vengo ad accennare brevemente.

« Nella Relazione spagnuola si riferisce che il passaggio delle onde sismiche fu rilevato da un astronomo, mentre all'Osservatorio di Bruxelles stava osservando una stella ⁽¹⁾. Stando però al giornale inglese « Nature » (XXXI, 1885, p. 249) risulterebbe soltanto che la sera stessa del terremoto il sig. Lagrange, mentre all'Osservatorio di Bruxelles era in procinto di fare alcune osservazioni, notò che il grande telescopio era spostato. Di più, l'indomani si trovò arrestato un pendolo astronomico e gli altri marciare irregolarmente. — La sera del 25 dicembre, si ebbero due scosse a Zernetz nell'Engadina in Svizzera a 8^h 17^m ed a 11^h (t. m. Berna) vale a dire rispettivamente a 7^h. 56^m. 35^s e 10^h. 39^m. 35^s (t. m. P.) ⁽²⁾. Ciò dimostra che la prima di esse avvenne circa mezz'ora avanti la grande scossa andalusa, e la seconda più di un'ora dopo. — Nella località The Rookery, Ramsburg, Wiltshire in Inghilterra, circa le 10^h 20^m p. del 25 dicembre, il sig. Alfredo Batson, stando in letto ed in eccellenti condizioni di quiete, sentì un sensibile urto di terremoto in direzione sud-nord. Io non so in qual tempo sia espressa la suddetta ora, ma in una comunicazione che lo stesso signore ha fatta al giornale inglese « Nature » (XXXI, 1885, p. 200) si dice che l'ora corrisponde bene col tempo dell'avvenimento del terremoto andaluso ⁽³⁾. — Finalmente trovo nella Relazione italiana che il terremoto si sentì fino in Norvegia, essendosi sperimentata una trepidazione nel paese di Lesjeskegen.

« Nella Relazione italiana si dice che questi leggeri ed isolati movimenti di Lesjeskegen sono da ritenersi, al pari di quelli di Zernetz, di Greenwich e di Wilhelmshaven, dipendenti da fenomeni locali, e che se realmente il movimento sismico andaluso avesse attraversata tutta l'Europa, si sarebbe reso sensibile almeno in più di quattro punti. A sostegno di tale tesi si fa riflettere che non si osservò la minima alterazione nelle curve magnetiche registrate

(dopo le 10^h p., t. m. Roma) vale a dire un'ora più tardi dell'ultima ora regolamentare d'osservazione, potè la medesima passare del tutto inosservata. In quanto ai registratori automatici posseduti allora nei vari osservatori italiani, si sa bene che i medesimi non potevano avere quella sensibilità che oggi hanno i recenti strumenti; e quindi non deve arrecare alcuna maraviglia se nulla indicarono, nella stessa maniera appunto che nulla indicò nella stessa Roma il *protosismografo* e *microsismografo* De Rossi.

(1) Ciò si trova in una Nota del P. T. Bertelli nel Bull. Mens. di Moncalieri. Ser. 2^a, vol. V, p. 171, come pure nel Bull. del Vulc. Ital. XII, 1885, p. 150, e nella Relazione francese.

(2) Da una comunicazione di F. A. Forel nel giornale inglese « Nature » XXXI, 1885 p. 289.

(3) Tale notizia è pure riportata nel Bull. Mens. di Moncalieri. Ser. 2^a, vol. V, p. 11.

dagli strumenti pure delicatissimi del R. Osservatorio astronomico di Madrid e dei numerosi osservatori astronomici d'Italia e di Francia, molto più vicini all'epicentro in confronto di Greenwich e Wilhelmshaven. A questo proposito però io devo far riflettere che a quell'epoca nè in Spagna nè in Italia esistevano strumenti magnetici a registrazione continua, come disgraziatamente non esistono neppure oggi; e quanto alla Francia, è a dire che non aveva ancora cominciato a funzionare nel 1884 il magnetografo di Perpignan, assai vicino ai Pirenei, ma furono ben perturbati i magneti di Parigi quantunque assai più distanti. Di più, a causa della diversa sensibilità in cui si trovano gli strumenti magnetici nei vari osservatori d'Europa, non dovrebbe far meraviglia se alcuni tra essi, benchè più vicini all'epicentro abbiano potuto nulla indicare ⁽¹⁾. Pur non negando la possibilità che lo scoppiare di un forte terremoto in una data regione possa provocare altre scosse in contrade assai lontane, mi pare, dall'insieme dei fatti sopra esposti, che si possa più ragionevolmente supporre che, se non tutti, almeno gran parte dei fenomeni verificatisi in Europa la sera del 25 dicembre, siano l'effetto della propagazione delle onde sismiche irradiate dall'Andalusia, poichè queste non si resero sensibili soltanto in Svizzera, Inghilterra, Germania, e Norvegia, ma eziandio nel Portogallo, in Francia e nell'Italia, come di sopra si è visto. E questo mio modo di vedere sarebbe confermato dal comportarsi delle onde sismiche nel successivo terremoto della Liguria del 1887 ed in tanti altri notevoli verificatisi negli ultimi anni.

*
* *

« Da tutte le precedenti discussioni consegue che non possiamo disporre che di soli 5 dati orari da prendersi in considerazione, e cioè quelli di Cadice, Lisbona, Parigi, Greenwich e Wilhelmshaven. Abbiain visto che questi dati non hanno tutti lo stesso peso. Per semplificare alquanto il calcolo assegnerò il minimo errore di $\pm 0^m, 5$ all'ora di Cadice, di $\pm 1^m$ a quelle di Lisbona, Greenwich e Wilhelmshaven (dove la carta fotografica dei magnetografi scorre in ragione di circa 15^{mm} all'ora) e di $\pm 2^m$ all'ora di Parigi, dove la velocità della carta è di soli 10^{mm} ⁽²⁾. Per il computo delle distanze

⁽¹⁾ Di ciò si è avuta una prova luminosa, per non parlare di altri, nei recenti terremoti della Grecia del 1893 e 1894, nei quali si è visto rimanere inerti i magnetografi di Pola e Vienna, mentre furono perturbati quelli di Osservatori ben più lontani. È curioso, a tal proposito, anche notare che mentre il terremoto andaluso fu indicato dagli strumenti magnetici del Parc St.-Maur, a Parigi, non lo fu invece da quelli dell'Osservatorio di Montsouris, situato in questa stessa città, come viene detto nella stessa Relazione francese.

⁽²⁾ Ciò si trova in sufficiente accordo con quanto si asserisce nella Relazione francese a pag. 13: « En effet, les différents enregistreurs magnétiques en usage sont réglés de telle sorte que le tracé des courbes s'allonge suivant les instruments de 10 à 15 millimètres à l'heure. Un millimètre de longueur y correspond donc à un laps de temps de 4 à 8 minutes, et comme on peut aisément apprécier le tiers de millimètre, il s'ensuit que l'erreur possible est au plus de 2 à 3 minutes, et encore doit-on considérer une telle limite d'erreur comme exagérée ».

delle predette località dal centro di scuotimento, dichiaro di aver preso per punto di partenza l'epicentro stabilito nella Relazione italiana, il quale si trova all'incirca alla lat. $36^{\circ} 58' 30''$ N e long. $6^{\circ} 22'$ W da Parigi. Ho creduto di esprimere le distanze in miriametri ed in cifra rotonda, e le ore fino ai decimi di minuto primo, allo scopo di agevolare non poco i calcoli e colla convinzione che l'errore di qualche chilometro nelle distanze e di qualche secondo nei tempi non può modificare sensibilmente i risultati, tenuto conto, al paragone, dell'incertezza dei dati orari posseduti ed anche della posizione dell'epicentro. Seguono i dati, su i quali il calcolo fu basato, ed il risultato dello stesso ⁽¹⁾.

Nome della località	Distanza dall'epicentro	Ora osservata	Ora calcolata	Differenza
Epicentro	Mm. 0	^h ^m ^m	^h ^m ^m	^m
Cadice (S. Fernando) . . .	20	9.18,1 \pm 0,5	9.18,0	+ 0,1
Lisbona	49	9.19,1 \pm 1,0	9.19,5	- 0,4
Parigi (Parc. St.-Maur) .	141	9.24,0 \pm 2,0	9.24,3	- 0,3
Greenwick	164	9.24,4 \pm 1,0	9.25,6	- 1,2
Wilhelmshaven	206	9.28,8 \pm 1,0	9.27,8	+ 1,0

Ora all'epicentro $9^h 16^m, 9$

Velocità di propagazione . metri 3150 ± 190 al secondo ⁽²⁾.

« Ne' miei calcoli sulla velocità dei terremoti di Zante del 1893 e poi di quelli della Grecia del 1867 avendo io attribuiti differenti pesi ai dati orari, precisamente come ho fatto nel presente terremoto, è stato avanzato da qualche mio collega il dubbio che i risultati da me ottenuti potessero cambiare notevolmente col variare dei pesi, nell'assegnamento dei quali entra realmente alquanto arbitrarietà. Per togliere, a proposito di ciò, qualsiasi obiezione sull'attendibilità del precedente risultato, ho creduto conveniente ripetere il calcolo facendo a meno dei pesi, vale a dire ritenendo ugualmente

(1) I calcoli furono condotti collo stesso metodo già da me adoperato per i terremoti di Zante del 1893.

(2) Prendo qui l'occasione per rettificare un equivoco da me commesso in una mia Nota precedente nell'assegnare l'errore probabile alle velocità di propagazione dei terremoti della Grecia del 19 e 20 settembre 1867 (Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 6 maggio 1894). Poichè in quelli calcoli adottai per la prima volta per unità di misura il miriametro ed il minuto primo, nel calcolare l'errore probabile della velocità, per una inavvertenza deplorabile, adottai invece il chilometro ed il minuto secondo. Rifacendo il calcolo a dovere, si trova che gli errori probabili di quelle velocità, già pubblicati, devono farsi tutti sei volte più piccoli e precisamente come segue.

a pag. 445, velocità di propagazione . . . metri 450 ± 70 al secondo

„ 448 „ „ „ „ 1320 ± 310 „

„ „ „ „ „ „ 2300 ± 110 „

buone, ciò che a mio parere non è giusto, tutte le ore accettate. Il risultato del nuovo calcolo porta ai seguenti valori, assai vicini a quelli superiormente ottenuti.

Ora all'epicentro 9^h 16^m, 6

Velocità di propagazione . . . metri 3060 ± 220 al secondo.

« Da ciò si vede che il dubbio sopra esposto non ha ragione di sussistere. Ad ogni modo io ritengo che il 1° risultato sia sempre il più probabile, perchè nel 1° calcolo si è appunto tenuto conto del fatto che non tutte le ore sono ugualmente buone. Si potrà più o meno sbagliare nel classificare i vari dati orari secondo la loro bontà; ma a mio parere sarà sempre da preferirsi un assegnamento di peso, che lasci alquanto a desiderare, piuttosto che farne a meno del tutto.

« Per le 5 principali scosse di terremoto di Zante del 1893 (1) io trovai, come valori medi, le velocità di metri 2450 ± 70 e 3340 ± 230 , a seconda che le ore introdotte nel calcolo si riferivano alla fase massima od al principio dello scuotimento registrato nelle varie località. Il valore di metri 3150 ± 190 , di sopra trovato per il terremoto andaluso, è intermedio alle due anzidette velocità, accostandosi di preferenza a quella più elevata. La ragione di ciò deveasi forse ricercare nel fatto che mentre l'ora di Cadice, la località più prossima all'epicentro, appartiene probabilmente ad una fase piuttosto avanzata della scossa ed è dotata del massimo peso, al contrario tutte le restanti ore, di peso minore, si riferiscono al principio del movimento. Ad ogni modo bisogna convenire che l'accordo è più che soddisfacente, tenendo conto degli scarsi dati orari posseduti e delle difficoltà ancora inerenti a simile genere di ricerche. Io credo che la velocità di circa 3000 metri, da me trovata pel terremoto andaluso, non si possa molto discostare dal vero, perchè gettando uno sguardo sull'ultima colonna della tabella riportata, noi troviamo tra le ore osservate e quelle calcolate differenze, che sono dello stesso ordine dei limiti di errore relativi ai dati orari posseduti; anzi, per le prime tre località, tali differenze sono bene al di sotto dell'errore probabile ammesso. Nei miei calcoli io ho supposta uniforme la velocità; ma se questa ipotesi fosse realmente lontana dal vero, noi dovremmo accorgercene dalle stesse differenze ora accennate, poichè le medesime dovrebbero andare crescendo o decrescendo secondo una data legge. Ora niente di tutto questo si verifica nel nostro caso, dappoichè il senso di lieve accrescimento che si verifica nelle differenze fino a Greenwich, invece di mostrarsi più spiccato, cambia perfino segno per Wilhelmshaven, per la qual località la legge sarebbe pur dovuta restare meglio assodata. Certamente non è impossibile l'esistenza di una

(1) Vedi il Capo VI della Relazione del prof. A. Issel e dott. G. Agamennone: *Intorno ai fenomeni sismici osservati nell'isola di Zante durante il 1893* (Ann. dell'Uff. Centr. Met. e Geod. It. Ser. 2^a, vol. XV, parte I, 1893); od anche i Rend. della R. Accad. dei Lincei: sedute del 17 dicembre 1893 e 15 aprile 1894.

più o meno piccola variazione nella velocità delle onde sismiche, quale potrebbe esser causata da una modificazione di densità ed elasticità della crosta terrestre secondo le varie direzioni e le distanze, ma con i dati da noi posseduti non è possibile metterla in evidenza e tanto meno misurarla. Stando così le cose, l'ipotesi che la velocità di propagazione del terremoto andaluso sia rimasta presso a poco invariata fino alla maggiore distanza osservata, mi sembra l'espressione più naturale dei fatti ».

Chimica fisica. — *Ancora sulla dissociazione elettrolitica in relazione col potere rotatorio ottico* ⁽¹⁾. Nota di G. CARRARA e G. GENNARI, presentata dal Corrispondente NASINI.

« In un precedente lavoro sullo stesso argomento, comunicato alla R. Accademia dei Lincei nell'agosto 1893 e pubblicato nel vol. II, 1° sem., serie V^a, fascicolo 5° dei Rendiconti di detta Accademia, uno di noi (G. Carrara), dopo aver largamente riassunto i precedenti lavori sopra questa interessante questione, e tra gli altri quello eseguito quasi contemporaneamente in questo laboratorio dal dott. Zecchini sulla coniina ed i suoi sali, mostrava: come soluzioni equimolecolari di parecchi sali di nicotina avessero un potere rotatorio specifico così vicino fra loro da ritenersi uguale, date le difficoltà sperimentali che lo studio di dette soluzioni presentava e le grandissime differenze che i sali di nicotina mostrano quando si osservano in soluzioni concentrate.

« In detto lavoro, discutendosi i risultati fino ad allora ottenuti, si mostrava come la teoria della dissociazione elettrolitica fosse in accordo col fatto che i sali attivi in soluzione acquosa, si riferiscano essi ad un acido o ad una base attiva, hanno lo stesso potere rotatorio quando in modo opportuno si facciano i confronti. All'obiezione poi che il potere rotatorio dell'acido o della base in soluzione diluita dovrebbe essere uguale a quello dei sali, mentre invece non lo è, nella massima parte dei casi, si osservava che l'obiezione era più apparente che reale perchè nei casi osservati trattasi di acidi e basi deboli e perciò poco dissociati in soluzione, mentre se si fosse trattato di acidi o basi forti questo fatto avrebbe dovuto avverarsi; ed a questo punto fu detto: « Io sto ora lavorando sul potere rotatorio dell'acido amil-
« solforico e dei suoi sali. Questo è un acido energico e, se la teoria è vera,
« esso deve avere lo stesso potere rotatorio dei suoi sali. Anche lo studio che
« ho intrapreso sopra i sali di diisoamilammina e della triisoamilammina, la
« prima delle quali è una base assai energica, spero mi darà buoni re-
« sultati ».

« Nel fascicolo 4° del vol. XII della Zeitschrift für physikalische Chemie,

¹ Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Padova.

uscito il 24 Ottobre 1893, Hugo Hädrich pubblicò un lavoro assai interessante sopra questo argomento. L'autore esaminò alcuni sali di alcaloidi e precisamente il cloridrato, nitrato, solfato, amigdalato ecc. di morfina, chinina, conchinina, cinconidina, brucina, stricnina, metilmorfina e alcuni sali doppi dell'acido tartrico trovando, in generale, una perfetta concordanza nel potere rotatorio molecolare dello stesso alcaloide sotto forma salina diversa e allo stesso grado di diluizione. Per esempio:

Peso molecolare in 80 litri di	Cloridrato	Nitrato	Solfato	Tricloro- acetato	Amigdalato
Morfina	— 374	— 369	— 374	— 374	— 369
Chinina	— 584	— 584	—	—	— 584
Conchinina . .	+ 726	+ 726	+ 726	—	+ 726
Cinconidina . .	— 402	— 402	— 402		— 402
Peso molecolare in 40 litri di					
Stricnina	— 113	— 113	— 112	—	— 113
Brucina	— 136	— 136	—	—	—

Lo stesso fatto trovo per i tartrati doppi confermando così in gran parte i risultati già avuti dal Landolt.

« L'autore si pose pure la stessa obbiezione, concludendo che bisognava esaminare degli acidi o basi forti e perciò completamente dissociati. Queste sostanze però sono soltanto in piccolo numero fornite di potere rotatorio; fra esse rivolse l'attenzione sopra l'acido amilsolforico; ma per le difficoltà incontrate nella separazione dell'acido attivo da quello inattivo, per le quali bisogna partire da grandissima quantità di alcool, l'autore non potè effettuare questa ricerca e si propose di ritornare in seguito sull'argomento.

« Ora noi non abbiamo creduto di tralasciare il lavoro che uno di noi aveva annunciato circa due mesi prima del sig. Hädrich e questo specialmente dopo che da un anno il sig. Hädrich non si è più occupato dell'argomento.

« La preparazione dell'acido amilsolforico attivo è un'operazione assai lunga e noiosa, come fece giustamente osservare Ley (1).

« Noi lo abbiamo preparato partendo da un alcool che dava la deviazione $\alpha = 4.10$ per 30 cent. di lunghezza, abbiamo usato il processo suggerito da Cahours, mescolando all'alcool un egual peso di acido solforico concentrato e lasciando in riposo per un giorno e trasformandolo poscia nel sale baritico

(1) Berl Ber. VI, pag. 1362.

corrispondente, che poi venne cristallizzato frazionatamente, in modo da accumulare nelle porzioni più solubili l'amilsolfato attivo, secondo le prescrizioni di Pasteur.

« Dopo una serie di cristallizzazioni la solubilità del sale per 100 d'acqua era 9.26 % a 12° nelle prime porzioni, salì poi a 10.57 a 10°, a 10.62 a 11° per raggiungere nelle ultime porzioni 11.81 a 12°. Queste ultime sono assai prossime a quelle del Ley ⁽¹⁾, il quale trovò nelle ultime porzioni una solubilità del 12.1 %; naturalmente non possiamo escludere che vi fosse pure in presenza una certa quantità di sale inattivo; ma non crediamo che ciò possa avere grande influenza sui risultati perchè avendo per ogni serie di esperienze adoperato sempre lo stesso acido, i confronti tra il potere rotatorio dei diversi sali stanno egualmente.

« Il sale baritico dell'acido amilsolforico venne trasformato nell'acido corrispondente in soluzione acquosa per mezzo dell'esatta quantità di H_2SO_4 , evitando per quanto era possibile il riscaldamento prolungato, il quale come è noto scompone l'acido. Nella soluzione da noi avuta non c'era nè acido solforico libero, nè bario.

« Le determinazioni di concentrazione venivano poscia controllate per mezzo di una soluzione normale di potassa. I sali li abbiamo ottenuti aggiungendo gli alcali titolati a soluzioni eguali d'acido di concentrazione nota fino all'esatta neutralizzazione e poscia portandoli tutti allo stesso volume; in tal modo si avevano per ognuna delle due serie così esaminate soluzioni di concentrazione tale, che contenevano un egual peso di sostanza attiva allo stesso grado di diluizione.

« Le osservazioni le facemmo con un eccellente polarimetro a penombre Landolt-Lippich della fabbrica Schmidt e Haensch di Berlino di proprietà del prof. Nasini. Questo strumento permette l'approssimazione di 1 centesimo di grado. Abbiamo usato pel solito la luce del sodio e per gli angoli piccolissimi una lampada a gas di Hinks a tre becchi.

« I pesi specifici delle soluzioni si riferiscono all'acqua a 4° e le pesate sono ridotte al vuoto. Il calcolo del potere rotatorio specifico della sostanza disciolta lo abbiamo fatto con la nota formula:

$$[\alpha]_D^t = \frac{\alpha \cdot 10^4}{l \cdot p \cdot d_4^t}$$

dove α è l'angolo osservato, l la lunghezza del tubo in millimetri, d_4^t il peso specifico, p sarebbe il percentuale di sostanza disciolta; ma noi avendo determinato direttamente c , la concentrazione, cioè la quantità di sostanza sciolta in 100 cc. di soluzione, al valore $p \cdot d_4^t$ sostituiamo il valore di c trovato sperimentalmente, perchè $p \cdot d_4^t = c$.

(1) Id. id.

« Abbiamo poi calcolato il potere rotatorio molecolare moltiplicando il valore $[\alpha]_D^t$ per M che è il peso molecolare della sostanza disciolta.

I SERIE.

SOLUZIONI	t	l	d_A^t	C	α	$[\alpha]_D^t$	$M[\alpha]_D^t$
Acido amilsolforico	26.8	300	1.03352	14.688	+0.72	1.63	274
Amilsolfato potassico . . .	25.6	"	1.05867	18.010	+0.69	1.28	263
" sodico	26.0	"	1.05570	16.611	+0.74	1.48	281
" ammonico . .	26.5	"	1.02613	16.180	+0.72	1.48	274

II SERIE.

SOLUZIONI	t	l	d_A^t	C	α	$[\alpha]_D^t$	$M[\alpha]_D^t$
Acido amilsolforico	25.7	300	1.04662	20.853	+0.99	1.58	265
Amilsolfato potassico . . .	25.6	"	1.08223	25.565	+0.88	1.15	237
" sodico	24.6	"	1.07374	23.583	+0.92	1.30	247
" ammonico . .	21.2	"	1.03841	22.963	+0.86	1.26	233

« Come si vede se noi teniamo conto del fatto che gli angoli osservati sono piccoli e che perciò gli errori di osservazione, che per ripetute prove fatte non sono maggiori di 1 a 2 centesimi di grado nella media delle 20 letture eseguite per ogni osservazione, possono influire in modo sensibile, dobbiamo concludere che l'accordo fra i risultati sperimentali e le previsioni della teoria è assai soddisfacente, specialmente nella prima serie di esperienze, appunto là dove, per trovarsi l'acido e i sali in soluzione più diluita, la teoria è applicabile.

« Una piccola eccezione sembrerebbe che la facesse il sale potassico, per il quale le differenze col potere rotatorio molecolare delle altre soluzioni sono più grandi di quelle imputabili ad errori d'osservazione; ma, come mostreremo in seguito, questa eccezione è più apparente che reale, perchè appunto il sale potassico è quello che è meno dissociato in soluzione, come lo dimostrano gli abbassamenti molecolari del punto di congelamento delle sue soluzioni.

« Nella serie II di soluzioni più concentrate l'accordo è meno soddisfacente che nella I, ma però sempre tale da non contraddire affatto le previsioni della teoria, specialmente se si prende in considerazione che la concentrazione qui è abbastanza elevata e tale da non potersi più considerare le soluzioni come veramente diluite.

« Ecco ora i risultati delle determinazioni crioscopiche fatte sopra dette soluzioni:

		Concentrazione	Abbass. termom.	Coefficiente d'abbass.	Abbass. molecolare	
I Serie	{	amilsolfato potassico	20.499	3.79	0.1848	38
		" sodico	18.688	4.23	0.2263	43
		" ammonico	18.091	4.13	0.2283	42
II Serie	{	amilsolfato potassico	30.938	4.99	0.1603	33
		" sodico	28.144	5.58	0.1982	38
		" ammonico	27.403	5.61	0.2047	37

« L'acido amilsolforico non venne esaminato, ma si sa del resto che gli acidi alchilsolforici, secondo le esperienze di Ostwald, sono acidi assai energici e completamente dissociati.

« Da quanto abbiamo sopra esposto dunque crediamo che si possa concludere che soluzioni equimolecolari di acidi otticamente attivi completamente dissociati, hanno lo stesso potere rotatorio dei loro sali. Era dunque assai importante vedere se questo si verificava anche per le basi e perciò abbiamo preparato ed esaminato la diisoamilammina, base assai energica, sperando che fosse abbastanza solubile in acqua da poterne misurare l'angolo di rotazione, ma disgraziatamente vi è pochissimo solubile e perciò ci venne a mancare il termine di confronto più importante. Ci limitammo quindi a studiare alcuni suoi sali.

« La preparazione della diisoamilammina attiva è altrettanto lunga e noiosa quanto quella dell'acido amilsolforico attivo. Abbiamo prima concentrato otticamente l'alcool amilico attivo seguendo il processo Le Bel; facendo cioè passare una corrente di H Cl gassoso e secco nell'alcool amilico scaldato a 100°, distillando il cloruro d'amile formatosi; frazionando l'alcool rimasto; ripetendo questo trattamento per parecchi giorni; in modo da non avere in ultimo che un alcool bollente a 127°-128°.

« Riuscimmo così ad avere un alcool che deviava — 6.1 per 300 mm. Questo alcool venne trasformato nel bromuro d'amile corrispondente, per mezzo del bromuro di fosforo; ottenemmo così un bromuro d'amile che bolliva a 117°-120° ed aveva tutti i caratteri descritti dal Le Bel (1). Questo bromuro d'amile venne trasformato nella diisoamilammina corrispondente, seguendo il processo di Plimpton (2), con ammoniaca alcoolica in tubi chiusi.

« In questa preparazione come è noto si formano miscugli di mono- e di triisoamilammina; noi siamo riusciti dopo parecchie distillazioni frazionate ad ottenere la diisoamilammina bollente tra 180°-185° con tutti i caratteri

(1) Boll. de la Soc. Chim. de Paris, 25, 545.

(2) Journ. Chem. Soc. I. 39° 331-342.

descritti da Plimpton; aveva un peso specifico $d_4^{27} = 0.76964$ e deviava per 100 mm. $\alpha = 1.85$.

« Anche per questa non si può escludere che vi fosse insieme diisoamilammina inattiva; ma per le stesse ragioni dette già per l'acido amilsolforico crediamo i risultati perfettamente comparabili.

« I sali esaminati furono il solfato, l'acetato, ed il propionato; questi sali li abbiamo ottenuti neutralizzando un certo peso dell'ammina con soluzioni di acido titolato.

« Ecco ora i risultati avuti:

SOLUZIONI	t	l	d_4^t	c	α	$[\alpha]^t$	$M[\alpha]^t$
Solfato d'isoamilammina	20° 6	100	1.01935	12.915	+0.28	2.17	446
Acetato " "	19° 8	100	1.00068	13.604	+0.27	1.98	430
Propionato " "	21° 0	100	1.00045	14.482	+0.27	1.86	430

« Dall'esame della soprascritta tabella appare anche per la diisoamilammina, base assai energica, un soddisfacente accordo tra il potere rotatorio molecolare dei suoi sali, accordo tanto più interessante in quanto che si tratta di angoli assai piccoli, pei quali anche un errore di 1 o 2 centesimi di grado possono produrre sensibili differenze nel risultato finale. Concludendo dunque: anche queste nuove osservazioni da noi portate all'interessante argomento non fanno che confermare sempre più le previsioni della teoria della dissociazione elettrolitica, togliendo di mezzo una delle più forti obiezioni ».

Chimica fisica. — *Sulla rifrazione atomica del Selenio* ⁽¹⁾. Nota di I. ZOPPELLARI, presentata dal Corrispondente NASINI.

« Sul poter rifrangente del selenio non si trovano che pochissime determinazioni, e la sua rifrazione atomica può dirsi che non sia conosciuta. Il Gladstone ⁽²⁾ assegnò veramente come rifrazione atomica al selenio il numero 30,5; ma questo valore non va d'accordo con quello che si ricaverebbe da alcune esperienze del Gladstone stesso sull'acido selenioso e selenico che condurrebbero a un numero molto più piccolo. È probabile che il Gladstone

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

⁽²⁾ Amer. Journ. of Science, (3), vol. XXIX, pag. 55. Anno 1885, *Present state of our Knowledge of Refraction Equivalents*.

abbia dedotto il numero 30,5 dalle esperienze che J. L. Sirks ⁽¹⁾ fece sopra il selenio solido e che qui riporto

A	a	B	C	c	D
$n = 2,654$	2,692	2,730	2,787	2,857	2,98

« Queste esperienze del Sirks e quelle due del Gladstone di cui dirò in seguito sono le sole che io conosca sull'argomento.

« Ho intrapreso lo studio ottico dei composti del selenio allo scopo di dare con qualche approssimazione la rifrazione atomica dell'elemento, e nel tempo stesso per indagare quali analogie e quali differenze presentano le sue combinazioni con quelle analoghe dello zolfo ⁽²⁾. Pur troppo tale studio non può farsi con esattezza che su pochi composti; quelli organici conosciuti non sono molti, e taluni facilmente si decompongono; quanto alle combinazioni inorganiche, ad eccezione dei sali degli acidi, è a dirsi presso a poco lo stesso.

« Le esperienze ottiche sono state eseguite con un eccellente spettrometro costruito da Hildebrand in Freiberg, di proprietà del prof. Nasini: questo strumento permette l'approssimazione di 10". Il metodo eseguito è quello delle minime deviazioni prismatiche; gli indici si riferiscono alle righe α , β , γ , dello spettro dell'idrogeno, ed alla riga D, i pesi specifici all'acqua a 4° e le pesate relative sono ridotte al vuoto. Come peso atomico del selenio adottai il numero 79.

Selenio solido.

« Come fu detto il Sirks determinò l'indice di rifrazione del selenio solido; dalle sue esperienze, ammettendo che il peso specifico del selenio studiato dal Sirks sia 4,65, si ricaverebbe per la riga H_α (C dello spettro solare)

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{H_\alpha} - 1}{d} &= 0,38430 & \frac{\mu_{H_\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H_\alpha}^2 + 2)d} &= 0,14903 \\ P \frac{\mu_{H_\alpha} - 1}{d} &= 30,36 & P \frac{\mu_{H_\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H_\alpha}^2 + 2)d} &= 11,77. \end{aligned}$$

Seleniuro di etile $\text{Se}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$

« Lo preparai secondo il processo di Rathke ⁽³⁾, cioè facendo agire il pentaseleniuro di fosforo sopra l'etilsolfato potassico e idrato potassico.

« È un liquido incolore, quasi inodoro che bolle fra 108°-109° (colonna nel vapore) alla pressione di mm. 760,2 ridotta a 0°. Il suo specifico a 27°,5 è 1,23039.

⁽¹⁾ Pogg. Ann. CXLIII, pag. 429. I numeri sono riportati nel Jahresbericht, anno 1874, pag. 151.

⁽²⁾ Vedere il lavoro dei prof.ⁱ Nasini e Costa, *Sulle variazioni del potere rifrangente e dispersivo dello zolfo nei suoi composti*. Roma. 1891.

⁽³⁾ Liebig's Annalen. Vol. CLII, pag. 210. Anno 1869.

« Una determinazione della densità del suo vapore eseguita secondo il metodo di V. Meyer mi diede i seguenti valori:

$$p = 0,0373; \quad V = 6,6 \text{ cc.} \quad t = 24^{\circ} \quad H = 759,6.$$

	trovata	calcolata per $\text{Se}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$
« Densità di vapore riferita all'aria.	4,80	4,74

« All'analisi ebbi i seguenti risultati:

gr. 0,1894 di sostanza diedero gr. 0,1248 di H_2O e gr. 0,2458 di CO_2

	trovato	calcolato
C %	35,37	35,03
H %	7,31	7,29.

Biseleniuro di etile $\text{Se}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2$

« Lo preparai aggiungendo del selenio al monoseleniuro di etile e lasciando a ricadere per circa tre ore a 70° e poi distillando.

« È un liquido giallo rossastro, di odore nauseante, che bolle tra $186^{\circ},9$ - $187^{\circ},9$ (corr.) alla pressione di mm. 758,05 ridotta a 0° . Il suo peso specifico a $21^{\circ},6$ è 1,60323.

« La determinazione di densità di vapore mi diede i seguenti risultati:

$$p = 0,0498 \quad V = 5,9 \text{ cc.} \quad t = 21^{\circ} \quad H = 760,5$$

	trovata	calcolata per $\text{Se}_2(\text{C}_2\text{H}_5)_2$
« Densità di vapore	7,20	7,47.

Selenoxene SeC_6H_5

« Lo preparai seguendo il metodo di Paal ⁽¹⁾ cioè per l'azione dell'acetilacetone sopra il pentaseleniuro di fosforo.

« È un liquido facilmente movibile, incolore, di odore debole ma poco gradito, che ricorda quello del tióxene.

« Bolle fra $154^{\circ},7$ - $156^{\circ},72$ (corr.) alla pressione di mm. 758,2 ridotta a 0° . Il suo peso specifico a $26^{\circ},1$ è 1,23186.

« La determinazione di densità di vapore mi diede:

$$p = 0,0332 \quad V = 5,4 \text{ cc.} \quad t = 22^{\circ},2 \quad H = 757,1.$$

	trovata	calcolata per SeC_6H_5
« Densità di vapore	5,30	5,50

« All'analisi gr. 0,1826 di sostanza mi diedero gr. 0,0864 di H_2O e gr. 0,3030 di CO_2

	trovato	calcolato
C %	45,25	45,28
H %	5,26	5,03.

(1) Berl. Ber. Vol. XVIII, pag. 2255. Anno 1885.

Acido selenico H_2SeO_4

« Proveniva dalla fabbrica E. Merck in Darmstadt. Per assicurarmi della purezza del prodotto ne determinai l'acidità, e poi sopra altra parte della stessa soluzione feci la determinazione ponderale di selenio, precipitandolo con anidride solforosa dopo d'aver aggiunto alla soluzione acido cloridrico per ridurre l'acido selenico in selenioso.

« La determinazione dell'acidità diede il 41,81 %, e l'analisi ponderale il 41,47 % d'acido.

« Le osservazioni ottiche le feci sopra due soluzioni acquose contenenti l'una il 41,8112 e l'altra il 27,334 % d'acido.

« Come poter rifrangente specifico dell'acqua presi i seguenti valori

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}} - 1}{d} &= 0,3311 & \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}}^2 - 1}{(\mu_{\text{H}_2\text{O}}^2 + 2)d} &= 0,2050 \\ \frac{\mu_{\text{D}} - 1}{d} &= 0,33352 & \frac{\mu_{\text{D}}^2 - 1}{(\mu_{\text{D}}^2 + 2)d} &= 0,20609. \end{aligned}$$

Acido selenioso H_2SeO_3

« Come accennai più sopra, l'acido selenico e l'acido selenioso sono stati studiati dal Gladstone. Per l'acido selenico in soluzione al 9,36 % trovò la rifrazione molecolare essere 24,60 per la riga A e per la formula n , per l'acido selenioso in soluzione al 15,40 % trovò per la stessa riga e per la stessa formula il valore 26,39.

« Preparai quest'acido per ossidazione del selenio con acido nitrico. La massa ottenuta la purificai mediante ripetute cristallizzazioni. L'acido così ottenuto è in cristalli esagonali un po' efflorescenti, solubili in acqua ed in alcool.

« Le osservazioni le feci sopra due soluzioni acquose, l'una al 30,593 % e l'altra al 22,9711 % d'acido.

Selenocianato potassico SeCNK

« L'ebbi secondo il processo indicato da Crookes ⁽¹⁾, cioè per azione del selenio sopra il cianuro potassico. È in cristalli aghiformi deliquescenti all'aria, solubili in acqua ed in alcool. Purificai il prodotto mediante ripetute cristallizzazioni. Per assicurarmi della purità del composto, ho fatto la determinazione di selenio, precipitandolo con acido cloridrico. Gr. 0,6924 di selenocianato diedero gr. 0,3765 di selenio disseccato a 100°:

	trovato	calcolato
Se %	54,37	54,86.

« Nelle tabelle seguenti, che non hanno bisogno d'illustrazione, sono raccolti i risultati delle osservazioni e dei calcoli relativi.

(1) Liebig's Annalen, vol. LXXVIII, pag. 177. Anno 1851

TABELLA I.

Nome delle sostanze	t	d_4^{20}	μ_{H_2O}	μ_D	μ_{H_2O}	$\frac{\mu_{H_2O}-1}{d}$	$\frac{\mu_{H_2O}^2-1}{(\mu_{H_2O}^2+2)d}$	$\frac{\mu_D-1}{d}$	$\frac{\mu_D^2-1}{(\mu_D^2+2)d}$
Seleniuro di etile.	27°,5	1,23039	1,47831	1,47687	1,48586	1,48974	0,38468	0,22812	0,22959
Biseleniuro di etile.	21°,6	1,60823	1,56348	1,56925	--	--	0,35146	0,20271	0,20442
Selenoxene.	26°,1	1,23186	1,49592	1,50075	1,53549	1,54614	0,40257	0,23711	0,23906
Acido selenico in sol. aq. al 41,8112%.	24°	1,39783	1,38835	1,39126	1,39648	1,40311	0,27818	0,16914	0,17006
" " in sol. aq. al 27,384%.	25°,1	1,23563	1,36593	1,36802	1,37801	1,37801	0,29614	0,18124	0,18217
Acido selenioso in sol. aq. al 22,9711%.	25°,2	1,18186	1,35895	1,36016	1,36311	1,36977	0,30312	0,18592	0,18681
" " in sol. aq. al 30,593%.	26°,1	1,25856	1,36955	1,37189	1,37686	1,38226	0,29362	0,17952	0,18053
Selenocianato potassico in sol. aq. al 32,7722%.	25°	1,15137	1,36651	1,36902	1,37469	1,38213	0,31882	0,19478	0,19598
" " in sol. aq. al 43,5497%.	22°,1	1,24552	1,38935	1,39214	1,39894	1,40813	0,31260	0,19003	0,19124

TABELLA II.

Nome delle sostanze	Formula	$\frac{d_4^{20}}{d}$	$P \frac{\mu_{H_2O}-1}{d}$	$P \frac{\mu_{H_2O}^2-1}{(\mu_{H_2O}^2+2)d}$	$P \frac{\mu_D-1}{d}$	$P \frac{\mu_D^2-1}{(\mu_D^2+2)d}$	$\frac{\mu_{H_2O}-\mu_{H_2O}}{d}$	$\frac{\mu_{H_2O}^2-1}{\mu_{H_2O}^2-1}$
Seleniuro di etile.	$Se(C_2H_5)_2$	137	52,70	31,25	53,10	31,45	0,01855	1,03172
Biseleniuro di etile.	$Se_2(C_2H_5)_2$	216	75,91	43,78	76,79	44,15	--	--
Selenoxene.	$Se_2C_2H_5$	159	64,01	37,70	64,63	38,01	0,04112	1,09691
Acido selenico in sol. aq. al 41,8112%.	H_2SeO_4	145	29,65	17,27	29,79	17,41	--	--
" " in sol. aq. al 27,384%.	"	"	29,44	17,14	29,39	17,19	--	--
Acido selenioso in sol. aq. al 22,9711%.	H_2SeO_3	129	26,67	15,74	26,84	15,78	--	--
" " in sol. aq. al 30,593%.	"	"	26,90	15,73	26,98	15,85	--	--
Selenocianato potassico in sol. aq. al 32,7722%.	$SeCNK$	144	42,05	25,04	42,81	25,23	--	--
" " in sol. aq. al 43,5497%.	"	"	41,56	24,57	41,83	24,77	--	--

TABELLA III.

Rifrazione atomica del selenio.

Nome delle sostanze	Riga α		Riga D	
	Formula n	Formula n^2	Formula n	Formula n^2
Selenio solido.	30,36	11,77	—	—
Seleniuro di etile	19,70	10,93	19,56	10,94
Biseleniuro di etile	21,45	11,73	21,57	11,82
Selenoxene	18,81	10,94	19,33	11,18
Acido selenico soluzione acquosa 41,8112 %	15,85	8,87	16,25	9,22
Id. soluzione acquosa 27,334 % .	15,64	8,74	15,85	9,00
Acido selenioso soluzione acquosa 22,9711 %	15,67	8,92	15,95	9,12
Id. soluzione acquosa 30,593 % .	15,90	8,91	16,09	9,19
Selenocianato potassico soluzione acquosa 32,7722 % . . .	25,49	15,34	25,79	15,50
Id. soluzione acquosa 43,5497 %	25,00	14,84	25,30	15,04

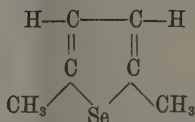
« Credo opportuno dare un'altra tabella dove confronto i composti del selenio da me studiati con quelli corrispondenti dello zolfo.

« Per l'acido selenico, selenioso e pel selenocianato potassico in questa tabella, ho preso i rispettivi valori medi: i numeri relativi ai composti solforati sono tolti dalla Memoria dei prof.ⁱ Nasini e Costa già citata. I valori relativi all'acido solforoso li ho calcolati aggiungendo alla rifrazione molecolare dell'anidride solforosa liquida, quella dell'acqua.

TABELLA IV.

	$P \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{d}$	$P \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H\alpha}^2 + 2)d}$	$\frac{\mu_{H\gamma} - \mu_{H\alpha}}{d}$	$\frac{\mu_{H\gamma}^2 - 1}{\mu_{H\alpha}^2 - 1}$
Selenio solido	30,36	11,77	0,01335 0,01867	1,03172 1,04215
Zolfo solido	15,75	7,95		
Differenza	14,61	3,82		
Seleniuro di etile	52,70	31,25		
Solfuro di etile	47,28	28,32	0,04112 0,02642	1,12342 1,06021
Differenza	5,45	2,93		
Biseleniuro d'etile	75,91	43,78		
Bisolfuro d'etile.	61,83	36,33		
Differenza	14,08	7,45	0,04112 0,02642	1,12342 1,06021
Selenoxene	64,01	37,30		
Dimetiltiofene	57,87	34,02		
Differenza	6,14	3,28		
Acido selenico	29,54	17,20	0,04112 0,02642	1,12342 1,06021
Acido solforico	22,87	13,76		
Differenza	6,67	3,44		
Acido selenioso	26,78	15,74		
Acido solforoso	21,70	13,40	0,04112 0,02642	1,12342 1,06021
Differenza	5,08	2,34		
Selenocianato potassico .	41,80			
Solfocianato potassico . .	33,47			
Differenza	8,33			

« Il potere rifrangente atomico del selenio l'ho dedotto sottraendo dalle rifrazioni molecolari dei composti studiati, i valori che spettano agli altri elementi. Per le rifrazioni atomiche degli elementi rispetto alla riga α ho preso quelle riportate nella Memoria dei prof.ⁱ R. Nasini e T. Costa sullo zolfo; per la riga D quelle calcolate dal dott. Zecchini ⁽¹⁾ per la formula n , e quelle date dal Conrady ⁽²⁾ per la formula n^2 . Al selenoxene ho attribuito la formula



ossia quella con due doppi legami; per l'acido selenico e selenioso ho attribuito agli atomi di ossigeno il valore 2,8, ossia quello del così detto ossigeno alcoolico; per ricavare la rifrazione atomica del selenio da quella molecolare

⁽¹⁾ Gazzetta chimica italiana. Vol. XXII, parte 2^a, pag. 592. Anno 1892.

⁽²⁾ Zeitschrift für physikalische Chemie. Vol. III, pag. 226. Anno 1889.

del selenocianato potassico ho sottratto da questa la rifrazione del cianuro potassico che ho appositamente determinato, sebbene già esistessero delle determinazioni del Gladstone in proposito. Il cianuro lo purificai per successive cristallizzazioni dall'alcool, e mi assicurai della sua purezza, giacchè il peso del cianuro adoperato per le soluzioni corrispondeva esattamente alla quantità trovata poi per titolazione col processo volumetrico di Liebig. La soluzione adoperata conteneva il 13,6962 % di sostanza ed aveva il peso specifico di 1,07782 a 20°,1

$$\begin{array}{ll} P \frac{\mu_{H\alpha} - 1}{d} = 16,56 & P \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H\alpha}^2 + 2)d} = 9,73 \\ P \frac{\mu_D - 1}{d} = 16,52 & P \frac{\mu_D^2 - 1}{(\mu_D^2 + 2)d} = 9,73. \end{array}$$

« Il Gladstone aveva trovato per la riga A e per la formula n il numero 17,20.

« Dalle diverse tabelle è facile il vedere come nei composti esaminati il selenio presenti molte analogie collo zolfo: soprattutto si nota che esso ha una rifrazione atomica molto meno elevata nei composti ossigenati che nei derivati organici, quali il seleniuro e il biseleniuro d'etile, soltanto le variazioni fra i diversi valori non sono qui così forti come per lo zolfo. Noto è il fatto della maggior rifrazione atomica del selenio nel biseleniuro d'etile in confronto di quella che si ricava dal monoseleniuro: per lo zolfo ciò pare si verifichi, ma in grado minore: parrebbe quindi che quella causa quasi costante di aumento nella rifrazione atomica di un elemento che è l'accumularsi dell'elemento stesso nella molecola, agisse qui con maggiore energia. Nel selenoxene la rifrazione atomica del selenio è un po' minore, tanto per la formula n che per la formula n^2 , di quella che si ricava dagli altri due composti organici: ora Nasini e Carrara nel loro lavoro sul poter rifrangente dell'ossigeno, dello zolfo e dell'azoto nei nuclei eterociclici ⁽¹⁾ misero in rilievo un analogo comportamento pel dimetiltiofene. Una differenza notevolissima noi troviamo nella rifrazione atomica dei due elementi allo stato libero; mentre per lo zolfo libero si hanno dei valori che sono compresi tra 15,50 e 16,00 (formula n) e fra 7,70 e 8,20 (formula n^2) ossia dei numeri di poco superiori a quelli che si ricavano dallo studio dei solfuri organici, dei cloruri di zolfo ecc. ecc., per il selenio invece, se le esperienze del Sirks sono esatte, si hanno i numeri 30,36 (formula n) e 11,77 (formula n^2): in altri termini si ha qui il fatto veramente notevole di una fortissima differenza coi valori dedotti dal seleniuro e biseleniuro d'etile e dal selenoxene (20 in media) per la formula n , e di un accordo quasi perfetto per la formula n^2 (11,31 in media).

⁽¹⁾ Gazz. chimica italiana, vol. XXIX, parte 1^a, pag. 256. Anno 1894.

« Del resto al solito si nota in generale come maggior uniformità nei risultati, un maggior accordo per le rifrazioni atomiche quando si considerano i numeri relativi alla formula n^2 invece di quelli relativi alla formula n . Confrontando le rifrazioni molecolari dei composti del selenio con quelle dei composti analoghi dello zolfo, si trova in generale una differenza presso a poco costante, eccettuando bene inteso dal confronto per la formula n il selenio e lo zolfo liberi.

È molto notevole il fatto che dal selenocianuro si ricavano pel selenio dei valori elevatissimi per la rifrazione atomica, la qual cosa già era stata notata dal Nasini e dal Costa per lo zolfo: anzi fu per questa ragione che volli studiare di nuovo il poter rifrangente del cianuro potassico, nel dubbio che potessero essere troppo piccole quelle trovate dal Gladstone; invece il numero da me trovato è ancora minore, e quindi non resta dubbio tanto per lo zolfo quanto per il selenio che l'unione loro col potassio produce un esaltamento nella rifrazione, un fatto analogo essendo stato constatato dal Nasini e dal Costa anche pel solfuro di potassio.

« Confrontando l'acido selenico col selenioso si trova che la differenza tra la loro rifrazione molecolare corrisponde quasi esattamente al valore della rifrazione atomica dell'ossigeno così detto alcoolico, e naturalmente le stesse relazioni si avrebbero per i valori delle due anidridi che facilmente si possono calcolare; invece per le corrispondenti anidridi dello zolfo si hanno dei valori assai vicini fra di loro: il poter rifrangente dell'anidride solforosa è di pochissimo inferiore a quella dell'anidride solforica, sebbene ci sia in questa un atomo di ossigeno in più. Quanto alla dispersione il selenio libero secondo le esperienze del Sirks, come egli stesso fece notare, è enormemente dispersivo; per $\frac{\mu_D - \mu_A}{d}$ si avrebbe 0,07 mentre per lo zolfo non si avrebbe che 0,01: ma nei composti questa enorme dispersione non si trova più; infatti se il selenoxene ha una dispersione quasi doppia (formula di Gladstone) del dimetiltiofene, il solfuro di etile d'altra parte ha una dispersione maggiore del seleniuro d'etile.

Riassumendo, mi sembra di poter concludere che nei composti da me studiati il selenio si comporta in modo analogo allo zolfo: le variazioni però sono meno accentuate, cosicchè per il selenio le differenze costitutive hanno meno influenza sui valori delle rifrazioni molecolari. Il peso atomico maggiore ed il carattere metalloidico meno spiccato sono probabilmente la causa di queste differenze nel comportamento dei due elementi; è da prevedere quindi che per il tellurio e i suoi composti la rifrazione si comporterà ancor più come proprietà additiva. Anche il fatto che il poter rifrangente dell'elemento libero è così differente da quello che esso ha nei composti, avvicinerrebbe il selenio ai metalli.

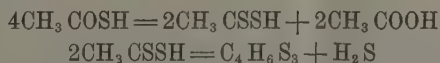
« Sono già in corso esperienze sui composti del tellurio e presto spero di pubblicarle ».

Chimica. — *Sul trisolfuro di etenile*. Nota del D^r. P. CANDIANI, presentata dal Corrispondente R. NASINI ⁽¹⁾.

« L'azione degli alogeni sopra l'acido tioacetico non è così semplice come a prima vista potrebbe sembrare, poichè invece della formazione dell'acido tioacetico alogenato si ottengono vari prodotti di condensazione causati da reazioni secondarie più o meno complesse.

« È notevole la diversità di comportamento dell'acido acetico e dell'acido tioacetico con il bromo. Mentre l'acido acetico all'ordinaria temperatura non reagisce affatto anche per azione della diretta luce solare, l'acido tioacetico reagisce energicamente svolgendo acido bromidrico e lasciando un residuo pecioso dal quale, per compressione tra carta e cristallizzazione dall'alcool, potei isolare una piccola quantità di una sostanza cristallizzata in laminette bianche che fondeva a 224°-225° e che poi, come vedremo, riconobbi per trisolfuro di etenile.

« Il trisolfuro di etenile venne isolato da I. Bongartz ⁽²⁾ trattando l'acido tioacetico con cloruro di zinco; egli fu messo sull'avviso della presenza di questo prodotto di condensazione dal fatto che, facendo passare una corrente di HCl secco attraverso una miscela di benzaldeide e acido acetico, non si otteneva che una piccolissima quantità di ditiobenzaldeide, mentre per il mercaptano e l'acido tioglicolico la reazione con le aldeidi dava risultati quasi teorici. Il Bongartz spiegava la formazione del trisolfuro di etenile con le seguenti equazioni, colle quali ammetteva la formazione intermedia dell'acido ditioacetico



« Io ho preparato notevoli quantità di trisolfuro di etenile con risultati assai buoni, operando nel seguente modo: metteva in un tubo da chiudere un peso molecolare di bromo e in un altro tubo più piccolo un peso molecolare di acido tioacetico, indi faceva scendere il tubo più piccolo nel più grande in modo che i liquidi non si mescolassero e che solo i vapori di bromo venissero in contatto con l'acido tioacetico, quindi chiudevo alla lampada e lasciavo all'ordinaria temperatura. Dopo 7 ore ordinariamente l'acido tioacetico, che aveva assunto da prima un colore rossiccio, si solidificava in una massa cristallina; lasciandolo più tempo in contatto coi vapori di bromo, quando la massa era solidificata, incominciava ad imbrunire e si aveva note-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

⁽²⁾ Berichte IX, p. 2182.

vole perdita per la formazione di quei prodotti resinosi. Aprendo il tubo si svolgeva HBr e solo un leggerissimo odore di H_2S veniva avvertito.

« La sostanza così avuta, compressa tra carta sotto il torchio e cristallizzata due o tre volte dall'alcool bollente, è del trisolfuro di etenile purissimo. Col metodo che io ho usato da gr. 5. 47 di acido puro si ottengono gr. 2.56 di trisolfuro grezzo: secondo la formola del Bongartz si dovrebbero ottenere gr. 2.70; come si vede dunque il reddito è quasi teorico.

« L'azione del bromo però qui non è che un'azione indiretta, perchè il bromo non agisce che per l'acido bromidrico che forma. Mi sono assicurato di ciò sostituendo al bromo il bromuro di fosforo e chiudendo nel tubo, oltre che il tubetto con l'acido tioacetico un altro tubicino più piccolo con acqua la quale, a chiusura finita, si poteva mandare in contatto con il tribromuro di fosforo e svolgere così HBr, senza versare l'acido tioacetico. Si aveva in tal modo l'acido tioacetico in presenza di HBr gasoso sotto pressione. Il risultato fu identico, cioè la solidificazione della massa con formazione del trisolfuro di etenile.

« Questo fondeva a 224° e all'analisi diede:

- I. da gr. 0,3016 di sostanza gr. 0,1112 di acqua e gr. 0,3524 di acido carbonico.
 II. da gr. 0,1778 di sostanza gr. 0,8292 di solfato baritico.
 III. da gr. 0,1789 di sostanza gr. 0,8337 di solfato baritico.
 per 100 si ha:

	trovato			calcolato per $C_4H_4S_3$
	I.	II.	III.	
C	31,87	—	—	32,0
H	4,09	—	—	4,0
S	—	64,05	64,0	64,0

« Il peso molecolare determinato col metodo crioscopico, adoperando il benzolo come solvente, diede risultati tali che condurrebbero ad ammettere una formola doppia di quella posta dal Bongartz.

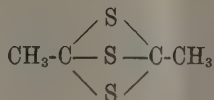
« Ecco i risultati delle mie esperienze:

concentraz.	abbass. term.	coeff. d'abbass.	abbass. molec. per la formola $C_8H_{12}S_6$
2,2440	0,39	0,1737	52,11
4,0322	0,70	0,1736	52,08
0,9474	0,17	0,1794	53,82
2,1864	0,39	0,1783	53,52
4,1595	0,74	0,1779	53,37

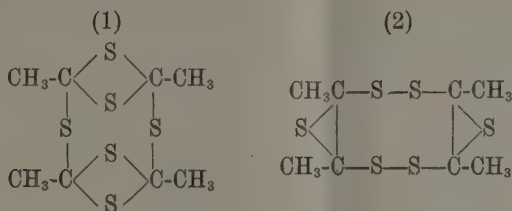
« Oltre che con il benzolo ho fatto una determinazione anche con l'acido acetico come solvente con risultati concordanti coi precedenti.

concentraz.	abbass. term.	coeff. d'abbass.	abbass. molec. per la formola $C_8H_{12}S_6$
1,0057	0,14	0,1392	41,76

« Dunque il trisolfuro di etenile descritto dal Bongartz non è il vero trisolfuro di etenile ma un polimero di questo corpo, la cui formula di costituzione invece che



sarà probabilmente una delle seguenti:



« Onde avere qualche criterio sulla funzione di questi atomi di zolfo nella molecola, e per conseguenza sulla struttura di essa, ne ho determinato il potere rifrangente in soluzione benzolica.

« Le esperienze vennero fatte con un eccellente spettrometro di Hildebrand di proprietà del prof. Nasini, permettente l'approssimazione di 5'': il peso specifico si riferisce all'acqua a 4° e le pesate furono ridotte al vuoto:

« I. soluzione

trisolfuro di etenile gr.	11,469
benzolo " "	88,531
soluzione gr.	100,000

$$d_4^{15,9} = 0,92477$$

per la soluzione trovai:

$$\mu_{H\alpha} = 1,51149; \frac{\mu_{H\alpha} - 1}{d} = 0,55309; \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H\alpha}^2 + 2)d} = 0,32420$$

il benzolo impiegato aveva la seguente costante:

$$\mu_{H\alpha} = 1,49971; \frac{\mu_{H\alpha} - 1}{d} = 0,56566; \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H\alpha}^2 + 2)d} = 0,33277$$

per cui si calcola per il trisolfuro di etenile:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{H\alpha} - 1}{d} &= 0,45610; \text{P} \frac{\mu_{H\alpha} - 1}{d} = 136,83 \\ \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H\alpha}^2 + 2)d} &= 0,25809; \text{P} \frac{\mu_{H\alpha}^2 - 1}{(\mu_{H\alpha}^2 + 2)d} = 77,437. \end{aligned}$$

« II soluzione

trisolfuro di etenile gr.	9,908
benzolo »	90,092
soluzione gr.	100,000

per la soluzione trovai:

$$\mu_{n\alpha} = 1,51002; \frac{\mu_{n\alpha} - 1}{d} = 0,55497; \frac{\mu_{n\alpha}^2 - 1}{(\mu_{n\alpha}^2 + 2)d} = 0,32545$$

il benzolo impiegato era lo stesso della precedente soluzione, per cui si calcola per il trisolfuro di etenile:

$$\frac{\mu_{n\alpha} - 1}{d} = 0,45781; P \frac{\mu_{n\alpha} - 1}{d} = 137,34$$

$$\frac{\mu_{n\alpha}^2 - 1}{(\mu_{n\alpha}^2 + 2)d} = 0,25888; P \frac{\mu_{n\alpha}^2 - 1}{(\mu_{n\alpha}^2 + 2)d} = 77,66.$$

« La rifrazione atomica dello solfo che risulta dalla media delle due esperienze, prendendo per il carbonio la rifrazione atomica: per la $n = 5$ e per la $n^2 = 2,48$; per l'idrogeno: per la $n = 1,3$ per la $n^2 = 1,04$, sarebbe per

$$n = 13,58; n^2 = 7,53$$

« Da questo si vede che il comportamento ottico dello solfo di questo composto è analogo a quello dello solfo di alcuni solfuri e solfidrati organici, quantunque ad essi un po' inferiore, senza però raggiungere il limite inferiore del tiofene, infatti:

	n	n^2
solfidrato di etile	13,80	7,80
solfuro di etile	14,28	8,10
solfidrato d'isobutile	13,93	7,82
solfidrato d'isoamile	14,0	7,84
Tiofene	11,40	6,54 ⁽¹⁾

« Oltre a questo fatto è importante il rilevare che anche qui, come nel tiofosgene polimero studiato da G. Carrara, dove c'è un accumularsi di solfo nella molecola, si riscontra un potere rifrangente atomico abbastanza basso, mentre, come aveva fatto notare R. Nasini, si dovrebbe avere un esaltamento del potere rifrangente. Questo fatto verrebbe secondo me in appoggio alla formula ciclica del trisolfuro di etenile polimero, perchè come si è visto lo solfo del tiofene ha un potere rifrangente assai basso,

(¹) R. Nasini e T. Costa.

« La reazione fra il bromo e l'acido tioacetico prende un altro indirizzo quando si opera in soluzione nell'etere assoluto e raffreddando il recipiente. L'operazione si fece in un apparecchio a ricadere munito d'imbuto a robinetto. Nel pallone stava la soluzione eterea di acido tioacetico e dall'imbuto si faceva gocciolare lentissimamente e agitando di continuo, il bromo nella proporzione di una molecola dell'uno per una dell'altro: l'etere solvente rappresentava circa il decuplo dell'acido tioacetico impiegato.

« La reazione è assai blanda, il bromo in gran parte si scolora, e poscia l'etere comincia a colorarsi in giallo, mentre si separa una sostanza oleosa che poi si scioglie per forte agitazione. Non si svolge che piccola quantità di HBr. Scacciai l'etere con una rapida distillazione e le ultime porzioni vennero evaporate nel vuoto sulla calce, perchè si svolgevano abbondantissimi fumi di HBr. Se si lascia parecchie ore nel vuoto si trova una certa quantità di zolfo cristallizzato nel liquido. Dopo scacciato tutto l'etere, la sostanza oleosa rimasta venne distillata a pressione ridotta e divisa così in tre porzioni bollenti

- 1.^a 75°- 80° a 6^{mm} di pressione
- 2.^a 80°-120° " "
- 3.^a 128°-135° " "

« La 2.^a frazione, che era la più abbondante, venne di nuovo frazionata e si raccolsero due porzioni

- 1.^a 103° a 10^{mm} di pressione
- 2.^a 104°-106° " "

« Di queste frazioni vennero esaminate le seguenti:

- 1.^a bollente a 75°- 80° a 6^{mm}
- 2.^a " " 103° a 10^{mm}
- 3.^a " " 104°-106° a 10^{mm}

« Queste frazioni erano liquide, dense, incolore la I^a fumava leggermente svolgendo acido bromidrico, le altre no.

« Ecco ora i risultati dell'analisi:

« Dalla I^a porzione bollente a 75°-80° ebbi:

da gr. 0,4754 di sostanza, gr. 0,4034 di acido carbonico e gr. 0,1519 di acqua
da gr. 0,3655 di sostanza gr. 0,4345 di bromuro d'argento e gr. 0,2790 di solfato di bario

da gr. 0,4689 di sostanza gr. 0,3520 di solfato di bario.

« Dalla II^a porzione bollente a 103° ebbi:

da gr. 0,3693 di sostanza gr. 0,3375 di bromuro d'argento e gr. 0,4655 di solfato di bario.

« Dalla III^a porzione bollente a 104°-106° ebbi:

da gr. 0,2855 di sostanza gr. 0,3028 di acido carbonico e gr. 0,0985 di acqua
da gr. 0,3870 di sostanza gr. 0,1584 di bromuro d'argento e gr. 0,9378 di solfato di bario.

« Per 100 si ha:

	I	II	III
C	23,42	—	28,92
H	3,55	—	3,83
Br	50,58	38,88	17,39
S	10,48 10,31	17,31	33,27

« È evidente la formazione di prodotti bromurati molto instabili, i quali vanno man mano perdendo bromo sotto forma di acido bromidrico durante la distillazione.

« Dai risultati dell'analisi della I^a porzione si calcola la seguente formula p. %

	trovato			calcolato per $C_8H_{10}Br_2SO_2$
	I	II	III	
C	23,42	—	—	23,53
H	3,55	—	—	3,27
Br	—	50,58	—	52,28
S	—	10,48	10,31	10,46
O	—	—	—	10,46
				<hr/> 100,00

« La sensibile differenza che si riscontra per il bromo è da attribuirsi alla facilità di scomposizione con eliminazione di acido bromidrico.

« È probabile che la reazione in questo caso sia da rappresentarsi con una equazione diversa da quella esposta dal Bongartz; ma la grandissima facilità con la quale queste sostanze si scompongono, dando prodotti sempre meno bromurati, non mi hanno permesso di completare lo studio di questa reazione ».

Chimica. — *Nuova sintesi di Cumarine* ⁽¹⁾. Nota di P. BIGNELLI, presentata dal Corrispondente L. BALBIANO.

« In una prima Nota pubblicata a quest'Accademia sulle cumarine carbossilate ⁽²⁾, feci cenno della reazione atta a produrre tali composti. Non nascosi fin d'allora lo scopo de' miei tentativi, che era quello di arrivare alle cumarine vere per una via relativamente facile, per applicarla a certi fenoli pei quali la reazione di Pechmann diventa difficile o di scarso rendimento.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica-farmaceutica della Regia Università di Roma.

⁽²⁾ Acc. dei Lincei, vol. III, 1° semestre, fasc. IX.

« Come applicazione ho scelto subito, tra i fenoli, l'idrochinone perchè, secondo Pechmann e Welsh, è tra quelli che reagiscono più difficilmente (1).

« In questa seconda Nota, partendo dalle cumarine carbossilate, dimostrerò come si possa arrivare alle vere cumarine, e, nel caso mio speciale, alla metaossimetilcumarina di F. Tiemann e M. Müller (2) e quindi alla metaossicumarina di H. Von Pechman e W. Welsch (l. c.).

Metaossicumarine- β carbossilate.

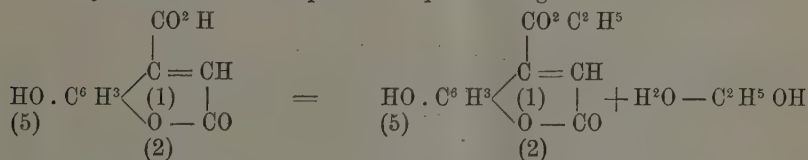
« Se la soluzione potassica o sodica di una delle metaossicumarine- β carbossietilate descritte nella Nota precedente, si acidifica con un acido, lascia depositare una sostanza gialla formata da piccoli aghi solubili nell'alcool, nell'etere e nell'acqua specialmente a caldo. Da quest'ultima si depone in aghi più o meno lunghi e più o meno appiattiti, i quali fondono gli uni verso 279°-280°, e gli altri verso 283-284°.

« Questi aghi diedero all'analisi i seguenti risultati :

gr. 0,2296 di sostanza diedero CO^2 gr. 0,4882 e H^2O gr. 0,0672 da cui si ricava per 100 parte:

	trovato	calcolato per $\text{C}^{10}\text{H}^6\text{O}^5$
C	58,03	58,25
H	3,25	2,91

« Questa formola corrisponde all'equazione seguente :



Metaossicumarina- β carbossilata

Metaossicumarina- β carbossietilata

« Questo nuovo composto è un acido, poichè è solubile nei carbonati con effervescenza e riprecipita inalterato da queste soluzioni per aggiunta di un acido qualunque. Anche di questi acidi se ne ottengono due poco diversi nella forma cristallina, tantochè l'uno è in aghi sottili terminanti in punta e l'altro in laminette aghiformi, corrispondenti alle due cumarine- β carbossietilate descritte nella Nota precedente. L'uno di questi acidi fonde a 279°-280° e l'altro a 283°-284°. La soluzione acquosa di questi acidi trattata con percloruro di ferro si colora in verdastro. Tutti e due riscaldati fra 280°-290° prima fondono poi distillano e in parte si depongono sulle pareti del vaso in lamine

(1) D. chem. G. 17. 1646. Bull. Soc. chim. (2), 44, 628.

(2) D. chem. G. 14. 1985. Bull. Soc. chim. (2), 37, 417.

gialle aghiformi che fondono poi a 289°. Verso questa temperatura però oltre a distillare in parte si scompongono e sviluppano anidride carbonica. La soluzione potassica o sodica di questi acidi precipita colle soluzioni dei principali sali metallici; non precipita nelle stesse condizioni, nè coi sali di calcio, nè coi sali di bario. Il sale di piombo ottenuto precipitando con acetato di piombo, si depone subito in aghi gialli disposti a raggi; coi sali di rame precipita in verde, e in prismi giallo-scuro coi sali di platino. Col nitrato d'argento precipita in color caffè, ma dopo poco il sale si riduce e forma uno specchio d'argento metallico.

« Il sale sodico che si ottiene trattando questi acidi con soluzione di carbonato sodico, è solubilissimo in acqua, molto più dell'acido libero, cristallizza da essa in lunghi aghi setacei disposti a sfera che contengono una molecola d'acqua di cristallizzazione. Quest'acqua la mantengono alla temperatura ordinaria, e la perdono sia mantenuti nel vuoto e sopra acido solforico, sia se scaldati in istufa per 3-4 ore verso 100°. In questo caso gli aghi si disfanno e tutto si riduce in una polvere di color giallo più pallido.

« Gli aghi diedero all'analisi i seguenti risultati:

gr. 0,4420 di sale sodico fornirono gr. 0,1273 di Na_2SO^4

» 0,4366 di sale sodico scaldato in istufa ad acqua per 4-5 ore a 96° perdettero del suo peso gr. 0,0341.

« Da cui si ricava:

	trovato	calcolato per $\text{C}^{10}\text{H}^5\text{O}^6\text{Na} + \text{H}^2\text{O}$
$\text{Na}^\circ/\%$	9,33	9,34
$\text{H}^2\text{O}^\circ/\%$	7,81	7,31

« Il sale sodico anidro è quasi insolubile in alcool e, lasciato all'aria tende a ripigliare la molecola d'acqua colla quale cristallizza.

« Il sale sodico cristallizzato, bollito con alcool concentrato, in parte si disidrata e si fa polverulento, altra parte invece si scioglie e per raffreddamento si deposita come prismi laminari diversi dagli aghi precedenti. Se l'alcool che si adopera è alquanto diluito, allora tutto il sale sodico monoidrato si scioglie per poi deporsi sotto la nuova forma di prismi laminari. Questa nuova forma contiene alcool ed acqua riconoscibili facilmente e che non perde se non nelle stesse condizioni in cui il sale monoidrato perde l'acqua. I dati analitici portano ad un composto salino formato da due molecole di sale sodico, di cui una con una molecola d'acqua e l'altra con una molecola di alcool.

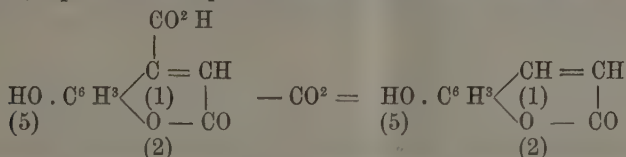
« Infatti gr. 0,4634 di sostanza tenuti per 36 ore sopra acido solforico e nel vuoto perdettero gr. 0,0561 di peso corrispondente a:

	trovato	calcolato per
		$\left\{ \begin{array}{l} \text{C}^{10}\text{H}^5\text{O}^6\text{Na} + \text{H}^2\text{O} \\ \text{C}^{10}\text{H}^5\text{O}^6\text{Na} + \text{C}^2\text{H}^5\text{OH} \end{array} \right.$
$\left. \begin{array}{l} \text{H}^2\text{O} \\ \text{C}^2\text{H}^5\text{OH} \end{array} \right\} \%$	12,10	12,05

Anche questo sale è solubilissimo in acqua, e, come pel composto monoidrato, la sua soluzione acidificata con un acido minerale lascia deporre la metaossicumarina- β carbossilata fusibile a 280° avanti descritta.

**Metaossimetilcumarina- β carbossimetilata e
Metaossimetilcumarina- β carbossilata.**

« Descrivendo la metaossicumarina- β carbossilata dissi che questa, riscaldata al disopra del suo punto di fusione, in parte si scompone e dà sviluppo di anidride carbonica. Probabilmente questa anidride carbonica proviene dal carbossile laterale della cumarina, il quale si elimina per sovrariscaldamento del composto. In questo caso doveva lasciare come residuo una vera metaossicumarina, e precisamente quella ottenuta da H. von Pechmann e W. Welsh.



« Ottenni bensì un residuo di color caffè-scuro, solubile in una soluzione di potassa o soda caustica e riprecipitabile per mezzo di una corrente di anidride carbonica, ma il precipitato rimaneva nero e di difficile purificazione. Supponendo che questo fatto potesse provenire da polimerizzazione del composto, prodotta specialmente dall'ossidril fenico libero a quella alta temperatura, pensai di eterificare l'ossidril. Per questo operai nel modo seguente:

« Gr. 6,5 di metaossicumarina- β carbossilata (1 mol.) lo trattai prima con gr. 3,53 di KOH (2 mol.) sciolta in alcool metilico (soluz. 21 %) e dopo avere fatta poltiglia omogenea in un mortaio, versai il tutto in un palloncino a cui aggiunsi gr. 9 di joduro di metile (2 mol.) in leggiero eccesso. Il tutto poi feci bollire a ricadere per 5-6 ore e in principio, sotto pressione di 10°-15° di mercurio. In fine distillai l'alcool metilico e l'eccesso del joduro di metile e, dopo raffreddamento, ripigliai il residuo con acqua per esportare il joduro di potassio dall'etere che doveva essersi formato. M'accorsi che parte del residuo organico si scioglieva in acqua insieme al joduro.

« Il residuo raccolto e lavato lo feci cristallizzare dall'alcool caldo, dal quale ottenni dopo raffreddamento degli aghi riuniti a mamellone che fondono a 131°-132° senza scomporsi.

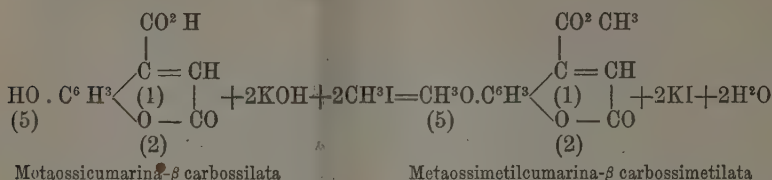
« Questi cristalli fornirono i seguenti dati analitici:

gr. 0,2167 di sostanza diedero CO² gr. 0,4870 H²O gr. 0,0867.

« Da cui si ricava per 100 parti:

	trovato	calcolato per C ¹² H ¹⁰ O ²
C	61,29	61,54
H	4,44	4,27

« Questi risultati portano alla formola della Metaossimetilcumarina- β -carbossimetilata corrispondente alla equazione seguente:



« Questo composto è insolubile negli acidi, nelle soluzioni dei carbonati alcalini e negli alcali caustici a freddo. A caldo in questi ultimi si scioglie dopo breve ebollizione, e la soluzione alcalina acidificata con acido cloridrico lascia deporre degli aghi giallo-verdi fusibili a 246°-247°. Questo composto distilla inalterato verso 290°.

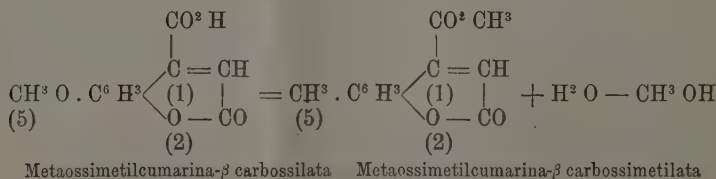
« La soluzione acquosa contenente il joduro di potassio, da cui si separò il composto precedente fusibile a 131°-132°, acidificata con acido solforoso, lascia deporre una polvere cristallina giallo-verde, la quale fatta cristallizzare dall'alcool si depone in laminette gialle lucenti come oro fusibili a 246°-247°. Dunque si ottenne in questo caso lo stesso composto che si ottiene saponificando cogli alcali caustici il composto precedentemente descritto. I dati analitici di questo nuovo composto corrispondono difatti all'acido derivante dalla Metaossimetilcumarina- β -carbossimetilata.

« Eccone i risultati:

gr. 0,2314 di sostanza fornirono CO^2 gr. 0,5058 $\text{H}^2 \text{O}$ gr. 0,0775 da cui si ricava per per 100 parti:

	trovato	calcolato per $\text{C}^{11} \text{H}^6 \text{O}^4$
C	59,60	60,00
H	3,72	3,63

Questa formola porta all'equazione seguente:



Questo composto è solubile nei carbonati alcalini e negli alcali caustici, ma non riprecipita più inalterato per azione di una corrente di anidride carbonica; riprecipita soltanto inalterato dopo aggiunta di un acido.

« Dunque nelle condizioni dell'operazione l'eterificazione della metaossimarina- β carbossilata fu anche parziale e si è limitata al semplice ossidrile fenico. Lo stesso fatto avviene anche partendo dal composto primitivo cioè dalla Metaossimarina- β carbossietilata.

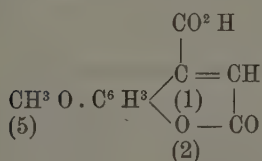
Metaossimetilcumarina.

« La metaossimetilcumarina- β carbossilata avanti descritta, scaldata da sola in istrato sottile, a bagno di lega, anche fino a 300° non sviluppa più anidride carbonica, come soleva avvenire nelle stesse condizioni coll'ossidervato, ma arrivata appena alla temperatura di fusione, sublima in parte inalterata in lamine aciculari gialle. A temperatura superiore a poco a poco annerisce e si decompone.

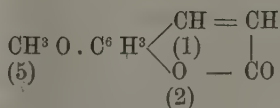
« Se si scalda una miscela ben polverizzata di soda caustica e di sale sodico della metaossimetilcumarina- β carbossilata, disposta in istrato sottile in una bevuta, per due o tre ore, a bagno di lega, fino ad arrivare verso 300° , una parte del composto si scompone e distilla un liquido oleoso aromatico. Per la maggior parte invece il sale rimane inalterato, dal quale si può ancora riottenere la metaossimetilcumarina- β carbossilata precipitando la sua soluzione acquosa con un acido.

« Riscaldando nello stesso modo una miscela di sale calcico e di calce, si ottengono quasi gli stessi risultati, solo che la decomposizione va un po' più lentamente.

« Sempre allo scopo di arrivare alla metaossimetilcumarina, tentai in parecchi altri modi di sostituire un atomo di idrogeno al carbossile della metaossimetilcumarina- β carbossilata, che questa differisce da quella soltanto per un carbossile nella catena laterale:



Metaossimetilcumarina- β carbossilata



Metaossimetilcumarina

« Il migliore metodo fra quelli provati e ancora quello di scaldare per due a tre ore, a bagno di lega fra 265° - 270° , una mescolanza ben intima formata da volumi eguali di metaossimetilcumarina- β carbossilata e di polvere di ferro previamente arroventata. Le migliori condizioni poi sono quelle di disporre la miscela in istrati sottili entro bevute, e di operare con piccole proporzioni di due grammi circa di metaossimetilcumarina- β carbossilata.

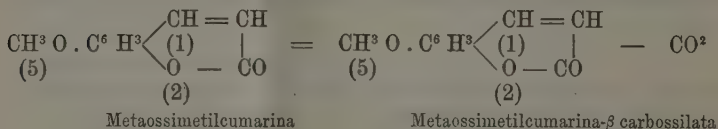
« Appena che col riscaldamento si arriva di pochi gradi al disopra di 246° (punto di fusione del composto) esso si fonde e bagna tutta la massa. In

seguito una parte distilla inalterato e si depone sulle pareti del vaso in aghi gialli. Continuando il riscaldamento e portandolo fra 265-270°, alla massa cristallina aghiforme va soprapponendosi una specie di olio gialliccio, che si mantiene tale per tutto il tempo che dura il riscaldamento. Si sviluppa contemporaneamente dalla bevuta un forte odore di cumarina. Si raccoglie quest'olio di mano in mano che si forma; per raffreddamento esso si rapprende in massa cristallina. Si fa allora sciogliere in etere e la soluzione si sbatte con soluzione di carbonato sodico per esportare tutto l'acido distillato indecomposto. L'etere separato lascia come residuo della distillazione un olio paglierino di odore di cumarina, che per raffreddamento cristallizza e dà delle lamine prismatiche, le quali dopo lavate con etere diventano perfettamente bianche e fondono a 102°-103°. Se la stessa si fa cristallizzare lentamente per evaporazione del solvente, si può pure ottenere in grossi prismi.

« Questi cristalli diedero i seguenti risultati analitici:
gr. 0,2363 di sostanza fornirono CO² gr. 0,5896 H²O gr. 0,0989
da cui si ricava per 100 parti:

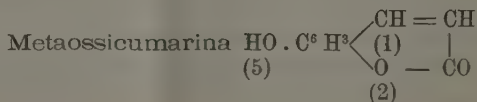
	trovato	calcolato per C ¹⁰ H ⁸ O ³
C	68,04	68,18
H	4,64	4,54

« La formola a cui portano questi dati, corrisponde all'equazione seguente:



« Queste lamine sono solubili nelle soluzioni di potassa e soda caustica e da queste soluzioni riprecipitano come sostanza inalterata per azione di una corrente di anidride carbonica, e se da soluzioni sufficientemente diluite, si depone in lunghe laminette bianche come la cumarina ordinaria. Sopra questa proprietà, comune del resto a tutte le cumarine, si fonda il metodo più rapido e più sicuro di purificazione del composto.

« Dunque le proprietà fisiche e chimiche di questa cumarina corrispondono in tutto e per tutto con quelle descritte per la metaossimetilcumarina di F. Tiemann e M. Müller, che l'hanno ottenuta scaldando all'ebollizione un miscuglio di aldeide metaossisalicilica con anidride acetica in presenza di acetato sodico (l. c.).



« Trattando a caldo la metaossimetilcumarina, avanti descritta, ben polverizzata con acido iodidrico d. 1,27, a tutta prima si scioglie, si sviluppa ioduro di metile, e dopo breve ebollizione si deposita una polvere cristallina gialliccia. Si getta allora tutto in acqua fredda, e si lascia a sè per ventiquattro ore affinchè tutto il composto abbia tempo di deporsi.

« Si filtra in seguito e si purifica il prodotto per cristallizzazione dall'alcool. Si ottengono in questo modo dei cristallini prismatici di color paglierino fusibile a 249°.

« All'analisi questo composto fornì i seguenti risultati:
gr. 0,2306 di sostanza diedero CO^2 gr. 0,5604 H^2O gr. 0,0807
da cui si ricava per 100 parti:

	trovato	calcolato per $\text{C}^9\text{H}^6\text{O}^3$
C	66,27	66,66
H	3,88	3,70

« La formola $\text{C}^9\text{H}^6\text{O}^3$ a cui portano questi dati corrisponde precisamente a quella della Metaossicumarina di H. von Pechmann e W. Welsh (l. c.), ottenuta per fusione di acido malico e idrochinone e successivo riscaldamento con acido solforico concentrato.

« Il punto di fusione di questa, e tutte le altre proprietà fisiche e chimiche, corrispondono ancora perfettamente con quelle della metaossicumarina da me ottenuta.

CONCLUSIONE.

« Coll'avere ottenuta la metaossimetilcumarina di Tiemann e Müller, e la metaossicumarina di Pechmann e Welsh, resta dimostrato che anche colle cumarine carbossilate nella catena laterale, si può arrivare alle cumarine vere.

« Di questo nuovo metodo di sintesi spero di poter dare esempî migliori in seguito, applicando la reazione ad altri fenoli, ma specialmente al Diossimetilidrochinone di Will ⁽¹⁾ pel quale, come già annunciai nella mia prima Nota, la reazione di Pechmann non mi dette risultati soddisfacenti.

« Il meccanismo della reazione generale, che avviene in tutti questi casi, è abbastanza semplice e si può dividere in due fasi nettamente distinte.

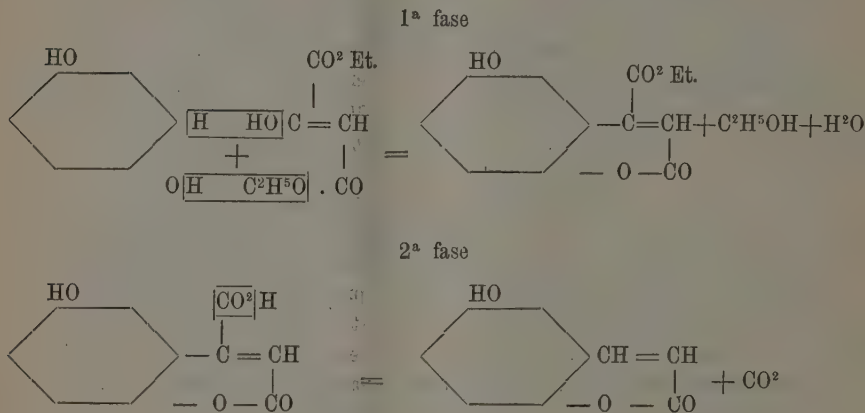
« Perciò che concerne la prima fase di tale reazione a me pare si possa ritenere come analoga a quella che avviene tra i fenoli e l'etere acetilacetico nella reazione di Pechmann e Duisberg ⁽²⁾, e se qualche differenza non sostanziale potrà esistere sia solo in dipendenza della più facile reazionabilità del-

⁽¹⁾ Berichte der chem. G. Berlin, XXI, p. 608.

⁽²⁾ Berichte der chem. G. Berlin, XXVI, 2122.

l'etere ossalacetico in confronto dell'etere acetilacetico, reazionabilità prodotta molto probabilmente dal gruppo acido che quello contiene al posto del metile di questo. Come seconda fase si ha il fatto, abbastanza comune in composti a catena chiusa, dell'eliminazione di anidride carbonica per distruzione dei carbossili laterali, prodotto per sovrariscaldamento del composto acido.

« Tale meccanismo si potrà perciò rappresentare colle due equazioni seguenti che stanno ad indicare le due fasi distinte dalla reazione:



Chimica. — *Sopra un nuovo alcool della lanolina* ⁽¹⁾. Nota di G. MARCHETTI, presentata dal Corrispondente L. BALBIANO.

« H. Buisine ⁽²⁾ nel 1886 separò e descrisse gli acidi contenuti nelle acque di lavaggio della lana delle pecore e il dott. Desanctis ⁽³⁾ l'anno scorso quelli contenuti nell'untume della lana stessa depurato, che si adopera in terapia sotto il nome di lanolina.

« La parte basica di questo composto farmaceutico, ossia quelle sostanze che si comportano come basi rispetto agli acidi in esso rinvenuti, non fu completamente studiata finora. Hartmann ⁽⁴⁾ per il primo ottenne, trattando con potassa l'untume della lana, una sostanza basica che dava le reazioni della colesterina; mentre non riuscì a constatare tracce di glicerina. Schultz ⁽⁵⁾

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Compt. Rend., t. 103, p. 66.

⁽³⁾ Rend. Acc. Lincei, vol. II, p. 310.

⁽⁴⁾ F. Hartmann, *Ueber den Fettschweiss der Schafwolle*. Inaug-Diss. Göttingen 1864.

⁽⁵⁾ Zeitsch. f. Chem., 1870, p. 453. Berichte 1872 p. 1075; id. 1873, p. 251; id. 1874, p. 570.

nel 1870 dimostrò che la sostanza ottenuta da Hartmann era propriamente colesterina e di più riuscì ad isolare un isomero di questa, la isocolesterina. A ciò egli fondeva con anidride benzoica tutti gli alcoli contenuti nell'untume, e trattando poscia con alcool caldo estraeva i composti benzoilici della colesterina ed isocolesterina, mentre gli rimaneva indietro un residuo oleoso, da cui per mezzo della potassa otteneva un corpo che differiva dai due suddetti per fondere molto più basso e per contenere rispetto all'ossigeno una quantità di carbonio inferiore. Schultz non vi potè separare nessun composto definito, e per ciò ritenne che questo residuo fosse costituito da un miscuglio di alcoli. Più tardi Buisine ⁽¹⁾ riscontrò nell'untume greggio l'alcool cerilico, che egli crede vi si trovi sotto forma di cerotato di cerile, mentre che il Lewcowitz ⁽²⁾ ritiene che vi si trovi allo stato libero, poichè trova un alcool di basso punto di fusione nel grasso, greggio, appunto libero e crede che si tratti di alcool cerilico. Anche questi ultimi ammettono che nell'untume si debbano trovare altri alcoli, la cui separazione presenta molte difficoltà.

* Come si vede, tutti quanti sono partiti per tali ricerche dall'untume della lana greggio. Ho creduto che si potesse riuscire a migliori risultati, partendo dalla lanolina già depurata, tal quale si adopera in farmacia; e quindi, mentre il dott. Desanctis in questo stesso Laboratorio imprendeva a fare la separazione degli acidi in essa contenuti, io ne studiava la parte basica. Ho potuto così separare dalla lanolina l'alcool cerilico allo stato di chimica purezza; e nello stesso tempo un nuovo alcool di cui la formola bruta è $C^{12}H^{24}O$ e che per la sua provenienza chiamerò *lanolinico*. Quest'alcool, di cui ho potuto caratterizzare la funzione per mezzo del derivato benzoilico, non ha numero di iodio, benchè dovesse sembrare il contrario, avuto riguardo alla quantità di idrogeno rispetto al carbonio. Ciò farebbe supporre che piuttosto che avere un doppio legame, esso sia, come si ritiene per la colesterina, un composto a catena chiusa. E invero per altre ragioni che vedremo in seguito, egli è un corpo, che pel suo comportamento chimico, credo si possa riavvicinare appunto alla colesterina.

La lanolina Liebreich, che vien messa in commercio preparata dai dottori Jaffe e Damstädter e che ho adoperata per le mie ricerche, è leggerissimamente colorata in giallo nell'interno della massa, molto più intensamente alla superficie, ove ha subito il contatto dell'aria atmosferica: fonde verso i 40° e contiene, secondo le diverse preparazioni, dall'1 $\frac{1}{2}$ al 10 $\frac{0}{100}$ di acqua emulsionata. Per la saponificazione di essa ho usato il metodo di A. Kossel e H. Obermüller ⁽³⁾, che consiste nel trattare i grassi con etilato sodico. A tal fine si disciolgono 30 gr. di sodio metallico in un litro di alcool assoluto,

(1) Bull. Soc. chim., 84. 42, p. 201.

(2) Monit. Scien., 1893, p. 227.

(3) Zeitsch. f. phys. Chemie, 14, p. 599.

si riscalda a bagno maria e quindi vi si versano gr. 300 di lanolina già fusa. La lanolina si discioglie completamente, mentre che il liquido va assumendo una colorazione marrone scura. Seguitando a riscaldare a b. m. ed agitando, quasi subito incominciano a depositarsi i saponi sodici, che sono insolubili nell'alcool, finchè il tutto si rappiglia in una massa gelatinosa. Si lascia a ricadere ancora per 5 o 6 ore, quindi si distilla la maggior quantità di alcool possibile, si ripiglia con acqua e si agita con etere. In tal modo una buona quantità di saponi si disciogliono nell'acqua e la colesterina, l'isocolesterina ecc., vengono sciolti dall'etere. A tal punto l'operazione diventa lunga e difficile, perchè l'acqua e l'etere si emulsionano così intimamente, che la loro separazione avviene lentissima e non è mai completa, anche se si lascia a sè per lunghissimo tempo. Cosicchè bisogna limitarsi a togliere quel poco di acqua ed etere che si chiarificano, e aggiungere ogni volta nuova acqua e nuovo etere. A mano a mano che si procede, la separazione avviene sempre più facilmente, e allora la parte rimasta indisciolta si dispone a formare uno strato sospeso tra i due liquidi. In questo strato si distinguono nettamente due parti: una sottostante di colore oscuro costituita dai saponi poco solubili nell'acqua, la soprastante bianca costituita dall'alcool lanolinico. Per separare questo dal resto dei saponi, si decanta l'acqua e l'etere e si raccoglie il tutto sopra un filtro. Si torna a porre nell'estrattore la parte solida, si tratta con acido solforico diluito per scomporre i saponi e si agita di nuovo con etere. Gli acidi grassi liberi si disciogliono tutti nell'etere, e l'alcool lanolinico rimane sospeso tra i due liquidi. Si separa poi per filtrazione.

« L'alcool cerilico passa colla colesterina ed isocolesterina, quando si tratta la prima volta con etere. Si separa per mezzo di cristallizzazioni frazionate dall'alcool, raccogliendo la porzione più solubile e successivo trattamento con carbone animale, che trattiene quel poco di sostanza bruna, che si forma quando si tratta con etilato sodico. Si ottiene così un corpo che non dà più le reazioni della colesterina e dell'isocolesterina. Il punto di fusione di esso è assai basso, e ciò potrebbe essere dovuto a piccola quantità di alcoli inferiori contenutivi, ma esso è in massima parte costituito dall'alcool cerilico; e infatti basta cristallizzare due o tre volte dal cloroformio, per averlo allo stato di perfetta purezza. Allora si presenta perfettamente bianco e sotto forma di piccoli prismi riuniti. Seccato nel vuoto sull'acido solforico, si ebbe all'analisi il seguente risultato:

da gr. 0,2115 di sostanza si ebbero gr. 0,6352 di CO_2 e gr. 0,2713 di H_2O :
quindi in 100 parti:

	trovato	calcolato per $\text{C}^{27}\text{H}^{56}\text{O}$
C =	81,93	81,82
H =	14,27	14,14

« Il suo punto di fusione 78°-79° e così il suo comportamento riguardo ai solventi e le altre proprietà fisiche, concordano perfettamente con quello descritte per l'alcool cerilico.

« Dal cloroformio da cui era cristallizzato l'alcool cerilico, non ho potuto separare che poca quantità di una sostanza cerosa. Forse operando su maggior quantità di sostanze si potevano avere risultati migliori, ma ho creduto meglio tener dietro all'alcool lanolinico, e per averlo più spedatamente ho modificato il processo in modo da evitare il lungo lavoro dell'estrazione eterica dei saponi, trascurando di separare gli acidi della parte basica. Infatti se dopo la saponificazione, distillato l'alcool, si tratta addirittura con acido solforico diluito e si estrae con etere, questo porta in soluzione tutti gli acidi e gli alcoli insieme, mentre che l'alcool lanolinico resta indisciolto. In tal caso la estrazione eterica è resa molto più agevole, trattandosi di un liquido acido. Però una parte dell'alcool lanolinico passa in soluzione, essendo un poco solubile nella soluzione eterica dei corpi che l'accompagnano. Tuttavia è sempre in piccola quantità che si trova nella lanolina. Da 5 chilogrammi di questa, saponificata col metodo suddetto, si ottengono soltanto circa 50 gr. di alcool cristallizzato una sola volta dall'alcool etilico, in cui è pochissimo solubile a freddo. Per averlo poi perfettamente puro, bisogna ricristallizzarlo dall'alcool a 93° e quindi molte volte dal cloroformio, fino ad averlo completamente scolorato.

Alcool lanolinico.

« L'alcool lanolinico si presenta cristallizzato dal cloroformio sotto forma di polvere bianca, inodora. Lasciato per molto tempo in soluzione diluita nel cloroformio, si depona prendendo l'aspetto di concrezioni sferoidali. Osservato al microscopio non presenta struttura cristallina.

« Dissecato prima nel vuoto sull'acido solforico, poi riscaldato a 100° fino a peso costante, fu sottoposto all'analisi e si ebbero i seguenti risultati:

I	da gr. 0,2094 di sostanza si ebbero gr. 0,5991 di CO ² e gr. 0,2453 di H ² O
II	" " 0,1452 " " " 0,4160 " " 0,1718 " "
III	" " 0,1825 " " " 0,5228 " " 0,2173 " da cui
calcolando per 100 parti:	

	trovato	calcolato per C ¹² H ²⁴ O
	I II III	
C	= 78,02 — 78,13 — 78,13	78,26
H	= 13,01 — 13,14 — 13,24	13,06

« L'alcool lanolinico è solubile a caldo nell'alcool, nella benzina e nel cloroformio, poco solubile a freddo, è insolubile nell'etere. Fonde tra 102°-104°.

« Non dà alcuna delle reazioni della colesterina ed isocolesterina, e non

ha numero di iodio. È insolubile nella potassa. Trattata con etilato sodico a caldo in parte si combina col sodio e il composto che ne risulta è insolubile nell'acqua. Trattando con acidi si riottiene l'alcool inalterato. È solubile a caldo tanto nell'acido acetico come nell'anidride acetica e da questi si ridepone a freddo, senza contrarvi combinazione e quasi completamente.

« Ho tentato di determinarne la grandezza molecolare col metodo ebullimetrico di Beckmann, ma l'alcool lanolinico non innalza per nulla la temperatura del cloroformio in cui faceva l'esperienza. Non si può neppure adottare il metodo della determinazione del punto di congelamento delle soluzioni, appunto per la sua poca solubilità a freddo in tutti i solventi.

« Riscaldato con acido bromidrico e con pentacloruro di fosforo, non ha dati buoni risultati, perchè gli acidi alogenati lo resinificano in gran parte.

« Composto benzoilico. — Si riscalda l'alcool con un eccesso di anidride benzoica a 200° circa per 2 ore in tubo chiuso. Si ottiene così una massa uniforme, bruna, che si lava prima con acqua per asportare l'acido benzoico e l'anidride rimasta inalterata. Disciogliendo poi in alcool e precipitando con etere, si ottiene l'etere benzoilico sotto forma di fiocchi bianchi che si separano per filtrazione.

« Dissecato a 100° fu sottoposto all'analisi e si ebbero i seguenti risultati:

da gr. 0,1731 di composto si ebbero gr. 0,5064 di CO² e gr. 0,163 di H²O quindi in 100 parti:

	trovato	calcolato per C ¹² H ²² OC ⁶ H ⁵ CO
C =	79,77	79,16
H =	10,52	9,72

« Tal composto si presenta sotto forma di una massa bianca, cerosa, solubile in alcool, insolubile in etere. Fonde tra 65° e 66°.

« Lasciato a sè per qualche tempo, subisce per l'azione dell'aria una scomposizione, diventa più untuoso e imbrunisce.

« Trattato con etilato sodico a caldo si scompone, dando nuovamente acido benzoico e l'alcool primitivo.

« Questo derivato benzoilico si può ottenere naturalmente anche trattando l'alcool con cloruro di benzoile, ma in tal caso, come si accennava sopra, si ha una profonda resinificazione dovuta all'acido cloridrico che si svolge nella reazione, cosicchè il reddito è quasi nullo.

Acido lanolinico.

« L'alcool lanolinico non viene quasi per nulla attaccato dal permanganato di potassio in soluzione alcalina. Invece si ossida molto facilmente con acido cromico.

« Gr. 5 di alcool furono posti in apparecchio a ricadere con grammi 200

di acido acetico glaciale è quindi vi si aggiunsero gr. 10 di acido cromatico a piccole porzioni ed agitando continuamente. L'ossidazione incomincia di già a freddo e si completa facendo bollire per circa due ore. Distillato l'acido acetico a bagno maria nel vuoto, si ripiglia il tutto con acqua e si filtra. Sul filtro rimane la parte inalterata e il sale cromatico dell'acido lanolinico. Per scomparire il sale si fa bollire con carbonato sodico; in tal modo passa in soluzione il sale sodico dell'acido. Si filtra nuovamente e si acidifica con acido solforico diluito. Si ottiene un precipitato fioccoso, bianco, che raccolto su filtro, si purifica disciogliendolo di nuovo in soda e riprecipitandolo. Infine se ne fa una soluzione nel benzolo e si precipita con etere di petrolio.

« Dissecato il prodotto nel vuoto sull'acido solforico e quindi riscaldato a 100°, fu sottoposto all'analisi e si ebbero i seguenti risultati:

I da gr. 0,1291 di sostanza si ebbero gr. 0,3185 di CO² e gr. 0,1222 di H²O
 II " " 0,1296 " " " 0,3006 " " 0,1224 "

da cui si calcola in 100 parti:

trovato		calcolato per C ¹² H ²² O ³
I	II	
C = 67,29	— 67,47	67,29
H = 10,45	— 10,47	10,28

« L'acido lanolinico si presenta sotto forma di una polvere cristallina, bianca. È insolubile nell'acqua e negli eteri di petrolio, solubile in alcool, etere, cloroformio e benzina. Fonde tra 75° e 77°.

« È solubile nei carbonati alcalini. È anche disciolto dall'ammoniaca, ma basta scaldare leggermente o anche lasciare a se per qualche tempo, perchè man mano che l'ammoniaca si allontana, riprecipiti l'acido. Esso, come l'alcool lanolinico da cui deriva non ha numero di iodio.

« Sale di bario. — Si prende una quantità di acido pesata esattamente, vi si aggiunge un poco d'acqua e si tratta con una soluzione normale di soda; quando di questa si è aggiunta la quantità calcolata, l'acido è completamente disciolto. Trattando poi il liquido con leggero eccesso di cloruro di bario, si ottiene un precipitato bianco, che bisogna filtrare immediatamente alla pompa e lavare, perchè non si abbia assorbimento di anidride carbonica.

« Così preparato e dissecato nel vuoto, il sale di bario sembra che contenga una molecola d'acqua di cristallizzazione (1), che perde riscaldato a 150°. Infatti:

da gr. 0,1495 di sale si ebbe una perdita di gr. 0,0047 da cui:

trovato		calcolato per (C ¹² H ²¹ O ³) ² Ba.H ² O
H ² O =	3,15	3,09

(1) Avendo poca quantità di sostanza, non ho potuto controllare la determinazione.

« Il sale disseccato a 150° fino a peso costante fu sottoposto all'analisi e si ebbero i seguenti risultati:

da gr. 0,1606 di sale si ebbero gr. 0,2861 di CO_2 , gr. 0,1095 di H_2O e gr. 0,0575 di carbonato di bario; da cui si calcola in 100 parti:

trovato	calcolato per $(\text{C}^{18}\text{H}^{21}\text{O})_2\text{Ba}$
C = 50,78	51,15
H = 7,57	7,45
Ba = 24,82	24,38

Questo sale si presenta sotto forma di polvere bianca, pesante, insolubile completamente nell'acqua. Riscaldato non si fonde, ma si decompone.

« Mi sembra adunque che sia in tal modo ben caratterizzata la funzione alcoolica per mezzo del derivato benzoilico del nuovo corpo che si riscontra nella lanolina. Da parte sua il prodotto dell'ossidazione sta ad avvalorare quello che diceva in principio, che l'alcool lanolinico abbia un poco della natura della colesterina. Infatti esso con acido cromico fissa due atomi di ossigeno, appunto come fa la colesterina ossidata con permanganato di potassio, la quale si trasforma nella triossicolesterina. Questa è solubile nella potassa ed insolubile nell'ammoniaca. L'acido lanolinico oltre che nella potassa è solubile anche nell'ammoniaca; ma come abbiamo veduto il sale ammonico si decompone anche se si lasci a sè per qualche tempo ».

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BLASERNA presenta la pubblicazione del Corrispondente RIGHI intitolata: *Sulle oscillazioni elettriche a piccola lunghezza d'onda e sul loro impiego nella produzione di fenomeni analoghi ai principali fenomeni dell'ottica*; una Memoria del dott. V. REINA sull'*Azimut assoluto di Monte Cavo sull'orizzonte della specola geodetica di S. Pietro in Vincoli in Roma*; e, a nome del Socio CREMONA una *Introduzione alla teoria matematica della elasticità* del prof. E. CESÀRO.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 dicembre 1894.

F. BRIOSCHI Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Studio del dimetilnaftol* ⁽¹⁾. Nota preliminare del Socio S. CANNIZZARO e di A. ANDREOCCI.

« Affine di togliere qualsiasi dubbio sulla costituzione della santonina e dei suoi numerosi derivati, abbiamo intrapreso un accurato studio sul dimetilnaftol che proviene dalla decomposizione degli acidi: destro-santonoso, levio-santonoso, racemo-santonoso, e desmotropo-santonoso ⁽²⁾.

« Del prodotto di ossidazione ($C^{12}H^{12}O^2$) che fu descritto da Cannizzaro e Carnelutti ⁽³⁾ preparato per l'azione dell'acido cromatico sul dimetilnaftol, abbiamo ottenuto l'idrazone e l'ossima e due anidridi di quest'ultima, l'una verde e l'altra arancio, che ci riserviamo di descrivere.

« Abbiamo inoltre convertito il dimetilnaftol nella dimetilammina corrispondente, ottenendo prima il derivato acetilico di quest'ultima mediante l'azione dell'acetamide sul naftol e saponificando poi il derivato acetilico.

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Chimico dell'Università di Roma.

(2) Cannizzaro e Carnelutti, Gazz. Chim. ital. vol. XII, p. 406. — A. Andreocci, Gazz. Chim. ital. vol. XXIII, parte 2^a, pagine 481 e 492.

(3) Gazz. chim. ital. vol. XII, pag. 408.

« La dimetilnaftilammina così ottenuta è una sostanza bianca cristallizzata in lunghi prismi, fonde a 74°, è volatile col vapor d'acqua, solubile nell'alcool e nell'etere e pochissimo nell'acqua. Fa un cloridrato poco solubile a freddo nell'acqua e meno nell'alcool, ed un cloroplatinato di color arancio quasi insolubile nell'acqua ma abbastanza solubile nell'alcool ».

Cimica generale. — *Sui composti di platosomonodiammina.*
Nota preliminare del Socio prof. ALFONSO COSSA.

« Proseguendo nello studio dei derivati ammoniacali del platino, ho recentemente iniziato delle ricerche sulle combinazioni di platosomonodiammina; e con questa Nota mi propongo di farne conoscere i principali risultati finora ottenuti.

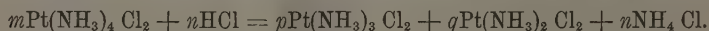
« 1.° Oltrechè per le reazioni indicate da Cleve nella sua classica Memoria sulle basi ammoniacali del platino ⁽¹⁾, si formano insieme ad altri prodotti combinazioni di platosomonodiammina nelle reazioni seguenti:

« a) Azione dell'acido cloridrico sul cloruro della prima base del Reiset.

« b) Azione limitata dell'ammoniaca sul sale verde del Magnus, sui cloruri di platosammina, di platososemidiammina e sul cloruro doppio di platososemiammina e di potassio.

« c) Azione del cloruro d'ammonio e del nitrato di ammonio in soluzione concentrate sul sale verde del Magnus e sul cloruro di platosammina.

« 2.° Il metodo più conveniente, sotto il punto di vista della quantità del prodotto, per ottenere il cloroplatinato di platosomonodiammina, che è la materia prima che serve a preparare le altre combinazioni di questa base, consiste nel fare agire a caldo l'acido cloridrico sopra una soluzione acquosa di cloruro di platosodiammina. Avviene che questo sale, in una frazione che varia colla concentrazione dell'acido e colla durata della reazione, cede gradatamente ammoniaca all'acido cloridrico e si scinde nei cloruri di platosomonodiammina e di platososemidiammina. — Quando l'esperienza non è protratta oltre misura, la reazione avviene nettamente, senza formazione cioè di altri prodotti, e può essere rappresentata in modo generale dalla seguente equazione:



« Nelle mie esperienze si teneva per un certo numero di ore, in un apparecchio a riflusso alla temperatura dell'acqua bollente, la soluzione contenente determinate quantità di cloruro della prima base del Reiset e di acido cloridrico. Raffreddata la soluzione, si separava il cloruro di platososemidiammina, che è insolubile alla temperatura ordinaria (g). Nel liquido filtrato e

(1) *On ammoniacal platinum bases*, Stockholm, 1872.

bollente si versa in eccesso una soluzione concentrata di cloroplatinico potassico. Il sale verde del Magnus che precipita immediatamente, lavato, essiccato e pesato, moltiplicato per il fattore 0,59 indica la quantità di cloruro della prima base del Reiset che non ha preso parte alla reazione, e così per differenza si ha la quantità: m . — Dalla soluzione separata dal sale verde, concentrata per evaporazione, si depona per raffreddamento il cloroplatinico di platosomonodiammina, e da questo si può desumere la quantità p del cloruro della stessa base.

« Evidentemente il rapporto tra le due quantità p e q varia anch'esso colla concentrazione e colla durata della esperienza. — A parità di concentrazione, se si abbrevia la durata della reazione diminuisce naturalmente q rispetto a p ; ma diminuendo in una più forte misura anche la quantità m , ne viene che la quantità assoluta di p riesce più piccola di quella che si avrebbe prolungando la durata dell'azione dell'acido cloridrico.

« Ecco i dati numerici dell'esperienza, che finora mi ha dato la massima quantità assoluta di cloroplatinico di platosomonodiammina. Impiegando dieci grammi di cloruro di platosodiammina cristallizzato sciolti in 150 cent. cubici di acqua distillata a cui aggiunti 75 cent. cub. di acido cloridrico avente una densità eguale a 1,1982 a $+ 20^\circ$, dopo dieci ore di riscaldamento alla temperatura nell'acqua, si ottennero:

- gr. 6,75 di sale verde del Magnus = 3,98 di cloruro del Reiset cristallizzato
 » 3,20 di cloruro di platososodiammina = 3,77
 » 2,70 di cloroplatinico di platosomonodiammina = 2,11.

« La differenza di grammi 0,14 tra la quantità impiegata di cloruro di platosodiammina, e la somma dei prodotti ottenuti, ragguagliati a questo sale, è trascurabile in questo genere di determinazioni, e pertanto non infirma l'attendibilità della formola generale sovraesposta.

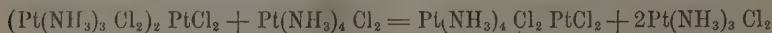
« 3.° Il cloroplatinico di platosomonodiammina cristallizza in lamine di un bel color roseo a riflesso leggermente metallico che rimangono completamente oscure tra i nicol incrociati, e da esse sorte nella luce convergente un'unica figura assiale ben centrata, avente il carattere della doppia rifrazione positiva.

« Questo sale per l'azione dell'ammoniaca, dopo essersi cangiato in parte nel sale verde del Magnus, si scioglie completamente, e rimane totalmente trasformato in cloruro di platosodiammina.

« Coll'acido nitrico reagisce assai facilmente, trasformandosi in una materia cristallina incolore, insolubilissima nell'acqua e che ha la composizione e le proprietà di un nitrato di cloroplatinomonodiammina. Infatti la sua soluzione acquosa alla temperatura ordinaria non precipita col nitrato d'argento.

« 4.° Finora si otteneva il cloruro di platosomonodiammina trattando con acido cloridrico concentrato il nitrato, che alla sua volta veniva preparato fa-

cendo agire il nitrato d'argento sul cloroplatinito (1). — Dalle mie ricerche risulta che questo sale si può molto più agevolmente ottenere, versando in una soluzione bollente di cloroplatinito di platosomonodiammina una quantità equimolecolare di cloruro di platosodiammina. La reazione è quantitativa ed avviene secondo l'equazione seguente:



« Evaporando la soluzione, separata dal sale verde del Magnus insolubile, si ottiene come residuo il cloruro di platosomonodiammina, che può essere facilmente e completamente purificato con una sola cristallizzazione. Esso costituisce dei prismi incolori, monoclini, aventi una lucentezza sericea, che sono solubilissimi nell'acqua e insolubili nell'alcool.

« Il cloruro di platosomonodiammina per l'azione dell'acido cloridrico si trasforma assai facilmente in cloruro di platososemediammina. Coll'ammoniaca cangiasi in cloruro di platosodiammina. Col cloroplatinato sodico produce un precipitato cristallino di colore rosso carico costituito da cloroplatinato di platosomonodiammina, che si decompone però prontamente anche alla temperatura ordinaria, riducendosi in cloroplatinito ed in altri prodotti che non ho potuto ancora ben determinare ».

Paleontologia. — *Di alcuni fossili controversi riferiti a crinoidi, foraminiferi, vermi e corallari.* Nota del Socio G. CAPELLINI.

« In una breve Nota presentata all'Accademia nella seduta del 4 marzo u. s., tracciai la storia di un fossile stato illustrato per la prima volta in Bologna nel 1836 come riferibile al genere *Apiocriniles*, da ultimo studiato dal prof. Andreae e poscia descritto e figurato dal prof. Sacco nel 1893 come un rizopode del genere *Bathysiphon* (2).

« In quella rapida rivista storica ricordai che Bianconi (1840) e Pilla (1846) ammisero che il fossile potesse aver rapporto con l'*Apiocriniles ellipticus*, mentre il dott. Manzoni nel 1874 preferì di ravvicinarlo al genere *Rhizocrinus*. Il prof. Meneghini un anno dopo lasciava sussistere il dubbio sul proposto ravvicinamento generico, dichiarando che « era impossibile di determinare un genere di crinoide senza conoscerne il calice ».

« Al prof. Sacco era sfuggita ogni possibile identificazione del supposto crinoide del miocene bolognese con il fossile delle colline di Torino che esso, seguendo l'Andreae e il Depéret, riferiva ad un genere di foraminiferi; avver-

(1) Cleve, luogo citato.

(2) Capellini, *Rizocrinus Santagatai* e *Bathysiphon filiformis*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, classe di sc. fis. mat. e nat. vol. III, fasc. 5°. Roma, 4 marzo 1894.

tiva però che Eugenio Sismonda e Bartolomeo Gastaldi circa trent'anni addietro, avevano raccolto e studiato lo strano fossile, benchè essendo incerti della determinazione non ne avessero fatto menzione nelle loro pubblicazioni.

« Dalle note manoscritte dei due naturalisti trovate con gli esemplari nella collezione paleontologica del museo di Torino risulta che entrambi dubitarono che si trattasse di frutti di leguminose, indicandoli perciò coi nomi generici: *Carpolites* e *Leguminocarbon* ⁽¹⁾.

« Non senza grande meraviglia che valenti naturalisti avessero potuto a volta a volta giudicare così diversamente i curiosi resti fossili caratteristici delle marne marine mioceniche del Bolognese, dopo un esame scrupoloso e in seguito ad accurati confronti, conclusi che il *Rhizocrinus Santagatai*, Mgh. e il *Bathysiphon filiformis* fossile secondo Andreae, *B. taurinensis* secondo il Sacco, erano la stessa cosa; avvertii però che forse altri fossili erano stati riferiti troppo corrvamente allo stesso genere e che non si poteva ancora eliminare ogni incertezza sulla famiglia alla quale avevano appartenuto.

« La quistione si trovava in questi termini mentre si aspettava che nelle memorie della Accademia nostra fosse pubblicato il lavoro del dott. De Angelis, *I Corallari dei terreni terziari dell'Italia settentrionale*. Di quel lavoro io era stato Commissario relatore e per più considerazioni ne aveva incoraggiato la stampa; non aveva però scrutinato per le singole diagnosi tanto da poter rilevare che la *Pavonaria miocenica*, Michelotti (*P. Portisi*, De Angelis) potesse essa pure aver che fare con il fossile che già era stato giudicato un crinoide, un frutto di leguminosa, un foraminifero e che il Michelotti avrebbe riferito ad un corollario ⁽²⁾.

« Ma pure sta così: e stenterei ancora a persuadermi della necessità di questa nuova identificazione, se non avessi avuto la opportunità di esaminare gli esemplari raccolti dal Michelotti e descritti dal De Angelis come corallari della famiglia *Pennatulidae*, e se non avessi potuto constatare che la figura della sezione che questi ne ha dato a pag. 14 della citata Memoria, non corrisponde in modo alcuno a quanto si vede effettivamente, osservando senza idee preconcepite.

« La struttura finamente raggiata, come è accennata dal De Angelis, non esiste e quando si fotografa ingrandita una buona sezione, si vede come realmente si presenta la massa concrezionaria inattaccabile dagli acidi, con qualche grano di quarzo e con frammenti di spicule, che costituisce il grosso strato interno come aveva diligentemente osservato il prof. Andreae.

(1) Sacco F., *Le genre Bathysiphon à l'état fossile*. Bulletin de la Soc. géol. de France, 3^e série, T. XX, pag. 165. Paris 1893.

(2) De Angelis G., *I corallari dei terreni terziari dell'Italia settentrionale (Collezione Michelotti)*. Memoria della R. Accad. dei Lincei, Classe di sc. fis. mat. e nat., ser. 5^a, vol. I. Roma 1894.

« Io non potrei indovinare su quali caratteri si basasse il Michelotti per riferire il fossile in quistione al genere *Pavonaria*; mi basterà di ricordare che questo genere, dai zoologi moderni giustamente riportato al genere *Funiculina* di Lamarck, secondo Blainville ha per caratteristica uno stelo calcareo a sezione quadrangolare con struttura raggiata, e quando si trattasse di questo genere non dovrebbero mancare assolutamente impronte del genere di quelle che, con maggiore probabilità, furono riferite a *Pennatulidae* (vedi anche De Stefani). Ma niente di tutto ciò; non stelo tetragono, non struttura raggiata, non impronte che si possano riferire a porzioni dello stelo polipifero, non calcare ma aggregato siliceo; e quanto più si torna ad esaminare questi strani tubi più o meno deformati, con parete più o meno grossa, sempre più si è inclinati ad ammettere che: qualora non si trattasse nè di vermi, nè di *Astrorhizinae*, meno ancora si potrebbe pensare di aver che fare con corollari. Non credo che, per ora, questa quistione paleontologica possa essere risolta definitivamente e per conseguenza parmi opportuno di insistere ancora che mentre sono pure da identificare genericamente gli esemplari del miocene delle colline di Bologna e di Torino e quelle di San Gregorio in Sassola (Tivoli) più recentemente raccolti dal dott. De Angelis, i quali tutti meglio ricordano il genere *Bathysiphon*, per gli altri provenienti dalle arenarie eoceniche e cretache dell'Apennino (*B. apenninicus*, Sacco), si debbano mantenere gli intraveduti più stretti rapporti col genere *Rhabdamina*. E poichè grandemente interessa di raccogliere tutte le notizie che si riferiscono a resti di questi fossili provenienti da località diverse e in vario modo interpretati, dirò che il prof. C. De Stefani ebbe pure a farne menzione nei suoi *Studi paleozoologici sulla creta superiore e media dell'Apennino settentrionale*, e fino dal 1883, ritenendo che potessero avere rapporto con *Alcionarii*, li riferì al genere *Virgularia* (1).

« Il De Stefani cita Pontassieve (museo di Firenze), Montese (museo di Bologna) e il macigno eocenico di Ponte a Piastra in Garfagnana ove dice di avervi altra volta segnalato il fossile incerto col nome di *Batyerinus* sp. Per l'ultima località dice che, trattandosi di piccoli frammenti, non aveva potuto esaminarne la struttura microscopica della parte calcarea, ma che probabilmente anche quelli assi calcarei si riferivano ad *Alcionarii*, forse *Virgularie* o generi affini.

« Ma il De Stefani aveva sperimentato e cercato la natura dei frammenti dei quali si tratta, o si era fidato delle apparenze? Che per questi fossili controversi non si trattasse di cilindretti calcarei credo che nessuno avesse mai sospettato, prima che il prof. Andreae li avesse analizzati e con sezioni microscopiche si fosse assicurato, come feci io pure, che non si tratta

(1) De Stefani, *Studi paleozoologici sulla Creta superiore e media dell'Apennino settentrionale*. Atti della R. Accad. dei Lincei, ser. 4^a, vol. I, pag. 103. Roma 1885.

di calcare, che non vi ha struttura raggiata e che i supposti raggi o canaletti sono piuttosto da ritenersi come avanzi di spicule di spongiari come se ne riscontrano nei tubetti del *Bathysiphon* ⁽¹⁾.

« Ho fatto fotografare alcune delle preparazioni meglio riescite ingrandite notevolmente, ed ho avuto la conferma di quanto aveva osservato senza passione e senza voler vedere quello che non esiste.

« I copiosi materiali dei quali ho potuto disporre, anche per confronti con *Astrorhizinae*, vermi tubicoli e corallari viventi, sono nel museo geologico di Bologna a disposizione di tutti gli studiosi che desiderassero di verificare o di fare ulteriori osservazioni; per conto mio continuo a mantenere intatte le conclusioni della prima Nota del 4 marzo 1894 ».

Fisica terrestre. — *Sulla registrazione a Roma del terremoto calabro-messinese del 16 novembre 1894.* Nota del Socio P. TACCHINI.

« Nella precedente Nota ho reso conto all'Accademia delle notizie telegrafiche ricevute su questo terremoto e lo scopo mio principale era di far vedere come quel movimento erasi propagato fino a noi e oltre, e come gl'istrumenti del Collegio Romano avessero registrato le onde sismiche provenienti da quella scossa lontana. Ora mi permetto di far note all'Accademia alcune mie considerazioni sui tempi della registrazione del fenomeno a Roma e in Sicilia. Dal diagramma ottenuto nel nostro sismometrografo a doppia velocità, il cui pendolo ha una lunghezza di 16 metri e la massa è di 200 chilogrammi, si ricava che il principio del movimento in Roma ebbe luogo a 18^h, 52^m, 25^s t. m. E. C.: dopo per effetto della grande velocità dell'apparecchio si sono ottenute registrate in larga scala le curve dovute alle oscillazioni del pendolo, le cui amplitudini andarono crescendo fino alle 18^h, 54^m, 55^s per poi decrescere saltuariamente. In dette curve le dentellature per un buon tratto, che comprende la massima ampiezza di oscillazione, sono alquanto più marcate di quelle dei tratti sinusoidali che precedono e seguono, come quello riprodotto nella precedente Nota; così che si ha ragione di ritenere molto probabile, che il massimo del movimento sismico per Roma cada nel tratto medio sopradetto e precisamente verso l'ora indicata, cioè in cifra tonda a 18^h, 55^m. Come prova di ciò, sta il fatto che detto tempo si accorda benissimo con quello ricavato dalla registrazione di un altro sismometrografo, il cui pendolo ha solo sei metri di lunghezza e la massa 100 chilogrammi; da questo secondo diagramma il principio del movimento corrisponde a 18^h,

(1) Andreae A., *Das fossile Vorkommen der Foraminiferengattung Bathysiphon.* Verhandlungen der Naturhist. Med. Vereins in Heidelberg. N. F. V. B. 2, 1893.

52^m, 30^s e il massimo della fase a 18^h, 55^m, 50^s, così che si ha veramente ragione di ritenere, che il massimo del moto a Roma sia avvenuto molto prossimamente alle 18^h, 55^m, mentre con istrumenti meno sensibili il tempo della registrazione del principio della scossa deve trovarsi in ritardo.

« Infatti un terzo sismometrografo col pendolo di soli 1^m, 50^s e massa di 10 chilogrammi il principio del terremoto risultò in ritardo e precisamente a 18^h, 53^m, 20^s. Ma per la questione di cui mi occupo ora, sono i tempi del principio e massima fase che interessano e quali furono ricavati dagli istrumenti di maggiore precisione. Ritenuto come si disse il tempo del massimo eguale a 18^h, 55^m, ritenuta la distanza fra Messina e Roma di 480 chilometri e prendendo per velocità di propagazione delle onde sismiche la media velocità trovata dal dott. Agamennone per diversi terremoti, cioè chilometri 2,5 e 3, se ne poteva inferire che a Messina la scossa forte doveva aver avuto luogo 3^m, 12^s o 2^m, 40^s prima cioè a 18^h, 51, 48^s ovvero a 18^h, 52^m, 20. E infatti dai tempi segnalati telegraficamente poco dopo il disastro io trovai per Messina e Catania l'ora 18^h, 52^m. Su quei tempi non credetti di far parola nella Nota precedente, perchè è naturale, che ad essi non si poteva subito prestare intiera fiducia, ma sicurissimo come era dell'esattezza dei tempi ottenuti a Roma, mi interessai tosto di avere notizie speciali sui tempi telegrafati, e da un rapporto del direttore dell'Osservatorio di Messina risulta evidente che il tempo della scossa forte, che non fu preceduta da scosse minori sensibili, corrisponde a 18, 52^m, 0^s dall'arresto del pendolo dell'osservatorio, ed a 18^h, 52^m, 2^s e 18^h, 51^m, 31^s dall'arresto di altri due pendoli in città.

« Il pendolo dell'osservatorio era stato regolato il 12 novembre, così che tenuto conto anche che il pendolo dell'Osservatorio non si fermò mai colle scosse minori avvenute dopo, sebbene tanto sensibili, è certo che il tempo dato di 18^h, 52^m nel telegramma deve ritenersi corrispondente entro pochissimi secondi al momento della grande scossa. E anche mettendoli tutti e tre in conto, si ha per il tempo della scossa a Messina 18^h, 1^m, 51^s, cioè un tempo pressochè eguale a quello calcolato partendo dal tempo della fase massima registrata in Roma. Ma sul diagramma di Roma la registrazione incomincia alle 18^h, 52^m, 25^s cioè 2 $\frac{1}{2}$ muniti prima del massimo, cioè dall'arrivo del moto proveniente dalla scossa forte di Messina; e quindi io credo di poter concludere, *che prima della grande scossa del terremoto calabro-messinese, ebbe luogo un moto-microsismico insensibile all'uomo e agli apparecchi comuni*, ma che invece poté propagarsi e rendersi sensibile negli apparecchi a Roma, e perciò io ne concludo ancora, *che se l'apparecchio di Roma si fosse trovato installato a Messina la registrazione del moto avrebbe incominciato a manifestarsi nell'istrumento 2^m $\frac{1}{2}$ prima della scossa*, cioè a 18^h, 49^m, 30^s.

« Da tutto quanto ho esposto sopra risulta evidente, come sia neces-

sario avere nei diversi luoghi di osservazione istrumenti perfettamente comparabili, e comparabile l'esattezza con cui i tempi delle diverse scosse sono determinati: ma per riescire a ciò occorrono mezzi, che non sappiamo quando si riuscirà ad ottenere, e qualche speranza a questo riguardo la riponiamo nella Commissione, che molto opportunamente il Governo ha nominato per lo studio di quel fenomeno.

« Aggiungerò che da un telegramma d'oggi del Riccò, risulta che il massimo a Catania si verificò intero alle 18^h, 52^m, ciò che aggiunge valore alle mie considerazioni ».

Astronomia. — *Osservazioni del pianeta BE 1894 e riflessioni sull'orbita.* Nota del Corrispondente E. MILLOSEVICH.

« Il primo novembre, col metodo fotografico, fu trovato da Wolf ad Heidelberg un pianetino, che io osservai il 4, 5, 7, 20 e 26 novembre all'equatoriale di 9 pollici dell'Osservatorio del Collegio Romano col micrometro filare e con ingrandimento di 200 volte. L'astro era di undicesima grandezza, ed ecco le cinque osservazioni.

	Ascensione retta apparente				Declinazione apparente			
1894 Nov. 4	10 ^h 37 ^m 48 ^s	R	C	R	2 ^h 36 ^m 47 ^s .00	(9.076 n)	+	6°33'36".2 (0.708)
" " 5	11 54 25	"			2 36 7.10	(8.562)		.6 3 5.4 (0.712)
" " 7	9 54 36	"			2 34 56.66	(9.238 n)		5 .9 15. 7 (0.725)
" " 20	6 53 48	"			2 28 46.96	(9.551 n)	+	0 6 36. 3 (0.769)
" " 26	8 13 56	"			2 27 18.67	(9.810 n)	—	1 36 42. 5 (0.781)

« Già dal telegramma, che annunziava la scoperta, e poi dalle due mie prime osservazioni, si metteva in evidenza lo straordinario moto in declinazione, che era di oltre 70" all'ora, cosa eccezionalissima per i pianetini, superiore al più grande moto che Pallade possa avere in declinazione. È noto che Pallade è il pianetino, che ha l'inclinazione più forte fino ad ora conosciuta, quasi 35°. Si poteva congetturare subito che l'astro doveva essere molto vicino alla terra e notabilmente inclinato.

« Coll'osservazione della scoperta (1 Nov.) e colla mia del 7 Novembre, tentai un'orbita circolare allo scopo di poter ritrovare l'astro dopo il plenilunio.

« Il metodo, come è noto, si riduce a questo: con un dato raggio, in base alle due direzioni osservate e ai luoghi della terra corrispondenti alle due epoche delle osservazioni, risulta l'arco eliocentrico descritto, il quale deve risultare identico a quello che in base all'intervallo e col medesimo raggio risulta dalla ben nota legge di Keplero. Nell'ipotesi di $a=2$ aveva una differenza di 10' 7" fra i due valori, l'arco eliocentrico dedotto colla prima via

essendo maggiore del valore dedotto dalla legge di Keplero; dovetti discendere fino ad $a = 1$, ed ancora aveva per i due valori $2^{\circ}58'44''$ e $2^{\circ}57'55''$, cioè l'accordo si raggiungeva per $a < 1$, locchè era paradossale, perchè l'astro era in opposizione, cioè al di là dell'orbita della terra rispetto al sole. Al medesimo risultato paradossale pervenne il celebre calcolatore Schulhof (vedi *Astronomische Nachrichten* 3264).

« Ciò dipendeva perchè in realtà l'astro era assai vicino alla terra e molto eccentrico, come appare dagli elementi ellittici calcolati da Berberich, e per lettera gentilmente trasmessimi appena dedotti. Essi sono basati sopra un piccolo intervallo di appena undici giorni, ma rappresentano bene le mie osservazioni del 20 e del 26 novembre.

« L'astro è inclinato di circa 22° e l'arco, di cui il seno è l'eccentricità, è 17° . Il primo novembre l'astro era distante dalla terra soltanto 0,70 (1 essendo la media distanza della terra dal sole); in verità quindi il 1° novembre esso distava del sole circa 1,7, cioè su per giù la distanza di Marte dal sole, quando quello è all'afelio. Se l'astro fosse in opposizione esattamente perielia, e che questa avvenisse in estate, si potrebbe avere per distanza dalla terra il valore 0,6, cioè una parallasse orizzontale di circa $14''$; l'astro quindi potrebbe servire in modo ammirabile per molte ragioni meglio di Marte, ad una determinazione della parallasse orizzontale del sole ».

Matematica. — *Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche.* Nota del prof. D. BESSO, presentata dal Socio BELTRAMI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Variazione sull'altezza di un corista prodotta dalla magnetizzazione.* Nota del dott. N. PIERPAOLI, presentata dal Socio BLASERNA.

« Ho voluto esaminare come si modifica la durata di oscillazione o l'altezza di un corista per effetto della magnetizzazione.

« A tal fine ho paragonato successivamente tre coristi ordinari $\{La_3 == 870 \text{ v. s.}\}$ con il corista normale prototipo da verifica, conservato in questo ufficio centrale del corista uniforme, seguendo il solito metodo ottico, determinando cioè il numero dei battimenti o delle rotazioni della figura di Lissajous in $1''$ prima e dopo avvenuta la magnetizzazione.

« In queste ricerche il corista prototipo, termine di confronto, fu fissato pel suo gambo ad un solidissimo treppiedi, e costantemente tenuto nella medesima posizione, mentre i coristi da esaminare venivano fissati a mezzo

di una vite sopra apposito montante, dal quale non venivano rimossi per tutta la durata del loro esame. Per magnetizzarli si trasportavano insieme al montante. Operai così perchè da esperienze preliminari ho potuto accertarmi che sulla durata di oscillazione del corista influiva anche il diverso modo con cui esso era fissato, giacchè stringendo più o meno forte la vite si notava una differenza sensibile, ciò che del resto è naturale e noto già riguardo al pendolo. Tenendo dunque il corista prima e dopo la magnetizzazione fissato ugualmente, ho creduto eliminare qualunque causa di errore derivante dalla fissazione del corista.

« Per magnetizzare i coristi mi sono servito di un'elettrocalamita, contro i poli della quale strofinava un certo numero di volte le due branche, e precisamente le due faccie di esse parallele al piano di oscillazione. Così anche ammettendo, che con lo strofinamento venisse a scemare la massa del corista, tale diminuzione non avrebbe potuto esercitare influenza alcuna, giacchè non avrebbe che diminuita la dimensione normale al piano di oscillazione, dalla quale, come si sa, è indipendente la durata della vibrazione. Cionondimeno ho verificato che in realtà per lo strofinamento non si alterava menomamente la massa del corista, dappoichè prima e dopo la magnetizzazione trovai il peso del corista uguale fino al milligrammo sopra circa 220 grammi. Stante la forma poco opportuna offerta dai coristi, non ho determinato il momento magnetico.

« Persuaso che per effetto della magnetizzazione si producesse una piccola variazione nel numero delle vibrazioni, ho posto ogni cura perchè sul fenomeno non influissero altre cause, ed in particolar modo la temperatura. Ho cercato quindi per quanto mi fu possibile di eseguire le misure prima e dopo la magnetizzazione alla medesima temperatura, o per lo meno a temperature poco diverse tra loro. È vero che trattandosi qui non di misure assolute ma relative, anche avvenendo una variazione di temperatura tra un'esperienza e l'altra, questa si fa sentire tanto sul corista da esaminare quanto sul corista campione, ma rimane sempre il dubbio se essa si fa sentire sui due coristi in ugual grado; necessiterebbe perciò che essi avessero uguale coefficiente di temperatura, ciò che in generale non può ammettersi e non è, sebbene i coristi da me studiati e costruiti da König sieno fatti con la massima cura. Era dunque prudente e necessario sperimentare a temperature, se non perfettamente uguali, almeno differenti il meno possibile.

« Per essere poi sicuro che i due coristi avessero durante le singole misure la medesima temperatura, ho collocato vicino ad essi due buoni termometri, e le misure stesse cercava di farle nel più breve termine possibile, affinchè la mia presenza prolungata ed il calore irradiato dalla lampada adoperata, non alterassero sensibilmente la temperatura dell'ambiente e non stabilissero differenze sensibili nelle varie regioni di esso. Quindi, piuttosto che fare molte misure nello stesso giorno, ho preferito farne poche per giorno.

« I tre coristi che ho studiati, in acciaio non temperato, sono distinti coi numeri progressivi 51, 55, 57 e dovrebbero corrispondere ad 870 v. s. alla temperatura di 20° come il corista normale col quale li ho paragonati. Quest'ultimo, in acciaio dorato, porta l'estremità delle branche brunte, le quali funzionano da specchi; sugli altri ho dovuto invece attaccare uno specchietto, ciò che li ha naturalmente abbassati, ed ho verificato che prima e dopo la magnetizzazione essi erano più bassi del corista normale. La branca esaminata è stata per tutti la medesima, cioè la branca a destra di chi guarda l'iscrizione incisa su di essi, e per ognuno ho determinato sempre la durata di 20 battimenti semplici a mezzo di un contasecondi in quinti.

« Ho esaminato inoltre se l'orientazione del piano di oscillazione del corista esercitava qualche influenza sul fenomeno; ma facendo oscillare il corista magnetizzato nel piano del meridiano magnetico ed in un piano normale ad esso, non ho potuto notare alcuna differenza apprezzabile.

« Nella seguente tabella sono riportati i valori medi ottenuti, le durate cioè di 20 battimenti prima e dopo la magnetizzazione.

Corista N°	Durata di 20 battimenti		Differenze	Differenza media
	Prima della magnetizzazione	Dopo la magnetizzazione		
51	16,41	17,14	0,73	0,713
55	20,68	21,45	0,77	
57	16,87	17,51	0,64	

Tenuto conto di quanto ho detto sopra, che cioè i 3 coristi esaminati, prima e dopo la magnetizzazione, erano più bassi del corista prototipo, questi risultati ci dicono che la magnetizzazione ha avuto per effetto di innalzarli un pochino, avendo migliorato l'accordo con il corista normale. Ciò è reso evidente anche da questa seconda tabella in cui sono riportate le differenze nel numero delle vibrazioni dei coristi ordinari col corista normale.

Corista N°	Differenze nel numero delle vibrazioni		Differenze	Differenza media
	Prima della magnetizzazione	Dopo la magnetizzazione		
51	v.s. 1, 2188	v.s. 1, 1668	v.s. 0, 0520	v.s. 0, 0433
55	0, 9671	0, 9324	0, 0347	
57	1, 1855	1, 1422	0, 0433	

« Si avrebbe così sopra 870 v.s. una differenza di circa 4,3 centesimi di vibrazione, mentre sulla durata di un'oscillazione risulterebbe una differenza di circa 7×10^{-8} di secondo. Come si vede, si tratta di una variazione piccolissima, ma nullameno avendo con i 3 coristi notato lo stesso effetto, è indubitato ch'essa è dovuta alla magnetizzazione.

« Rimane ora ad interpretare la causa di questa variazione, a vedere cioè quale delle quantità che influiscono sull'altezza del corista, abbia subita una variazione in seguito alla magnetizzazione. Si sa che il numero delle vibrazioni di un corista è direttamente proporzionale allo spessore ed in ragione inversa del quadrato della lunghezza, cioè

$$n = K \cdot \frac{e}{L^2}, \quad 1)$$

in cui K è una costante che dipende dal modulo di elasticità del corpo vibrante ed uguale presso a poco per l'acciaio a 0,164V, se con V indichiamo la velocità del suono in esso. D'altra parte è noto, per le ricerche di molti fisici che si sono occupati delle variazioni delle costanti fisiche di un corpo per effetto della magnetizzazione, che la magnetizzazione non altera il volume del corpo, e mentre ne aumenta la lunghezza, lo restringe, cioè fa diminuire le altre dimensioni.

« Introduciamo quindi nella 1) la condizione dell'invariabilità del volume. Se questo lo diciamo Q , e riteniamo quadrata la sezione della branca oscillante del cronista, ciò che può sempre farsi, avremo:

$$Q = e^2 L$$

e quindi

$$n = K \cdot \sqrt[5]{Q} \cdot \frac{1}{L^{5/2}}$$

Così sul valore di n non possono influire altro che K ed L .

« Supponiamo ora che K rimanga costante, e diciamo n_1 , n_2 i numeri delle vibrazioni del corista prima e dopo la magnetizzazione, ed L_1 e L_2 le lunghezze relative, si avrà:

$$n_1 = K \sqrt[5]{Q} \cdot \frac{1}{L_1^{5/2}}; \quad n_2 = K \sqrt[5]{Q} \cdot \frac{1}{L_2^{5/2}}$$

da cui

$$n_2 - n_1 = K \sqrt[5]{Q} \frac{L_1^{5/2} - L_2^{5/2}}{L_1^5}$$

« Per i risultati da me ottenuti

$$n_2 - n_1 > 0$$

mentre per la magnetizzazione

$$L_1^{5/2} - L_2^{5/2} < 0.$$

« Dunque ammettendo K costante, non si potrebbero spiegare i miei risultati e si avrebbe una contraddizione. Concludo che la magnetizzazione deve aver fatto variare K , ossia dev'essere avvenuta una piccola variazione nel modulo di elasticità, e precisamente deve aver subito un incremento.

« Pongo termine a questa mia Nota col fare un'osservazione. Nello studio dei coristi elettromagnetici da me fatto tempo addietro (¹), ebbi a notare una debole magnetizzazione delle due branche del corista sotto l'influenza del piccolo elettromagnete situato tra esse; e, come trovai allora, che determinando il numero dei battimenti prima e subito dopo l'azione della corrente, si aveva una piccola variazione corrispondente a circa 3 centesimi di vibrazione in meno, asserii che probabilmente ciò dipendeva dalla debole magnetizzazione delle due branche. Fu la spiegazione che mi si affacciò per prima, non essendo allora in grado di prevedere in quale senso potesse esercitarsi l'influenza della magnetizzazione. Ora però che da queste ricerche dirette si rende manifesto che la magnetizzazione, anzichè abbassare il corista, lo innalza, devo concludere che la piccola differenza osservata allora deve attribuirsi ad altra causa; forse ad una leggera variazione di temperatura, determinata dall'azione prolungata della corrente e dal prolungato moto vibratorio del corista.

« È certo che la magnetizzazione delle due branche del corista elettromagnetico essendo provata, si avrà anche per essa una variazione, ma dev'essere in quel caso estremamente piccola, se questa trovata ora con una magnetizzazione diretta è per sè stessa già così piccola; e si comprende quindi come possano prevalere le altre cause che tendono invece ad abbassare il corista.

« Ho voluto anche constatare se per caso si trattasse per il corista elettromagnetico di una magnetizzazione trasversale, che producesse un effetto contrario, ma producendo lo spettro magnetico, ho veduto che, anche per azione dell'elettromagnete, le branche del corista elettromagnetico si magnetizzano longitudinalmente ».

Fisica terrestre. — *Sulla variazione di velocità di propagazione dei terremoti, attribuita alle onde trasversali e longitudinali.*
Nota del dott. G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. TACCHINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(¹) Rendiconti Acc. dei Lincei. Vol. II, 1° semestre, fasc. 8, pag. 337.

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia italiana.* — *Antimonite di Cetine.* Nota del dott. E. ARTINI, presentata a nome del Socio STRUEVER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sull'esistenza della Coniina nel Sambucus nigra.* Nota del dott. G. DE SANCTIS ⁽¹⁾, presentata dal Corrispondente A. BALBIANO.

« Il fatto, già da molti ⁽²⁾ sperimentato, che il decotto dei fusti e delle foglie del *Sambucus nigra* ha un'azione elettiva sul sistema nervoso e sul tubo intestinale, mi è stato sprone ad intraprendere lo studio di questa pianta conosciuta fin dai tempi più remoti.

« Seguendo il consiglio e le norme del prof. Errera ⁽³⁾ ho incominciato a fare la ricerca del principio attivo del sambuco a mezzo del microscopio. Ho trovato infatti che alcune cellule che accompagnano i fasci fibro-vascolari danno, quando vengano trattate con una soluzione di joduro di potassio jodurato, un precipitato marrone assai caratteristico, il quale non scompare con l'ulteriore trattamento dell'acido cloridrico, a differenza del precipitato che si ottiene col medesimo reattivo nei canali tanniniferi del sambuco.

« Sicuro ormai dell'esistenza di un alcaloide, mi sono proposto di isolarlo servendomi dei mezzi che verrò qui sotto esponendo.

« Ho raccolto da me stesso una gran quantità di fusti e foglie di sambuco e ne ho fatto un decotto acido per acido solforico. Dopo un riscaldamento blando, prolungato per parecchie ore, ho colato il liquido a cui ho aggiunto dell'acetato neutro di piombo. Si ottiene così un abbondantissimo precipitato risultante da composti piombici delle sostanze tanniche e di una parte delle materie estrattive. Si filtra, ed il liquido filtrato si precipita con acetato basico di piombo, avendo cura di aggiungere con molta precauzione il reattivo, perchè un eccesso può disciogliere il precipitato formatosi.

« Il liquido da cui sono stati eliminati i composti piombici, viene dapprima evaporato il più che sia possibile, poscia vi si aggiunge acido solforico fino a completa precipitazione dell'eccesso di acetato di piombo e da ultimo, dopo filtrazione, si tratta con lo joduro doppio di bismuto e potassio.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

(2) Sydenham, Boerhaave, Borgetti ecc.

(3) *Sur la distinction microchimique des alcaloïdes et des matières protéiques*, par L. Errera.

Si ottiene in questa operazione un abbondante precipitato di colore rosso minio, assai caratteristico, di jodobismutato della base esistente nel *Sambucus nigra*. Ho raccolto e lavato con cura il sale doppio, e, sospesolo nell'acqua, l'ho decomposto mediante l'acido solfidrico: da una parte m'è precipitato il solfuro di bismuto e dall'altra ho ottenuto in soluzione lo jodidrato dell'alcaloide. Questo sale cristallizza in grossi cristalli nel vuoto secco, ma è poco maneggevole a causa della sua estrema deliquescenza. Esso tramanda un odore assai pungente e nauseante, odore che incomincia ad avvertirsi allorquando si concentrano i liquidi per la precipitazione col reattivo di Dragendorff.

« La soluzione dello jodidrato dell'alcaloide, che col riscaldamento diviene rosa e poi in seguito verdastra, quando venga trattata con ossido idrato di argento, lascia in libertà la base, mentre si precipita lo joduro d'argento.

« La base che ho estratto dal sambuco è un liquido incolore, quando sia di recente preparato, oleoso, più leggero dell'acqua, dotato di un odore penetrante e disgustoso; odore che ricorda quello degli escrementi dei topi. Emette dei vapori alla temperatura ordinaria: è molto alterabile e si colora presto in bruno passando per tinte intermedie assai belle e molto variate. Si scioglie un po' nell'acqua a cui comunica l'odore suo caratteristico: si scioglie nell'alcool, nell'etere, nel cloroformio.

« Una volta avuto per le mani l'alcaloide libero, ho cercato di prepararne qualche sale, benchè la quantità della base fosse sì piccola da non permettere una ricerca molto estesa.

« Il cloridrato cristallizza in grosse lamine incolore ed è oltremodo deliquescente. Lasciato all'azione della luce si colora in rosso brunastro.

« Il solfato, l'acetato sono incristallizzabili a motivo della loro massima deliquescenza.

« Il cloroaurato è una polvere gialla cristallina, che si ottiene a stento trattando il cloridrato della base con cloruro d'oro. Se si riscalda la soluzione del cloroaurato, si deposita sul fondo e sulle pareti del recipiente un velo di oro metallico assai bello e assai splendente, mentre si avverte marcatissimo l'odore dell'alcaloide. L'incertezza di ottenere puro questo sale mi fece abbandonare l'idea di potermene servire per le mie determinazioni.

« Il cloroplatinato cristallizza in prismi quadrangolari; è un po' solubile a freddo nell'acqua, nell'alcool, nell'etere; ma è solubilissimo nell'alcool bollente. A 100° si decompone come il cloroaurato, però in modo molto meno sensibile.

« Tutte le soluzioni dei sali che ho potuto preparare precipitano, anche se diluitissime, con i reattivi generali degli alcaloidi: però lo joduro doppio di bismuto e potassio è, secondo il mio parere, il reattivo più caratteristico e, ciò che più monta, il più maneggevole: le acque che tramandino appena un leggero odore della base danno un precipitato apprezzabile o tutt'al più un arrossamento allorchè vengano trattate con il reattivo di Dragendorff.

« Per poter determinare la formula di questo alcaloide ho potuto soltanto analizzare il cloroplatinato, stantechè è questo, come avanti ho accennato, l'unico sale ben cristallizzato e puro che fino ad ora abbia potuto ottenere:

gr. 0,1759 di sostanza diedero di anidride carbonica gr. 0,1871, di acqua gr. 0,0854.

gr. 0,1922 di sostanza diedero di azoto a 0° e a 760^{mm} cc. 4,63

gr. 0,1351 di sostanza diedero di cloro gr. 0,0433.

gr. 0,2807 di sostanza diedero di platino gr. 0,0822 da cui calcolando per cento si ha

C — 29,00

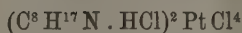
H — 5,39

Az — 4,41

Cl — 32,05

Pt — 29,28

e per



C — 28,94

H — 5,42

Az — 4,22

Cl — 32,10

Pt — 29,30

« Dalle analisi suddette risulta che il cloroplatinato della base ha per formula $(C^8 H^{17} N . HCl)^2 Pt Cl^4$.

« Ora da tutto il complesso delle reazioni, dall'odore caratteristico della base libera, e, ciò che più monta, dall'analisi del cloroplatinato, si può senza fallo argomentare che l'alcaloide estratto dal sambuco è niente altro che la Conicina. Ho determinato anche lo jodio nello jodidrato dell'alcaloide e pure tale analisi comprova la mia asserzione, infatti:

trovato
J 49,52

calcolato per $(C^8 H^{17} N . HCl)^2 Pt Cl^4$
49,80

« Non contento di tali risultati, ho voluto sperimentare se l'azione fisiologica del mio alcaloide fosse identica a quella della vera coniina che si estrae dal *Conium maculatum*. E qui debbo ringraziare il dott. Dutto del Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Roma, il quale iniettando del cloridrato della base nelle rane, venne nella convinzione che si trattasse di un veleno curarizzante, come è appunto la Coniina del *Conium maculatum*. Ma nasce ora spontanea una domanda: Questa base estratta dal sambuco è un α -propilpiperidina come la coniina, ovvero una sua isomera?

« I sali che ho potuto preparare e studiare sono identici a quelli che ho ottenuto lavorando su vera coniina. La mia base dà un composto ramico di color azzurro, come fa appunto l'alcaloide della cicuta. Ho cercato anche di preparare uno jodocadmiato, sale che servì a Lademburg per iscoprire se la coniina estratta dal vegetale era identica a quella sintetica; ma per quanto mi sia affaticato, non sono riuscito ad ottenere un composto cristallino.

« Dopo quanto ho detto mi piace far notare che son partito da un quintale di foglie e fusti secchi di sambuco, e che ho ottenuto da questa massa di vegetale appena gr. 3,5 di cloridrato della base. Esperienze sull'uso dell'estratto idroalcoolico di sambuco si stanno eseguendo ora nell'Istituto di Clinica medica della R. Università di Roma, applicandolo in casi di affezioni nervose, e completate le ricerche verranno pubblicate.

« La coniina, che fino ad ora non s'era riscontrata che in una ombrellifera, vale a dire nel *Conium maculatum*, compare ora nella famiglia delle caprifogliacee e propriamente nel *Sambucus nigra* ».

Chimica. — *Osservazioni sulle relazioni tra il peso molecolare e la densità ne' corpi solidi e liquidi.* — *Sali alogenati.*
Nota di UGO ALVISI, presentata dal Corrispondente R. NASINI.

« Già fin dal 1821 M. A. Le Royer e J. A. Dumas ⁽¹⁾ avevano tentato di stabilire per i volumi *atomici* de' corpi solidi una legge analoga a quella scoperta da Gay-Lussac per i volumi de' gas. Ma in una Memoria: *Sulla densità dei corpi solidi e liquidi*, letta all'Accademia di Torino nel 1824, M. Avogadro da una serie di osservazioni deduceva che « la distanza tra i centri molecolari sarebbe la medesima per tutti i corpi in ciascuno de' due stati, cioè la loro densità sarebbe proporzionale alla massa di queste molecole, se queste distanze e queste proporzionalità non venissero più o meno alterate per differenti circostanze dipendenti dalla costituzione di questi corpi, cosa che non ha luogo nello stato gassoso, dove le molecole sono troppo lontane le une dalle altre perchè la loro influenza possa esercitarsi e dove perciò *il volume della molecola*, cioè lo spazio che occupa col calorico o l'etere che la circonda, non differisce da un corpo all'altro che in ragione delle stesse circostanze ».

« Questo concetto in generale si è serbato sino ad oggi; tuttavia senza entrare nella questione della natura di queste reciproche influenze molecolari nei solidi e ne' liquidi, sembra naturale l'ammettere o l'uno o l'altro di questi due ordini di fenomeni:

(1) Journ. de phys. 92-409.

« 1.° O queste influenze dipendono dalla natura specifica di ciascun corpo (che si espliciti o nella forma differente o in altra proprietà) e quindi perturbano le leggi determinate da una distanza regolare de' centri molecolari; tale ipotesi non fu ancora in modo assoluto dimostrata.

« 2.° O rientrano anch'esse in quella specie di proprietà dette *molecolari* e quindi il loro andamento non può turbare la costatazione di leggi semplici della medesima natura; in favore di tale ipotesi esisterebbe qualche prova, p. es. la regolarità nel volume molecolare delle serie de' sali isomorfi e di analoga formola e funzione chimica.

« Non mi fermerò sull'istoria delle ricerche sui volumi molecolari e sui pesi specifici de' corpi solidi e liquidi, lunga e nota anche da pregevoli riassunti e monografie; le conclusioni generali si possono brevemente riassumere:

« 1.° Il volume de' corpi gassosi è, secondo l'espressione di M. Wundt, una proprietà *colligativa*.

« 2.° I volumi molecolari de' liquidi (serie organiche) sono delle proprietà *additive*, sottomesse all'influenza di proprietà *costitutive*.

« 3.° Per i volumi molecolari de' solidi parrebbe anche trattarsi di proprietà *additive* (ammessi, s'intende, de' coefficienti di contrazione), ma regnano grandi incertezze; regolarità spiccate si riscontrano solo tra le serie de' sali isomorfi di formola chimica o analoga o paragonabile.

« Il problema che io riprendo, cioè di trovare una relazione generale tra la grandezza molecolare e la densità ne' corpi solidi e liquidi, è antico e, di fronte alle esagerate speranze o ai troppo rigidi scoraggiamenti concepiti in questo campo di studi, potrebbe sembrare una pretesa il ritornarvi; tuttavia in questo momento, in cui le conoscenze sulle leggi che governano la materia allo stato gassoso o di soluzione diluita sono così avanzate, mi è parso di qualche utilità il ritentare la questione, partendo da un punto di vista molto semplice e servendomi in queste prime Note de' dati forniti dai diversi autori, salvo poi a trattare in avvenire sperimentalmente qualche quesito che si presenti.

« Premetto intanto:

« 1.° Che mi servirò del *volume molecolare* come d'un *semplice rapporto* tra peso molecolare e peso specifico, senza pregiudicare la questione che cosa esso rappresenti; sostituendo al peso molecolare quello equivalente, avremo il *volume equivalente*.

« 2.° Non mi occuperò affatto del volume che può avere un elemento nelle sue combinazioni.

« 3.° I lavori, di cui mi sono servito per queste e per le ricerche che verrò pubblicando, sono i seguenti:

« Per la parte generale: W. Ostwald, *Lehrbuch der Allgemeinen Chemie. Stöchiometrie*-Leipzig, 1891.

« Per i pesi specifici delle sostanze organiche: F. Beilstein, *Handbuch der organischen Chemie*. Hamburg und Leipzig, 1893-1894.

« Per i pesi specifici delle sostanze inorganiche: Landolt und Börnstein, *Physikalisch-chemische tabellen*. Berlin, 1894.

« Per i pesi specifici de' minerali: M. Websky, *Min. Studien-Erst. Theil. Die min. Species nach den für das spec. Gew. derselben angenommenen und gefundenen Werthen etc.* Breslau. 1868.

« Per i volumi molecolari già calcolati de' corpi organici ed inorganici: i lavori di H. Schröder, di H. Kopp (*Liebig' Ann.*) e di R. Hermann (*J. pr. Chem.* vol. XIII, p. 28. 1876).

« Fuori di questi ho sempre citato volta per volta le Memorie.

« Più strettamente collegate con le mie sono le seguenti ricerche:

« 1.^o F. Ammermüllr ⁽¹⁾ nel 1840 dimostrò che « i volumi *atomici* delle combinazioni, che contengono lo stesso elemento in rapporti differenti, sono molte volte tra loro uguali o stanno tra loro in rapporti razionali », e lo Schröder più tardi che: « lo stesso corpo in composti diversi ha volumi specifici diversi, ma in rapporti razionali ». Queste leggi presentano delle eccezioni.

« 2.^o Hugo Schiff ⁽²⁾ nel 1858 dimostrò che, esaminando i volumi *equivalenti* di diversi cloruri, bromuri e ioduri, si riscontrano in ciascuna serie delle eguaglianze notevoli; fanno eccezione i sali di potassio, ammonio e mercuriosi. Ma lo Schiff esaminò un numero molto limitato di corpi e non trasse dalla regolarità rilevata nessuna conclusione che interessi il problema in questione.

« 3.^o Il Mendelejeff ⁽³⁾, volendo dimostrare che i volumi molecolari de' cloruri non sono la somma de' volumi degli elementi, rileva che i volumi di $RCl^n = n \cdot 27$, mentre il volume del Cl è $= 27$. Così per esempio vol. $TiCl^4 = 108 = 4 \times 27$.

« Per trattare la questione che mi sono proposta è necessario l'esame accurato di un gran numero di composti, sopra tutto tenendone di mira l'andamento generale. Comincerò da' sali alogenati.

⁽¹⁾ Pogg. 49-341; ib. 50-5-406.

⁽²⁾ Ann. der Chem. und Pharm., vol. CVIII, p. 21.

⁽³⁾ B. der Chem. Ges., IV, 931. 1871.

Ioduri	Volume molecolare	Volume equivalente	Bromuri	Volume molecolare	Volume equival.	Joduri	Volume molecolare	Volume equival.
.....	22,8 ⁽¹⁾ -27	22,8-27	Br	27,8 ⁽¹⁾	27,8	IJ	37,5 ⁽¹⁾	37,5
.....	24,3-29	24,3-29	—	—	—	—	—	—
.....	20,87	20,87	LiBr	27-28,1	27-28,1	LiJ	38,5	38,5
.....	85,5-87,7	28,5-29,2	BBr ³	92,6	30,8	BJ ³	118,1	39,3
Cl ¹	50,3-51,4	25,1-25,7	—	—	—	—	—	—
.....	94,5-97,4	23,6-24,3	CBr ⁴	97	24,2	CJ ⁴	122,6	30,6
I ¹	78	26	—	—	—	—	—	—
.....	72,9?	24,3	—	—	—	—	—	—
l	27,2-27,91	27,2-27,91	NaBr	34,1	34,1	NaJ	42,2	42,2
I ²	43,7	21,8	—	—	—	—	—	—
.....	—	—	AlBr ³	105,1	35	AlJ ³	151,3?	50,1
Cl ³	85,1	28,3	—	—	—	—	—	—
.....	114,3-111,6	27,9-28,5	SiBr ⁴	123,8	30,9	—	—	—
Cl ³	82,1	27,3	SiHBr ³	107,6	35,8	SiHJ ³	121,9	40,6
.....	85,3; eb. 87,1-93,6	28,4; 29-31,6	PBr ³	92,6 a fus. 108,6	30,8-36,2	—	—	—
I ²	50	25; max=27,2	CaBr ²	62	31	—	—	—
.....	107,9	26,9	—	—	—	—	—	—
.....	103,4-105,1	25,8-26,2	—	—	—	—	—	—
.....	44,7	22,3	—	—	—	—	—	—
.....	67,1	22,3	—	—	—	—	—	—
I ²	50,8	25,4	—	—	—	—	—	—
.....	50,2	25,1	—	—	—	—	—	—
I ²	44	22	—	—	—	—	—	—
.....	50,5-50,8	25,2-25,4	—	—	—	—	—	—
Cl ²	51,5	25,1	Cu ² Br ²	64	32	Cu ² J ²	86	43
I ²	50,6	25,3	—	—	—	—	—	—
.....	49,4	24,7	ZnBr ²	regolare 61,8	30,9	ZnJ ²	67,9	33,9
.....	74,8	24,9	—	—	—	—	—	—
.....	113,4	28,3	—	—	—	—	—	—
.....	82,4-83,8	27,4-27,9	AsBr ³	86	28,9	AsJ ³	104,1	34,7
.....	—	—	—	—	—	AsJ ⁵	180,1	36
.....	50-51,7 ²⁰	25-25,8	SrBr ²	62-63,4	31-31,7	SrJ ²	77,2	38,6
l	25,7-26,6	25,7-26,6	AgBr	30-31	30-31	AgJ	41,8-40,3	41,8-40,3
.....	50,4	25,2	CdBr ²	55,4-57,8	27,7-28,9	CdJ ²	61,2-64,3	30,6-32,4
.....	—	—	SnBr ²	54,3	27,1	—	—	—
.....	116,4	29,1	SnBr ⁴	131,8	32,9	SnJ ⁴	133,3	33,3
.....	a fus. 84,6; sol. a 26° 73,9	28,2-24,6	SbBr ³	86,7-98,8	28,9-32,9	SbJ ³	esag. a 26°=103,3 mon. a 22°=105	34,4-35,7
.....	a 20°=126,8	25,3	—	—	—	—	—	—

¹⁾ Kopp. H., *Nelle combinazioni organiche.*

Cloruri	Volume molecolare	Volume equivalente	Bromuri	Volume molecolare	Volume equival.	Joduri	Volume molecolare	Vo equ
JCl ³	75	25	—	—	—	—	—	
BaCl ²	51,4-54,0	25,7-27	BaBr ²	70,2	35,1	BaJ ²	79,5	
PtCl ²	45,6	22,8	—	—	—	—	—	
AuCl	25	25	—	—	—	—	—	
HgCl ²	49,9-50,2	24,9-25,1	HgBr ²	rombico 60,8	30,4	HgJ ²	r. 72,5- g. 74,9	36,
TlCl ³ . 3TlCl	174,3	29	—	—	—	—	—	
PbCl ²	47,7-51,83	23,8-25,6	PbBr ²	55,6	27,8	PbJ ²	74,6	5
PbCl ⁴	a. 0° = 109,3 (1)	27,3	—	—	—	—	—	
BiCl ³	69,4	23,1	BiBr ³	79,9	26,6	BiJ ³	101,2-104,2	33,
K ² SnCl ⁶	152	25,3	—	—	—	—	—	
(NH ⁴) ² Sn Cl ⁶	153	25,5	—	—	—	—	—	
(NH ⁴) ² Pt Cl ⁶	152	25,3	—	—	—	—	—	
K ² PtCl ⁶	146	24,3	—	—	—	—	—	
(NH ⁴) ² J _r Cl ⁶ .	154,7	25,7	—	—	—	—	—	
—CCl ³	58,9	19,6	—	—	—	—	—	
VCl ³	52,5	17,5	—	—	—	—	—	
CrCl ³	57,5	19,1	—	—	—	—	—	
FeCl ³	57,9	19,3	—	—	—	—	—	
SCl	39,5	39,5	SBr	42,6	42,6	—	—	
KCl	37,7-38,9	37,7-38,9	KBr	44	44	KJ	54	
SeCl	39,4	39,4	SeBr	44,1	44,1	—	—	
CsCl	42,17	42,17	CsBr	47,9	47,9	CsJ	57,25	5
HgCl	33,1	33,1	HgBr	38,3	38,3	HgJ	42,4	4
TlCl	34,1	34,1	TlBr	37	37	TlJ	46,9	4
NH ⁴ Cl	35	35	NH ⁴ Br	40,7-41,2	40,7-41,2	NH ⁴ J	59,3	5
SCl ²	63,5	31,7	—	—	—	—	—	
(NH ⁴) ² Pt Cl ⁴	132	33	—	—	—	—	—	
(NH ⁴) ² Zn Cl ⁴	137	34	—	—	—	—	—	
K ² SnCl ⁴	136,6	33	—	—	—	—	—	
RbCl	54,5	54,5	RbBr	59,3	59,3	RbJ	70,1	
JCl	51,7	51,7	—	—	—	—	—	

(1) Monat. f. chem. 14 B. VIII, Hef. 515.

« Per chi rifletta alle grandi incertezze che regnano intorno alla determinazione del peso specifico ed al fatto che non sappiamo a quali condizioni riferirci perchè i risultati sieno paragonabili, le cifre su riferite non possono non rappresentare una rimarchevole regolarità e le eccezioni sono tali da avere di per sè stesse già un notevole significato.

« Circa $\frac{3}{4}$ de' volumi equivalenti de' cloruri oscillano intorno al numero medio 26, una proporzione maggiore per i bromuri intorno al n. 32 e per i ioduri intorno al n. 38. L'ipotesi più semplice riguardo a ciascun gruppo esaminato è che in uguali volumi sieno contenuti egual numero di equivalenti. Scegliendo p. es. per i cloruri la costante 26, avremo:

$$(1) \frac{\text{Peso equivalente}}{\text{densità}} = \text{costante } 26, \text{ donde naturalmente } (2) 26 \times d = \text{pes. eq.}$$

« E quando si pensi alle relazioni semplici tra peso equivalente e peso molecolare, l'analogia con l'ipotesi fatta da Avogadro e da Ampère per i gas è evidente.

« Per i liquidi e più per i gas è necessario porsi in condizioni paragonabili di temperatura e di pressione; per i solidi tale condizione diventa di minore entità, data la piccola loro dilatazione tra limiti di temperatura anche abbastanza lontani, quindi è che in essi le regolarità de' volumi vengono più facilmente costatate. Quel che interessa rilevare è che (come vedremo anche in seguito) per ogni gruppo conviene ammettere differenti costanti; ma ciò, se turba la semplicità della legge, non ne muta la natura nè ne altera il significato. Quel che dobbiamo rimarcare è l'andamento generale e le specie delle eccezioni che si presentano.

« Anche avendo de' volumi equivalenti vicini alle costanti suaccennate, se ne allontanano in più i cloruri bromuri, ecc. de' metallodi; se ne allontanano grandemente i cloruri, bromuri ecc. di metalli e metallodi che funzionano o quando funzionano da monovalenti (S.K, NH⁴ ecc.) p. es. Vol. eq. di ICl³ = 25, di ICl = 51,7; di HgCl² = 25,1, di HgCl = 33,1; di TlCl³ 3TlCl = 29, di TlCl = 34,1; di (NH⁴)²PtCl⁶ = 25,3, di (NH⁴)²PtCl⁴ = 34 ecc. Invece i cloruri, bromuri ecc. dei metalli della serie magnesiacca presentano le maggiori regolarità. Tutti questi fatti li vedremo ripetersi per i gruppi de' composti ossigenati. Inoltre come i sali della medesima costituzione chimica hanno presso a poco lo stesso abbassamento molecolare (M. De Coppet), così il volumè molecolare più vicino è dato dai sali isomorfi e di analoga costituzione chimica. Già Avogadro (1) aveva dimostrato che il volume molecolare diventa sempre più considerevole a misura che i corpi sono più elettropositivi. Il fatto che i volumi molecolari degli ossidi del Cd, Cu, Hg, Pb, Zn, Co, Mn, Ni, Pb ecc., sorpassano della medesima quantità i volumi degli elementi corrispondenti (2) non si verifica più per gli ossidi di Ba, Ca, Mg,

(1) Ann. de Chim. et de Phys. 24-330.

(2) H. Schröder poi H. Kopp, Ann. de Chim. et de Phys. 3^a serie, t. IV, p. 462.

K, Na, Sr. Tutto concorre a dimostrare che fra i centri molecolari di questi sali ci sieno distanze maggiori delle normali.

« Una seconda eccezione viene presentata dal gruppo de' cloruri $C^2 Cl^6$, $Fe^2 Cl^6$, $Cr^2 Cl^6$, che hanno un volume equivalente più piccolo del normale.

« Finalmente le differenze regolari tra cloruri, bromuri e ioduri dello stesso elemento e della stessa forma di combinazione rientrano nella legge di *paralleloterismo* di H. Schröder. Le relazioni tra queste serie e quelle organiche saranno oggetto di un'altra Nota, come pure lo saranno le analoghe ricerche sui composti ossigenati.

« Dovrei prima di terminare questo lavoro accennare a' fluoruri, ma solo per pochi fu determinato il peso specifico e le conoscenze sono molto limitate. Essi presentano spesso un volume equivalente circa = alla metà di quello de' corrispondenti cloruri (già Hermann stabiliva il volume del Fluore = 12,5 e del Cloro = 25) e lo stesso loro andamento. P. es.:

	Volume molecolare	Volume equivalente		Volume molecolare	Valore equivalente
Ba Si Fl ⁶	65,2	10,8	Na Fl	15,1	15,1
Na ² Si Fl ⁶	70,1	11,6	Pb l ²	29,6	14,8
Ca Si Fl ⁶	68,3	11,3	Ba Fl ²	36,2	18,1
KB Fl ⁴	49,6	12,4	Sr Fl ²	29,5	14,7
K ² Si Fl ⁶	82,5	13,7	Ni Fl ²	33	16,5
Cd Fl ²	25,02	12,5	As Fl ²	48,2-49,5	16-16,5
Ce Fl ⁴ Ce Fl ² . . .	87,9	12,5	Bi Fl ²	49,8	16,6
Ca Fl ²	24,5	12,2			
Mg Fl ²	26,2	13,1	H Fl	20	20
Al Fl ³ 3 Na Fl . . .	70,23	11,37 (criolite)	K Fl	23	23
2 Al Fl ³ 3 Na Fl . .	94,23	10,47 (chiolite)	Ag Fl	38 ?	38
2 Na Fl Al Fl ³ . . .	54,8	10,9 (nifolite)	HK Fl ³	47	23,5
K ² Zr Fl ⁶	78,7	13,1	Cs ² Si Fl ⁶	120,8	20,1
Li Fl	9,9-10	9,9-10			
B Fl ³	29	9,6			
Al Fl ³	27	9			

« La semplicità delle relazioni fin qui accennate e di quelle che spero di pubblicare ancora, starebbero ad indicare come la disposizione molecolare ne' solidi e ne' liquidi non sia *forse* un fenomeno così complesso (come per lo più si crede) almeno per determinate classi di corpi ».

Chimica fisica. — *Dissociazione elettrolitica e legge della diluizione nei solventi organici.* ⁽¹⁾ Nota di G. CARRARA, presentata dal Corrispondente R. NASINI.

« In due miei precedenti lavori ⁽²⁾ considerai l'andamento della velocità di reazione tra il solfuro d'etile e il joduro d'etile soli o in presenza d'acqua o di alcuni alcoli, e feci notare come certi solventi avevano la proprietà di accelerare grandemente la reazione senza che vi prendessero parte alcuna, e concludevo che l'influenza della natura del solvente spettasse esclusivamente alla sua costituzione chimica anzichè alle sue proprietà fisiche. Il Menschutkin ⁽³⁾, il solo che si fosse occupato prima di me di un simile argomento studiando la formazione del ioduro di tetraetilammonio, accennava alla probabilità che esistesse una certa relazione tra la facoltà acceleratrice e la facoltà di conservare la conducibilità degli elettroliti, ed io nel mio lavoro sopra citato appoggiavo tale ipotesi mostrando come fosse a preferenza negli alcool, i quali come corpi del tipo acqua favoriscono la dissociazione, che si riscontrava la maggiore velocità di reazione.

« Nel presente lavoro espongo i risultati delle esperienze eseguite per vedere quanto i fatti confermano l'ipotesi che la dissociazione elettrolitica per parte dei solventi stia in intimo rapporto con la loro azione acceleratrice. A questo scopo studio la conducibilità elettrica del joduro di trietilsolfina in quei solventi dei quali avevo già studiata l'azione acceleratrice.

« A prima vista questo processo può sembrare non troppo logico, e sembrerebbe invece che si dovesse studiare l'azione disgregante del solvente sopra le sostanze che prendono parte alla reazione cioè il solfuro d'etile e il joduro d'etile; ma se si pensa che queste due sostanze non sono elettroliti, è facile prevedere quello che l'esperienze fatte hanno confermato, e che cioè sciolte in solventi più o meno dissocianti si conserveranno pure non elettroliti. Intesa in questo modo la teoria della dissociazione elettrolitica non sarebbe affatto applicabile a spiegare l'azione acceleratrice; invece, intesa nel senso

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Padova. Sunto di una Memoria che verrà pubblicata nella Gazzetta Chimica italiana.

⁽²⁾ *Sulla velocità di reazione tra il joduro d'etile e il solfuro d'etile soli o in presenza d'acqua.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. II, 2° sem., fascicolo 12°, dicembre 1893. — *Azione di solventi neutri sulla velocità di formazione del joduro di trietilsolfina.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 1° sem., fascicolo 3°, febbraio 1894.

⁽³⁾ *Ueber die Affinitätskoeffizienten der Alkylhaloide und der Amine.* Zeitschrift für Physikalische Chemie VI, pag. 41, anno 1890.

che la dissociazione elettrolitica del prodotto formatosi può e deve essere in diretta relazione con la velocità di formazione la teoria, diventa applicabilissima. Infatti nel caso da me studiato, e considerazioni analoghe potrebbero farsi per quello studiato dal Menschutkin, la formazione del joduro solfinico dal joduro d'etile e solfuro d'etile è limitata dalla reazione inversa; scomposizione del joduro solfinico (elettrolite) nei componenti (non elettroliti) solfuro d'etile e joduri d'etile; si stabilirà un equilibrio tra il joduro e i suoi prodotti di scomposizione come avviene in tutti questi casi e la velocità diminuirà avvicinandosi allo stato di equilibrio: se avessimo mezzo di togliere il joduro già formatosi, nuovo se ne formerebbe e si avrebbe quindi una velocità maggiore. Ora se il solvente facilita la dissociazione elettrolitica del joduro formatosi noi otteniamo appunto lo scopo di eliminarlo: dal sistema joduro di etile, solfuro d'etile e joduro solfinico passiamo all'altro joduro d'etile, solfuro d'etile, iodione e trietilsolfonione, così il joduro solfinico o non ci sarà più o in alcuni casi ci sarà in quantità minore: in questo modo del nuovo composto potrà formarsi e la velocità sarà maggiore.

« Considerazioni analoghe a queste esposi brevemente nel mio lavoro già citato per spiegare l'azione acceleratrice dell'acqua sulla formazione del joduro di trietilsolfina, l'acqua non scioglie i prodotti che reagiscono, scioglie e dissocia elettroliticamente il prodotto della reazione.

« Anche prescindendo dalle relazioni che si potessero trovare tra la dissociazione elettrolitica effettuata dai solventi e la loro azione acceleratrice, questo mio studio sarà sempre un contributo ad una delle questioni più interessanti della Chimica fisica attuale; cioè se e come si mantenga nei vari solventi neutri la conducibilità di quelle sostanze che conducono allorchè sono sciolte nell'acqua e se valgono per essi quelle importantissime leggi stabilite da Arrhenius, Ostwald, Nernst sul valore limite verso cui tendono le conducibilità molecolari degli elettroliti. Fra tutte importantissima è la verifica della legge della diluizione, la quale costituisce il più sorprendente ravvicinamento tra la teoria delle soluzioni diluite e la teoria dei gas. Già disse il Nernst ⁽¹⁾ che per mezzo di simili ricerche era principalmente da sperarsi di giungere a conoscere l'essenza della dissociazione elettrolitica.

« In questa questione esistono alcuni lavori di Vicentini, Cattaneo, Fitzpatrik, Kablukoff, fatti qualche anno fa, ma che non portarono un contributo diretto alla questione sopra accennata.

« In questo anno, quando le mie ricerche erano pressochè ultimate, comparve ⁽²⁾ un lavoro di Völlmer il quale studiando la conducibilità elettrica di

⁽¹⁾ Nernst, *Theoretische Chemie*, pag. 314.

⁽²⁾ B. Völlmer, *Die electrische Leitfähigkeit von einigen Salzen in Aethyl- und Methylalkool*. Wied. Ann. Bd. LII, pag. 328, anno 1894.

alcuni sali nell'alcool etilico e metilico, trovò che la conducibilità molecolare è sempre minore che nell'acqua, è assai più grande in soluzione nell'alcool metilico che nell'etilico e con l'aumentare della diluizione si avvicinava ad un limite. Calcolò questi limiti cioè μ_{∞} per estrapolazione, e poté stabilire che la legge della diluizione non si verifica: solo in qualche caso, come implicitamente ammette l'Ostwald, si ha una prima approssimazione di essa. In base a esperienze di Wölfer sopra i punti di ebullizione di alcune soluzioni alcooliche potè comparare i valori di i per i sali da lui studiati, e trovò che, sopra sette, solo per tre si avevano valori concordanti. Völlmer crede che si possa affermare con sicurezza che con l'aumentare del peso molecolare del solvente la conducibilità limite diventa più piccola. Sopra questo lavoro avrò occasione di ritornare.

« A. Schlamp ⁽¹⁾ si propose direttamente la questione del confronto fra i valori di i , e esaminò ebullioscopicamente alcuni sali in soluzione nell'acqua e nell'alcool propilico, e la conducibilità elettrica delle soluzioni propiliche; calcolò per estrapolazione il valore di μ_{∞} , ma non si occupò di verificare la legge della diluizione. Per i valori di i trovò notevoli disaccordi, e sempre nel senso che i punti di ebullizione conducono a numeri che non accennano a dissociazione, mentre la conducibilità elettrica porterebbe ad ammetterla e assai progredita. Anche su questo lavoro avrò occasione di ritornare.

« Mejer Wildermann ⁽²⁾, ricercando se il metodo di Kohlrausch è applicabile alle soluzioni di sostanze assai poco dissociate, e stabilendo poi per queste un metodo più esatto, ebbe occasione di esaminare le soluzioni in alcool etilico, non determinò i valori di μ_{∞} , ma indirettamente come dirò, cercò di dimostrare mantenersi in alcuni casi la legge della diluizione in altri no.

« Nelle mie ricerche ho adottato senza modificazioni il metodo di Kohlrausch. I solventi vennero tutti purificati con cure speciali e deacquificati sulla calce, sull'ossido di bario ripetutamente e per alcuni si usò il solfato di rame anidro ed il sodio. Per ognuno venne determinato il peso specifico ed esattamente il punto d'ebullizione. — Venne tenuto conto della piccola conducibilità dell'acqua; e si mostrò, sia determinandola direttamente, sia determinando la conducibilità di miscuglio equimolecolare di joduro d'etile e solfuro d'etile in soluzione nei vari solventi, la piccolissima conducibilità propria del solvente.

⁽¹⁾ A. Schlamp, *Zur Dissociationstheorie der Lösungen*. Zeitschrift für physikalische Chemie. Bd. XIV, pag. 972, fascicolo uscito il 15 giugno 1894.

⁽²⁾ Zeitschrift für physikalische Chemie, XIV 2°, pag. 231.

Valori di μ	Acqua		Alcool metilico		Alcool etilico		Alcool propilico		Alcool isopropil.		Alcool isobutilico	Alcool isoamilico	Trimetil-carboni	Alcool allilico		Alcool benzilico	Acetone	
	μ_{v1}	μ_v	μ_{v1}	μ_v	μ_{v1}	μ_v	μ_{v1}	μ_v	μ_{v1}	μ_v				μ_{v1}	μ_v		μ_{v1}	μ_v
μ 8	81,80	—	—	15,07	1,163	5,59	4,10	1,187	1,84	—	—	13,54	1,162	2,54	—	—	—	—
" 16	84,68	1,035	60,23	17,52	1,199	6,31	4,87	1,220	2,35	0,88	—	15,73	1,165	2,28	46,19	—	—	—
" 32	88,32	1,043	70,00	1,162	20,94	1,218	7,70	1,231	5,94	1,00	—	18,32	1,239	2,27	59,23	1,282	—	—
" 64	93,53	1,058	79,00	1,128	25,51	1,204	9,48	1,243	7,13	1,185	—	22,70	1,185	2,49	73,40	1,239	—	—
" 128	97,66	1,044	88,26	1,117	30,71	1,157	11,57	1,220	8,86	1,240	—	26,90	1,058	—	91,67	1,182	—	—
" 256	99,30	1,017	96,56	1,094	35,67	1,161	14,12	1,198	10,99	—	1,96	0,50	28,45	—	108,43	1,181	—	—
" 512	100,57	1,013	106,25	1,100	41,19	1,152	16,91	1,171	13,98	—	—	—	—	—	128,01	—	—	—
" 1024	101,60	1,010	120,39	1,138	47,33	1,149	19,81	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
" ∞	107,6	—	194,00	—	54,0	—	26,0	—	22,0	—	3,0	2,0	0,5	32,0	—	167	—	—

« Assieme ai valori di μ_v viene calcolato il valore del rapporto $\frac{\mu_{v1}}{\mu_m}$ cioè quelli di due conducibilità vicine per confrontarlo con quello $\sqrt{\frac{v_1}{v}}$ che nel mio caso è $\sqrt{2} = 1.414$.

« Dall'esame della tabella appare un fatto assai strano e fino ad ora mai osservato, e cioè che nell'alcool metilico e nell'acetone per le soluzioni più diluite si ha una conducibilità maggiore che in soluzione acquosa, mentre per concentrazioni più forti avviene il contrario.

« Riguardo alla correlazione tra l'attitudine dei solventi a dissociare elettroliticamente le sostanze disciolte e ad accelerare le reazioni che avvengono in essi si può in prima approssimazione dire che si tratta di proprietà correlative, almeno in base alle mie esperienze ed a quelle del Menschutkin, come si può vedere dalla seguente tabella. Le anomalie probabilmente sono dovute alla diversità delle temperature.

SOLVENTI	Valori di μ a 25°				Valori delle AC a 100°	
	μ_{256}	μ_{512}	μ_{1024}	μ_{∞}	Carrara IS(C ₂ H ₅) ₂	Menschutkin IN(C ₂ H ₅) ₄
Alcool metilico . .	96,56	106,25	120,39	134	0,0929	0,0516
" etilico . . .	35,67	41,19	47,33	54	0,0146	0,0366
" propilico . .	14,12	16,91	19,81	26	0,0084	—
" isopropilico	10,99	13,98	—	22	—	—
" isobutilico .	$\mu_{128}=2,73$	—	—	3	0,00078	0,0258
" isoamilico .	1,96	—	—	2	0,00040	—
Trimetilcarbinol .	$\mu_{128}=0,5$	—	—	0,5	—	—
Alcool allilico . .	28,45	—	—	32	0,0297	0,0433
" benzilico . .	$\mu_{64}=2,49$	—	—	2,5	0,0587	0,133
Acetone	108,43	128,01	—	167	0,0015	0,0608

« Riguardo ai valori μ_{∞} esposti nella tabella, solo per l'acqua si tratta di un valore dedotto con sicurezza in base alla legge di Kohlrausch; per gli altri solventi dovetti accontentarmi di calcolarlo per estrapolazione. Tanto Völlmer che lo Schlamp ricorsero ad artifizi simili, e perciò si può esser certi che tanto i valori dati dai cennati autori quanto i miei non possono essere che numeri approssimati.

« In base al valore μ_{∞} venne fatta la verifica della formula $\frac{m^2}{v(1-m)} = K$ essendo $m = \frac{\mu}{\mu_{\infty}}$ ossia della importantissima legge della diluizione, la quale, come è noto, non si verifica affatto per le soluzioni acquose degli acidi e dei sali fortemente dissociati, come si potrà vedere nella seguente tabella. Per gli altri solventi diversi dall'acqua pochissimo o nulla era stato fatto fin qui. Völlmer asserì che la legge non si verificava per soluzioni in alcool metilico ed etilico. Anche per le soluzioni in alcool propilico Schlamp trovò un comportamento del tutto analogo.

« Wildermann non si occupò affatto di calcolare i valori di μ_{∞} e ricorse ad un metodo indiretto per vedere se si verificava la legge della diluizione. Questo metodo che io non credo abbastanza giustificato per ragioni che ho esposto nella Memoria dalla quale questa Nota viene estratta e che qui troppo lungo sarebbe esporre, consiste nel confrontare l'andamento del rapporto $\frac{\mu_{v_1}^2}{\mu_v^2}$ con $\frac{v_1}{v}$ (essendo $v_1 > v$). Secondo Wildermann, per soluzioni concentrate e dove la sostanza è poco dissociata, $\frac{\mu_{v_1}^2}{\mu_v^2}$ dovrebbe differire di poco da $\frac{v_1}{v}$; e per le soluzioni più diluite a dissociazione più progredita i valori $\frac{\mu_{v_1}^2}{\mu_v^2}$ differiranno sempre più dai valori $\frac{v_1}{v}$ e cioè saranno sempre più piccoli. Egli trovò che ciò si avverava per l'acido tricloroacetico in soluzione alcoolica, mentre per l'acido dicloroacetico il rapporto $\frac{\mu_{v_1}^2}{\mu_v^2}$ è maggiore assai del rapporto $\frac{v_1}{v}$, il che non si può accordare con la legge della diluizione. Wildermann però non accennò alla questione che incidentalmente perchè si proponeva tutt'altro scopo.

« Ecco ora riunito nella tabella seguente i valori di m e di K da me calcolati:

V	Acqua		Alcool metilico		Alcool etilico		Alcool propilico		Alcool isopropilico		Alcool allilico		Acetone	
	m	K	m	K	m	K	m	K	m	K	m	K	m	K
16	0,787	0,181	0,449	0,0228	0,824	0,0097	0,243	0,0048	0,221	0,0039	0,491	0,0292	0,276	0,0066
32	0,821	0,117	0,522	0,0178	0,889	0,0076	0,296	0,0039	0,270	0,0031	0,572	0,0239	0,355	0,0061
64	0,869	0,090	0,589	0,0132	0,472	0,0086	0,365	0,0033	0,342	0,0024	0,709	0,0269	0,439	0,0054
128	0,908	0,070	0,658	0,0099	0,569	0,0059	0,445	0,0028	0,403	0,0021	0,840	0,0344	0,549	0,0052
256	0,923	0,043	0,721	0,0073	0,661	0,0050	0,543	0,0025	0,500	0,0019	0,889	0,0278	0,649	0,0047
512	0,935	0,026	0,793	0,0059	0,763	0,0048	0,650	0,0024	0,635	0,0021	—	—	0,766	0,0049
1024	0,944	0,015	0,898	0,0077	0,877	0,0061	0,762	0,0024	—	—	—	—	—	—

« Per ciò che riguarda le relazioni tra il rapporto $\frac{\mu_{v1}}{\mu_v}$ e $\sqrt{\frac{v_1}{v}}$ per nessuna delle soluzioni da me esaminate si ha il fatto che $\frac{\mu_{v1}}{\mu_v} > \sqrt{\frac{v_1}{v}}$. I valori $\frac{\mu_{v1}}{\mu_v}$ per ogni soluzione variano assai poco fra di loro e per il solito senza regola alcuna. Quanto ai valori di K la legge non è affatto applicabile per le soluzioni acquose, come già si sapeva; per le soluzioni in alcool metilico siamo ancora assai lontani dalla costanza, ma nondimeno le variazioni non sono per diluizioni più forti, cioè da μ_{32} in avanti, che nel rapporto di 1 : 2.25, mentre nelle esperienze del Völlmer citate dall'Ostwald nel suo classico trattato e per le quali egli dice che la legge è: *nur in erster Annäherung gültig*, sono nel rapporto di 1 : 2.28. Per gli altri solventi, non escluso l'acetone, si può dire che la legge è applicabile: certo i numeri non sono dei migliori, ma bisogna tener conto che il metodo adottato non è il più esatto che poteva adoperarsi; che la preparazione di solventi organici purissimi è assai meno sicura che la purificazione dell'acqua e più di tutto che i valori di μ_∞ non si possono considerare, per il modo col quale sono stati calcolati, che quali numeri approssimati. Tenuto conto di tutto questo mi pare che si possa ritenere dimostrato che la legge della diluizione si applica anche a solventi differenti dall'acqua.

« Se osserviamo i valori di m i quali dovrebbero indicare il grado di dissociazione, dovremmo concludere che il joduro solfinico è fortemente dissociato nei vari solventi, quasi ugualmente in tutti per diluizioni forti, ed allora poco meno che nell'acqua quantunque i valori di μ_∞ sieno differentissimi fra loro; ma qui si presenta il problema: si può dalla conducibilità molecolare dedurre il grado di dissociazione trattandosi di solventi diversi dall'acqua? Ho cercato di risolvere la questione esaminando a quali risultati si giungeva col metodo ebullioscopico; ma stante la facile decomponibilità del composto per azione del calore non ho potuto sperimentare che sulle soluzioni in quei liquidi che bollono a temperatura più bassa e cioè alcool metilico, alcool etilico, e acetone. Ecco i risultati ottenuti.

Solvente.	Concentrazione.	Innalzamento termico.	Coefficiente d'innalzamento.	Innalzamento molecolare per JS(C ₂ H ₅) ₂ .	Innalmento teorico.
Alcool metilico	4,283	0,19	0,044	10,82	9,2
„	8,009	0,34	0,042	10,33	„
Alcool etilico	2,814	0,12	0,042	10,38	11,5
Acetone	3,257	0,22	0,067	16,48	16,7
„	4,958	0,295	0,597	14,68	„

« Sembrerebbe che i numeri non lasciassero dubbio in proposito e che la sostanza non fosse affatto dissociata; però si deve osservare che le concentrazioni sono assai forti, circa il doppio e anche più di quello che si richiede per $v = 8$; che gli innalzamenti termometrici sono assai piccoli; d'altra parte le esperienze sono state fatte a temperatura più elevata e perciò la dissociazione con tutta probabilità dovrebbe essere aumentata, ed il fatto di ottenere numeri così vicini al normale lascia sorgere dubbi fondati che la teoria della dissociazione elettrolitica non vada qui d'accordo con ciò che si deduce dalla applicazione delle leggi di Van t'Hoff. Su questo però mi propongo di ritornare usando metodi nella determinazione del peso molecolare, i quali non sieno sottoposti a tante cause d'errore, per esempio l'abbassamento della tensione di vapore eseguendolo alla temperatura di 25° .

« Io credo, però tenuto conto di tutto, che non sempre sia giusto dopo aver dedotto il valore di μ_{∞} di calcolare i valori di m , anche quando bene inteso le μ_v abbiano un andamento tale che accenni ad un limite e che le variazioni per soluzioni estremamente diluite sieno tali da autorizzare l'estrapolazione; anche quando poi coi numeri adottati si abbia la costanza nei valori di K .

« Mi sembra ben possibile che in certi determinati casi, soltanto una parte delle molecole subisca la dissociazione elettrolitica anche per diluizioni infinitamente grandi, e che l'equilibrio si stabilisca tra un certo numero di molecole dissociate e forse anche di molecole più complesse: si spiegherebbero così le divergenze tra i valori di i dedotti dai metodi crioscopici ed ebullioscopici e le forti differenze tra i valori di μ_{∞} . La determinazione dei valori di μ_{∞} con metodi indipendenti da quelli di μ_v potrà decidere la questione a cui ho accennato.

« Quanto all'ipotesi di Völler che con l'aumentare del peso molecolare del solvente la conducibilità limite diventa più piccola non è giustificata; al più potrà avverarsi ove non si comparino che termini omologhi di una serie. Facendo il rapporto dei valori di μ_v per una stessa diluizione fra i vari solventi si vedono esistere delle relazioni, quali per esempio una certa costanza per le varie concentrazioni e per uno stesso aumento nella molecola. Questa costanza si estende ai casi di isomeria e fa pensare alla possibilità, quando gli studi sieno opportunamente estesi, di poter prevedere la conducibilità molecolare di una sostanza nei vari solventi.

« Se si paragonano le costanti dielettriche ed i coefficienti di attrito interno dei vari solventi con le conducibilità molecolari μ_v per diluizioni molto forti, si vede esistere una perfetta correlazione senza però arrivare alla relazione quantitativa che lo Schlamp aveva fatto notare

$$\frac{\mu_{\infty} \text{ (alcool etilico)}}{\mu_{\infty} \text{ (alcool propilico)}} = \frac{\text{attrito interno (alcool propilico)}}{\text{attrito interno (alcool etilico)}}$$

perchè i rapporti della conducibilità sono assai maggiori dei rapporti dei coefficienti di attrito ».

SOLVENTI	Coefficienti d'attrito a 20°	Costanti dielettriche	Valori di μ			
			μ_{250}	μ_{312}	μ_{1024}	μ_{∞}
Acqua	56,2	—	99,30	100,57	101,60	107,6
Alcool metilico . .	68,9	35,364	96,56	106,25	120,39	134
„ etilico	34,4	26,493	35,67	41,19	47,33	54
„ propilico nor.	125,7	22,472	14,12	16,91	19,81	26
„ isopropilico .	137,1	—	10,99	13,98	—	22
„ isobutilico. .	227,4	18,739	—	—	—	3
„ isoamilico. .	251,6	16,673	1,96	—	—	2
„ allilico. . . .	92	—	28,45	—	—	32
Acetone	22	—	108,43	128,01	—	167

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario BLASERNA presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste l'opera del Socio straniero NOETHER e del dott. BRILL, intitolata: *Sviluppo della teoria delle funzioni algebriche in tempi recenti e antichi*.

Il Socio CAPELLINI fa omaggio del suo lavoro a stampa: *Rinoceronti fossili del Museo di Bologna*.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Segretario BLASERNA dà comunicazione di una lettera del Socio generale FERRERO, il quale rappresentò l'Accademia in Berlino alla celebrazione del centenario della nascita del Socio straniero generale von BAEYER, lettera contenente una descrizione della anzidetta solennità scientifica. Lo stesso Segretario partecipa anche i ringraziamenti del nuovo Socio straniero A. von BAEYER, per le onoranze che, nella occasione sopra accennata, l'Accademia volle tributare a suo padre.

Essendo usciti di carica il Segretario ed il Segretario della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, a termini degli articoli 4 e 14 dello Statuto accademico, si procede alle nuove elezioni.

Fatto lo spoglio dei voti dai Soci GEMMELLARO e DINI, il Presidente proclama il risultato della votazione che è il seguente:

Per la elezione del Segretario:

Votanti 15 — BLASERNA 14; TOMMASI-CRUDELI 1
Eletto BLASERNA (riconferma).

Per la elezione del Segretario aggiunto:

Votanti 15 — TOMMASI-CRUDELI 14; TACCHINI 1
Eletto TOMMASI-CRUDELI (riconferma).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 dicembre 1894.

Baratta M. — Intorno ai recenti fenomeni endogeni avvenuti nella regione etnea. Roma, 1894. 8°.

Capellini G. — Rinoceronti fossili del Museo di Bologna. Bologna, 1894. 8°.

Comes O. — Relazione sulla coltivazione sperimentale dei tabacchi nel regno durante la campagna 1893. Napoli, 1894. 4°.

Ginzel F. K. — Ueber einen Versuch, das Alter der vedischen Schriften aus historischen Sonnenfinsternissen zu bestimmen. Prag, 1894. 8°.

Mazzarella G. — Sulla localizzazione delle macchie solari. Catania, 1894. 4°.

Noether M. e Brill A. — Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. Berlin, 1893. 8°.

Processo verbale delle sedute della Commissione geodetica italiana tenute in Bologna nei giorni 31 marzo e 1° aprile 1894. Firenze, 1894. 4°.

Sclavo A. — Di un nuovo apparecchio per la raccolta del siero di sangue (M.° dell'Interno). Roma, 1894. 4°.

Id. e Mannelli C. — Sulle cause che determinano nella pratica delle disinfezioni la scomparsa del Mercurio dalle soluzioni di sublimato corrosivo (M.° dell'Interno). Roma, 1894. 4°.

P. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 dicembre 1894.

A. MESSEDAGLIA Vicepresidente

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche.* Nota di DAVIDE BESSO, presentata dal Socio BELTRAMI.

« L'equazione differenziale lineare del terz'ordine soddisfatta dalle forme quadratiche di due integrali fondamentali dell' ipergeometrica del second'ordine

$$x(1-x)y'' + (f+gx)y' + hy = 0 \quad \text{I}$$

è anch'essa, in alcuni casi, ipergeometrica, o riducibile a tale quando la funzione incognita sia moltiplicata pel prodotto di una potenza di x per una potenza di $1-x$. Questi casi sono esaminati nella presente Nota, e ne sono fatte alcune applicazioni.

I.

« 1. Trasformando la I colla sostituzione

$$y = x^{-\frac{1}{2}f} (1-x)^{\frac{1}{2}f_1} Y \quad (1)$$

in cui è

$$f_1 = f + g$$

e ponendo

$$a = -\frac{1}{4}g^2 - \frac{1}{2}g - h, \quad b = h - f - \frac{1}{2}fg, \quad c = \frac{1}{2}f - \frac{1}{4}f^2$$

$$P = ax^2 + bx + c, \quad \varrho = \frac{P}{x^2(1-x)^2}$$

essa diviene

$$Y'' + \varrho Y = 0 \quad \text{I'}$$

« L'equazione differenziale lineare del terz'ordine soddisfatta dai prodotti di due soluzioni della I' è

$$Z''' + 4qZ' + 2q'Z = 0$$

ossia

$$x^3(1-x)^3Z''' + 4x(1-x)PZ' + (4P(2x-1) + 2x(1-x)P')Z = 0 \quad \text{II}$$

e questa colla sostituzione

$$Z = x^\lambda (1-x)^\mu U \quad (2)$$

si trasforma nella

$$x^3(1-x)^3U''' + 3x^2(1-x)^2(\lambda - (\lambda + \mu)x)U'' + x(1-x)M_2U' + M_3U = 0 \quad \text{II'}$$

in cui è

$$M_2 = 3\lambda_1(1-x)^2 - 6\lambda\mu x(1-x) + 3\mu_1x^2 + 4P$$

$$M_3 = \lambda_2(1-x)^3 - 3\lambda_1\mu x(1-x)^2 + 3\lambda\mu_1x^2(1-x) - \mu_2x^3 + 4P(\lambda - 1 - (\lambda + \mu - 2)x) + 2P'x(1-x)$$

$$\lambda_1 = \lambda(\lambda - 1), \quad \mu_1 = \mu(\mu - 1), \quad \lambda_2 = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2), \quad \mu_2 = \mu(\mu - 1)(\mu - 2).$$

« E dalle (1) (2) risulta che ogni soluzione della II' è eguale al prodotto di

$$x^{-\lambda+f}(1-x)^{-\mu-f_1}$$

per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« 2. Ora, perchè la II' sia della forma

$$x^2(1-x)U''' + x(B_1 - A_1x)U'' + (B_2 - A_2x)U' - GU = 0 \quad \text{III}$$

dev'essere M_2 divisibile per $1-x$ ed M_3 divisibile per $x(1-x)^2$.

« I polinomi M_2 ed M_3 sono divisibili rispettivamente per $1-x$ e per $(1-x)^2$ quando siano soddisfatte le tre equazioni

$$3\mu^2 - 3\mu - 2f_1 - f_1^2 = 0 \quad (3)$$

$$(\mu - 1)(\mu^2 - 2\mu - f_1^2 - 2f_1) = 0 \quad (4)$$

$$3\lambda\mu_1 + 3\mu_2 + (2a + b)(4\mu - 2) - (f_1^2 + 2f_1)(\lambda + \mu - 2) = 0 \quad (5)$$

le quali, escluso il caso di $h = 0$, hanno le soluzioni comuni

$$a) \quad f_1 = f + g = -2, \quad \mu = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad h = 2 + g;$$

$$b) \quad f_1 = -\frac{3}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2};$$

$$c) \quad f_1 = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}.$$

« Coi valori a) si ottiene

$$\frac{M_2}{1-x} = (3\lambda_1 - 8 - 6g - g^2) - (3\lambda_1 - 8 - 6g - g^2 + 6\lambda\mu)x,$$

$$\frac{M_3}{(1-x)^2} = (\lambda - 1)(\lambda - g - 4)(\lambda + g + 2)(1-x) + (g^2 + 6g + 8 - 3\lambda(\lambda - 1))\mu x,$$

e prendendo

$$\lambda = \begin{cases} 1 \\ g+4 \\ -g-2 \end{cases}$$

risulta

$$\frac{M_3}{x(1-x)^2} = (g^2 + 6g + 8 - 3\lambda(\lambda - 1)) \mu.$$

« Dunque, quando abbiano luogo le due relazioni

$$f + g = -2, \quad h = 2 + g,$$

la II' assume la forma

$$x^2(1-x)U''' + x(B_1 - A_1x)U'' + (B_2 - A_2x)U' - GU = 0 \quad \text{III}$$

in cui è

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 3(\lambda + \mu), \quad A_2 = 3\lambda(2\mu + \lambda - 1) - (g^2 + 6g + 8), \\ B_1 = 3\lambda, \quad B_2 = 3\lambda(\lambda - 1) - (g^2 + 6g + 8), \\ G = (3\lambda(\lambda - 1) - (g^2 + 6g + 8))\mu, \\ \lambda = \begin{cases} 1 \\ g+4 \\ -g-2 \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \end{array} \right.$$

ed ogni soluzione dell'ipergeometrica del terz'ordine III sarà eguale al prodotto di

$$x^{-g-2-\lambda}(1-x)^{2-\mu}$$

per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« È da osservare che, prendendo $\mu = 0$, si ha $G = 0$, e che, in conseguenza, la III è soddisfatta da $U = \text{costante}$. Risulta da ciò che la I, ossia la

$$x(1-x)y'' + (-2-g+gx)y' + (g+2)y = 0$$

ha due soluzioni il cui prodotto è eguale a $x^{\lambda+g+2}(1-x)^{-2}$, epperò essa possiede i due integrali fondamentali

$$(1-x)^{-1}, \quad x^{g+3}(1-x)^{-1},$$

per $g \geq -3$; e

$$(1-x)^{-1}, \quad (1-x)^{-1} \log x,$$

per $g = -3$.

« 3. Consideriamo ora gli altri casi in cui i polinomi M_2 ed M_3 sono divisibili rispettivamente per $1-x$ e per $(1-x)^2$.

« Coi valori $b) \quad f_1 = -\frac{3}{2}, \mu = \frac{1}{2}$, ed attribuendo a λ uno dei valori 1, f , $2-f$, si trova

$$\frac{M_3}{x(1-x)^2} = -\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda^2 - \lambda - f^2 - f - 4h),$$

e la II' avrà la forma III con

$$(\beta) \quad \begin{cases} A_1 = 3\lambda + \frac{3}{2}, & A_2 = 3\lambda^2 - 4h - f^2 - f, & \lambda = \begin{cases} 1 \\ f \end{cases} \\ B_1 = 3\lambda, & B_2 = 3\lambda(\lambda - 1) + 2f - f^2, & \\ G = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda^2 - \lambda - f^2 - f - 4h). \end{cases}$$

« Coi valori $c)$ $f_1 = -\frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$, si trovano ancora gli stessi valori per λ , e si giunge alla III in cui è

$$(\gamma) \quad \begin{cases} A_1 = 3\lambda + \frac{3}{2}, & A_2 = 3\lambda^2 - 4h - f^2 + f, & \lambda = \begin{cases} 1 \\ f \end{cases} \\ B_1 = 3\lambda, & B_2 = 3\lambda(\lambda - 1) + 2f - f^2, & \\ G = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda^2 - \lambda - f^2 + f - 4h). \end{cases}$$

« Dunque: Se $f + g$ è eguale a $-\frac{3}{2}$, ogni soluzione della III, le cui costanti sono date dalle (β) , è eguale al prodotto di $x^{f-\lambda}(1-x)$ per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« E se $f + g$ è uguale a $-\frac{1}{2}$, ogni soluzione della III, quando le sue costanti abbiano i valori (γ) , è eguale al prodotto di $x^{f-\lambda}$ per una forma quadratica di due integrali fondamentali della I.

« Segue da ciò:

1) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1-x)y'' + \left(f - \left(f + \frac{3}{2}\right)x\right)y' + hy = 0,$$

moltiplicati per $1-x$, sono le soluzioni dell'ipergeometrica del terz'ordine.

$$\begin{aligned} & x^2(1-x)U''' + x\left(3f - \left(\frac{3}{2} + 3f\right)x\right)U'' + \\ & + (2f^2 - f - (2f^2 - f - 4h)x)U' - (f + 2h)(1 - 2f)U = 0. \end{aligned}$$

2) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1-x)y'' + \left(f - \left(f + \frac{1}{2}\right)x\right)y' + hy = 0$$

sono le soluzioni della

$$\begin{aligned} & x^2(1-x)U''' + x\left(3f - \left(3f + \frac{3}{2}\right)x\right)U'' + \\ & + (2f^2 - f - (2f^2 + f - 4h)x)U' - 2h(1 - 2f)U = 0 \end{aligned}$$

« 4. Se nella I si effettua la sostituzione $x = 1 - t$, essa diviene

$$t(1-t) \frac{d^2 y}{dt^2} + (-f-g+gt) \frac{dy}{dt} + hy = 0$$

« E dal teorema dimostrato al N. 3 risulta:

1) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{3}{2} + gx\right)y' + hy = 0,$$

moltiplicati per x , sono le soluzioni della

$$t^2(1-t) \frac{d^3 U}{dt^3} + t(B_1 - A_1 t) \frac{d^2 U}{dt^2} + (B_2 - A_2 t) \frac{dU}{dt} - GU = 0 \quad \text{III}'$$

in cui è

$$A_1 = -3g - 3, \quad A_2 = 2g^2 + 7g - 4h + 6,$$

$$B_1 = -3g - \frac{9}{2}, \quad B_2 = 2g^2 + 7g + 6 \quad G = (4h - 2g - 3)(g + 2).$$

2) I prodotti di due soluzioni della

$$x(1-x)y'' + \left(\frac{1}{2} + gx\right)y' + hy = 0$$

sono le soluzioni della III', in cui è

$$A_1 = -3g, \quad A_2 = 2g^2 + g - 4h,$$

$$B_1 = -3g - \frac{3}{2}, \quad B_2 = 2g^2 + 3g + 1, \quad G = 4h(g + 1).$$

« 5. Se la I. si trasforma colla sostituzione $4x(1-x) = \xi$, e nell'ipotesi che sia

$$g + 2f = 0,$$

si ottiene la

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + (f' + g'\xi) \frac{dy}{d\xi} + h'y = 0,$$

con

$$f' = f, \quad f' + g' = -\frac{1}{2}, \quad h' = \frac{1}{4}h.$$

« Risulta da ciò, e da quanto è stato dimostrato al N. 3, che, nell'ipotesi fatta, i prodotti di due soluzioni della I sono le soluzioni della

$$\xi^2(1-\xi) \frac{d^3 U}{d\xi^3} + \xi(B_1 - A_1 \xi) \frac{d^2 U}{d\xi^2} + (B_2 - A_2 \xi) \frac{dU}{d\xi} - GU = 0 \quad \text{III}''$$

in cui è

$$A_1 = 3f + \frac{3}{2}, \quad A_2 = 2f^2 + f - h,$$

$$B_1 = 3f, \quad B_2 = 2f^2 - f, \quad G = h\left(\frac{1}{2} - f\right).$$

II.

« 6. L'integrale ellittico completo di prima specie di modulo k , e quello corrispondente al modulo complementare, sono, come è noto, due integrali fondamentali della

$$k(1 - k^2) \frac{d^2 y}{dk^2} - (1 - 3k^2) \frac{dy}{dk} - ky = 0 ,$$

la quale, colla sostituzione $x = k^2$, si trasforma nell'ipergeometrica

$$x(1 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 - 2x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} y = 0 .$$

« Questa appartiene alla classe considerata al N. 5, e, in conseguenza, i prodotti di due sue soluzioni sono le soluzioni della III'' in cui è

$$A_1 = \frac{9}{2}, B_1 = 3, A_2 = \frac{13}{4}, B_2 = 1, G = \frac{1}{8}, \\ \xi = 4x(1 - x) = 4k^2(1 - k^2) .$$

« Ora quest'ipergeometrica del terz'ordine è soddisfatta, per mod. $\xi \leq 1$ dalla

$$F \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, \xi \end{matrix} \right)$$

in cui le a sono le radici della

$$a^3 + (3 - A_1)a^2 + (A_2 + 2 - A_1)a - G = 0 ,$$

e le b sono le radici della

$$b^2 + (1 - B_1)b + B_2 = 0 .$$

« Perciò, indicando con C_1, C_2, C_3 altrettante costanti, sarà

$$F \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 1, \xi \end{matrix} \right) = C_1 K^2 + C_2 K K_1 + C_3 K_1^2$$

con

$$k^2 = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \xi}}{2}$$

« Ma, quando ξ tende a zero, il primo membro ha per limite 1, e, prendendo il segno superiore nella formola di k^2 , K tende a $\frac{\pi}{2}$, mentre K_1 tende all'infinito; in conseguenza dev'essere

$$C_2 = C_3 = 0, C_1 = \frac{4}{\pi^2},$$

e la precedente relazione diviene

$$F \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1, 1, \xi \end{matrix} \right) = \frac{\pi^2}{4} K^2 ,$$

ossia

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \xi + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 \xi^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 \xi^3 + \dots =$$

$$\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots \right]^2$$

ove le variabili ξ e k sono legate dalla

$$k^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi}}{2}.$$

« 7. Il sig Laguerre ha trovata la formola

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{(1 - \xi^2 x^2 y^2 \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)})} = \frac{\pi}{2} K(\xi)$$

per mod. $\xi < 1$, sviluppando in serie la frazione $\frac{1}{1 - \xi^2 x^2 y^2}$, e integrando poi ciascun termine (1).

« In modo analogo si può dimostrare che è, per mod $\xi < 1$, ed anche per mod $\xi = 1$,

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{(1 - \xi^2 x^2 y^2 z^2) \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2)}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \sum_0^\infty \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}\right)^3 \xi^{2n};$$

dalla quale, e dalla relazione poc'anzi ottenuta, risulta

$$J = \frac{\pi}{2} K^2,$$

con

$$k^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - \xi^2}}{2}.$$

« Osservo anche che la serie trovata al n. 6 si deduce dalla

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \lambda^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \lambda^6 + \dots = \frac{2}{\pi} K(\lambda)$$

ponendovi $\lambda = \sqrt{\xi} \sin \theta$ e integrando, rispetto a θ , da 0 a $\frac{\pi}{2}$, vale a dire che è

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \xi + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 \xi^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 \xi^3 + \dots = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\lambda) d\theta.$$

« Sarà in conseguenza

$$\int_0^1 \frac{K(ax)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = K^2 \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a^4}}{2}} \right).$$

(1) Hermite, *Cours professé à la faculté des sciences de Paris*, 3^me édition 1887, pag. 85 e seg.

« 8. L'equazione considerata al n. 6

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} y = 0,$$

ossia la

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right) \frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{16} y = 0,$$

in cui essa si trasforma colla sostituzione $4x(1-x) = \xi$, è un caso particolare della

$$\xi(1-\xi) \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right) \frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{4} n(n+1) y = 0 \quad (a)$$

la quale, per n intero e positivo, posto $\xi = 1 - z^2$, è soddisfatta dalla funzione sferica $P_n(z)$.

« Ora, dal teorema dimostrato al n. 3, risulta che i prodotti di due soluzioni della (a) sono le soluzioni della

$$\xi^2(1-\xi) \frac{d^3 U}{d\xi^3} + \xi \left(3 - \frac{9}{2}\xi\right) \frac{d^2 U}{d\xi^2} + \left(1 - (3 - n(n+1))\xi\right) \frac{dU}{d\xi} + \frac{1}{2} n(n+1) U = 0,$$

la quale è soddisfatta, per $\text{mod } \xi < 1$, dalla serie

$$1 - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{1^3} \xi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2)^3} \xi^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2.3)^3} \xi^3 + \dots,$$

che, per n intero e positivo, si riduce ad un polinomio del grado n^{mo} .

« Osservando poi che la (a), con n intero e positivo, possiede i due integrali fondamentali

$$P_n(z) \text{ e } P_n(z) \log \frac{1+z}{1-z} + R_{n-1}(z),$$

in cui $R_{n-1}(z)$ significa una funzione intera del grado $(n-1)^{\text{mo}}$ ⁽¹⁾, il secondo dei quali tende all'infinito quando ξ tende a zero, e che è $P_n(1)=1$, si conchiude

$$P_n^2(z) = 1 - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{1^3} \xi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2)^3} \xi^2 - \dots + (-1)^n \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \frac{1.2 \dots 2n}{(1.2 \dots n)^3} \xi^n$$

ove le variabili sono legate dalla $z^2 = 1 - \xi$ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*. Zweite Auflage. Erster Band, pag. 96.

⁽²⁾ Integrando i due membri di quest'eguaglianza da 0 ad 1, ed applicando la formula di Legendre

$$\int_0^1 P_n^2(z) dz = \frac{1}{2n+1},$$

si ottiene

$$1 - \frac{1}{3} \frac{n(n+1)}{1^3} + \frac{1}{5} \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1.2)^3} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1.2 \dots 2n}{(1.2 \dots n)^3} = \frac{1}{2n+1}.$$

Matematica. — *Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari.* Nota di GINO FANO, presentata dal Socio CREMONA.

Matematica. — *Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari, che con queste curve si possono rappresentare.* Nota di G. FANO, presentata dal Socio CREMONA.

Queste due Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica terrestre. — *Sulla variazione della velocità di propagazione dei terremoti, attribuita alle onde trasversali e longitudinali.* Nota del dott. G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. TACCHINI.

« In due precedenti mie Note ⁽¹⁾ ho trattato della velocità di propagazione del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884. Nella 2^a di esse dedussi dai miei calcoli il valore di poco più di 3 km. al secondo, mentre nella prima si vede che, stando al dott. Cancani, la velocità varierebbe da 2,8 a 4,2 km. ⁽²⁾. Egli attribuisce tale ragguardevole differenza soltanto alla diversa natura delle onde sismiche, e precisamente la minor velocità alle onde da lui ritenute per le *trasversali* della teoria, e la maggiore a quelle *longitudinali*. Io non posso condividere questo modo di vedere del Cancani, non perchè io neghi la possibilità che si riscontrino anche nel nostro globo le onde trasversali e longitudinali, quali si considerano nello studio dell'elasticità dei corpi solidi indefiniti, ma perchè non mi sembra ancora sufficientemente conosciuta la loro maniera d'intervenire nei terremoti. Di più, temo che il Cancani abbia fatto confusione, come in altra circostanza già dissi, tra le onde trasversali, contemplate nella

⁽¹⁾ *Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. III, 2^o sem., pag. 303, seduta del 17 nov. 1894. — *Velocità superficiale di propagazione delle onde sismiche, in occasione della grande scossa di terremoto dell'Andalusia del 25 dicembre 1884.* Id., p. 317, seduta del 2 dicembre 1894.

⁽²⁾ *Sulle ondulazioni provenienti da centri sismici lontani.* Ann. dell'Uff. Centr. Met. e Geod. It., vol. XV, Parte 1^a, 1893, p. 13.

teoria e quelle che per mezzo di delicati strumenti noi vediamo propagarsi sulla superficie terrestre sotto forma di ondulazioni a lento periodo, che deflettono apparentemente la verticale in ciascun luogo del loro passaggio. È bensì vero che nei vari terremoti noi troviamo velocità diverse, secondo che nei diagrammi degli strumenti registratori si prenda il principio o la fase massima della perturbazione, come io stesso ho posto in evidenza nello studio dei terremoti di Zante del 1893; ma allo stato delle odierne cognizioni, mi sembra che non siano per anco dimostrate a sufficienza le asserzioni esplicite del Cancani. Ad ogni modo parmi di avere assodato che non può invocarsi neppure il terremoto andaluso come dimostrazione dell'esistenza delle due specie di onde contemplate nella teoria. E siccome in altra mia Nota ⁽¹⁾ dimostrai che nel terremoto della Grecia del 20 settembre 1867, propagatosi fino a Pulkowa, dovevasi ritenere più attendibile la velocità di 2,3 km. al secondo, invece di quella di 3,7 calcolata dal Cancani, così mi sembra che la tabella, dal medesimo riportata a pag. 22 del suo lavoro sopra citato, non possa più ora in alcun modo considerarsi come una prova del suo modo di vedere. Alla medesima conclusione io era già pervenuto nello studio che feci sulla velocità dei terremoti di Zante del 1893, poichè allora io trovai una velocità di circa 3 km. tanto per località abbastanza vicine alla Grecia, quali Mineo e Catania, dove la scossa fu intesa dalle persone, quanto per località assai più distanti, come Nicolaiew, Strasburgo e Potsdam, dove il movimento fu solo registrato da delicati strumenti.

« Il Cancani in una posteriore Nota ⁽²⁾, per togliere la contraddizione ch'io aveva rilevata tra le sue viste ed i risultati da me trovati per Zante, fa riflettere che a Mineo ed a Catania l'uomo ha avvertite le sole onde longitudinali, mentre gli strumenti di queste due località, al pari di quelli di tutte le altre più lontane (e tra essi i pendoli orizzontali di Nicolaiew e Strasburgo ed il magnetografo di Potsdam) avrebbero indicato il passaggio delle sole onde trasversali. Questa asserzione del Cancani, se giunge opportuna alle sue viste, resta d'altra parte ad essere dimostrata; e trattandosi di una questione d'importanza non comune per la sismologia, permetta il mio egregio collega ch'io risponda alla suddetta Nota, rilevando alcune difficoltà che si affacciano spontanee alla mente.

« Anzitutto, come mai gli strumenti di Catania e Mineo non sono stati in grado di registrare, in occasione dei terremoti di Zante, un movimento di suolo che fu risentito dall'uomo? E si noti che a Catania esisteva il sismometrografo Brassart a tre componenti, il quale, in seguito a lunga esperienza già fatta, per essere munito di corto pendolo con una massa di

(1) Rend. della R. Accad. dei Lincei, seduta del 6 maggio 1894, vol. III, 1° sem. p. 443.

(2) *Intorno ad alcune obbiezioni relative alla velocità di propagazione delle onde sismiche.* R. Accad. dei Lincei, vol. III, 2° sem., p. 30. 1° luglio 1894.

soli 10 kg., sarebbe stato senza dubbio più adatto ad essere influenzato dalle onde longitudinali che da quelle trasversali. Inoltre, i sismoscopi di Mineo sono di tale sensibilità che non v'è terremoto locale, inteso dalle persone, che non venga dagli stessi registrato: anzi, non di rado essi si scaricano in seguito a menome scosse locali, senza che le persone s'accorgano di nulla. Di più, poichè tanto nel terremoto d'Andalusia del 1884, quanto in quello della Liguria del 1887, è stato ormai assodato che il passaggio delle onde sismiche fu avvertito dall'uomo anche ad enormi distanze dall'epicentro, comparabili a quelle in cui rimasero perturbati alcuni magnetografi d'Europa, così è poco probabile il supporre che il movimento di suolo, che ha potuto agitare tali strumenti, sia stato diverso e posteriore a quello che si rese sensibile alle persone.

« Resta pure a spiegare come mai il magnetografo di Potsdam non abbia potuto risentire che le sole onde trasversali dei terremoti di Zante del 1893, mentre gli strumenti magnetici di Greenwich e Parigi ed ancora più quelli di Lisbona sarebbero stati influenzati, stando al Cancani, anche dalle onde longitudinali, provenienti dal terremoto andaluso del 1884. Il Cancani dice che gli apparecchi magnetici non sono capaci di sceverare le une dalle altre le differenti specie di onde⁽¹⁾; ma io non veggio la ragione perchè il principio delle perturbazioni riscontrate nei fotogrammi non debba esclusivamente corrispondere alle onde che marciano con maggiore velocità, quali sarebbero appunto le longitudinali. Tutto al più non si potrebbe riconoscere l'istante in cui cessano le longitudinali e quello in cui cominciano le trasversali, perchè in parte esse si possono sovrapporre; ma io confesso chiaramente di non arrivare a comprendere l'influenza delle onde trasversali nel diminuire la velocità calcolata in base all'arrivo di quelle longitudinali, il quale costituirebbe appunto il principio della perturbazione riscontrata negli strumenti.

« Se le onde longitudinali, stando al Cancani, sono le sole che producono gli effetti disastrosi sussultori e ondulatori, e le trasversali invece producono ondulazioni lente nel terreno, non avvertite dall'uomo ma rivelate sol-

(1) Ecco le testuali parole del Cancani a proposito delle velocità contenute nella 2ª metà della tabella, di sopra citata: « Per gli altri cinque casi (*relativi cioè al terremoto della Grecia del 1867 ed a quello d'Andalusia del 1884*) le distanze essendo state « minori (*di 3000 km.*) sono giunte sugli apparecchi registratori anche le onde longitudinali, e non essendo stati capaci questi apparecchi a sceverare le une (*trasversali*) dalle « altre (*longitudinali*), la velocità che se ne è ricavata non spetta nè alle onde trasversali, « nè alle longitudinali, ma è un valore intermedio. Negli ultimi quattro esempi della « tabella, che si riferiscono al terremoto di Andalusia, e nei quali i dati orari sono eccel- « lenti, si vede chiaramente come col diminuire la distanza, la velocità che si deduce va « crescendo, appunto perchè col diminuire la distanza si fa maggiormente sentire sugli « apparecchi l'effetto delle onde longitudinali ».

tanto da speciali strumenti, ed hanno inoltre la proprietà di giungere a distanze assai più grandi in confronto delle prime, io mi domando come mai non sia stato avvertito dall'uomo in Europa il terremoto del Giappone del 22 marzo 1894, mentre il Cancani ⁽¹⁾ ed il Grablovitz ⁽²⁾ riscontrano nei diagrammi ottenuti in Italia, anzitutto le tracce dovute alle onde longitudinali e poi quelle prodotte dall'arrivo ben posteriore delle trasversali. E si noti che la grandezza delle tracce, attribuite alle onde longitudinali, non sono meno pronunciate di quelle che si possono ottenere in occasione di terremoti vicini che si rendono anche sensibili alle persone nel luogo stesso ove si trovano gli strumenti.

« Nei lavori testè citati, tanto il Cancani quanto il Grablovitz si sono mostrati così convinti di ritrovare nei terremoti le due specie di onde, che in base alla velocità di km. 5 per le longitudinali e di km. 2,5 per le trasversali, hanno voluto calcolare per il terremoto del Giappone del 22 marzo 1894 quale doveva essere l'ora in cui il medesimo era avvenuto all'epicentro. Come splendida conferma delle loro viste essi ottennero appunto dal calcolo un'ora abbastanza coincidente con quella osservata nel Giappone. Ma in seguito a notizie più sicure inviate dal sig. J. Milne, è risultato che tale coincidenza è soltanto illusoria, poichè i signori Cancani e Grablovitz hanno ritenuta l'ora del Giappone espressa in t. m. di Tokio, mentre in realtà essa è espressa in t. m. del 135° meridiano ad est da Greenwich, ciò che fa una differenza di quasi 20 minuti primi ⁽³⁾.

« Da ultimo credo opportuno ch'io spenda qualche parola intorno al terremoto di Charleston del 1886, nel quale il Cancani crede trovare una buona

(1) *Sugli strumenti più adatti allo studio delle grandi ondulazioni provenienti da centri sismici lontani.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. III, 1° sem., p. 551; seduta del 2 giugno 1894.

(2) *Sulle indicazioni strumentali del terremoto giapponese del 22 marzo 1894.* Id., vol. III, 2° sem., p. 61; 15 luglio 1894.

(3) Il Cancani desumendo dal diagramma di Rocca di Papa le ore 11^h 37^m e 12^h 6^m rispettivamente per il principio delle onde longitudinali e trasversali, si era basato sulla differenza di 29 minuti per calcolare l'ora 11^h 8^m (t. m. E. C.) all'epicentro. Ma la vera ora 11^h 27^m 47^s (t. m. E. C.), in cui il terremoto fu in realtà risentito a Tokio, è tanto discordante da quella calcolata che evidentemente cadono tutte le deduzioni del Cancani a sostegno della sua tesi.

È bensì vero che a Tokio la scossa principale fu preceduta, stando al Milne, da altra più lieve, e che nel diagramma di Rocca di Papa si riscontrano due gruppi distinti di onde longitudinali, precedenti rispettivamente di 35 e 20 minuti quelle trasversali. ma anche ammettendo che il 1° gruppo sia dovuto alla scossetta precedente e che il 2° gruppo (col principio a 11^h 52^m) sia quello realmente prodotto dalla grande scossa, e perciò da mettersi in relazione colle onde trasversali principiate a 12^h 6^m, ecco i risultati a cui porterebbe il calcolo, introducendo le ore 11^h 52^m e 12^h 6^m, nelle formole date dal Cancani. Per il tempo all'origine si avrebbe 11^h 38^m, ora posteriore di ben 10 minuti a quella di Tokio, nonostante che questa località si trovi ad una ragguardevolissima

conferma delle sue idee. Infatti egli così si esprime nel 1° de' suoi lavori qui citati: « Nell'importantissimo studio fatto dal Newcomb e Dutton (1) sul « terremoto di Charleston del 1886, che è uno dei migliori lavori che esistano, « specialmente per ciò che riguarda lo studio della velocità di propagazione, « essi ebbero per questa il valore di 5 chilom. a secondo. Le distanze che « essi presero in considerazione nel calcolare la velocità furono notevolmente « grandi, quindi potrebbe far meraviglia il valore così elevato di 5 chilome- « tri. Ma è da notare che in tutti i luoghi da cui essi ricevettero i dati « orarî, L'ONDULAZIONE SISMICA FU DI CARATTERE LONGITUDINALE E NON « TRASVERSALE; infatti in tutti quei luoghi il movimento fu avvertito dalle « persone, mentre le persone non si accorgono delle ondulazioni trasversali ». Ma avvi una circostanza assai importante, ignorata dal Cancani, ed è che tra le località più distanti, ove fu risentita la scossa dall'uomo, si trova anche Toronto (Canada), città situata a ben 1180 km. dall'epicentro. La scossa oltre a farsi distintamente sentire dalle persone a Toronto, non mancò di perturbare, benchè lievemente, gli strumenti magnetici del *Meteorological Office*. In ciò si ha un mezzo prezioso per verificare se realmente la velocità che si può calcolare in base all'ora ricavata dal magnetografo è metà di quella dedotta dal Dutton in base alle migliori ore, osservate personal-

distanza a sud dell'epicentro: per la distanza poi di quest'ultimo da Rocca di Papa verrebbe fuori un valore di 4200 km., che è appena metà del vero!

Ma altre ragioni basterebbero da sole a rendere poco attendibile l'ipotesi testè avanzata, vale a dire che il 1° gruppo di rapide oscillazioni sia dovuto esclusivamente alla prima lieve scossa. Infatti, l'intervallo di 15 minuti, riscontrato dal Cancani tra i due anzidetti gruppi di onde longitudinali è inferiore all'intervallo ($20^m \frac{1}{2}$) decorso a Tokio tra la prima scossa leggera e la grande successiva. Di più, a quest'ultima avendo fatto seguito, dopo circa 21^m , una terza scossetta, non si capisce perchè questa, al pari della prima, non abbia potuto lasciar traccia di sè nel diagramma di Rocca di Papa nella parte ove ancora persistono le onde a lento periodo. Del resto, queste due scossette secondarie, di cui l'una precede e l'altra segue la grande, dovettero essere entrambe relativamente di poca intensità se, registrate a Tokio, non lo furono del pari nella vicina Yokohama (*The Seism. Journ. of Japan.* vol. III, p. 86); è quindi poco probabile che soltanto la prima di esse abbia originato onde longitudinali così energiche da perturbare i nostri strumenti. Ma v'ha ancora di più. Dai bellissimi diagrammi, ottenuti dagli strumenti di Siena e Roma (*Coll. Rom.*) risulta all'evidenza che i due gruppetti, in questione, di rapide oscillazioni registrati a Rocca di Papa, non sono altro che due rinforzi nel movimento del suolo, il quale cominciato a $11^h 37^m$ ha perdurato con variabile intensità, ma senza interruzione, fino al sopraggiungere delle lente ondulazioni. Anzi dai diagrammi abbastanza concordanti tra loro di Siena e Roma, quantunque ricavati da strumenti diversi, risulta che il 1° rinforzo è alquanto più pronunciato del 2°. Ora come sarebbe ciò potuto avvenire se realmente il primo rinforzo fosse dovuto alle onde longitudinali della 1ª lieve scossa al Giappone, ed il 2° (il più debole) fosse causato dalle onde, pure longitudinali della grande scossa consecutiva?

(1) *The Charleston Earthquake* ecc. United States Geolog. Survey, Ninth Ann. Report, 1887-88.

mente in numerose località degli Stati Uniti, ore quest'ultime che il Cancani dice riferirsi al passaggio delle sole onde longitudinali. Nel lavoro del Dutton testè citato, l'ora del magnetografo di Toronto non solo non viene utilizzata nei vari calcoli sulla velocità, ma disgraziatamente non viene neppure riportata, sebbene se ne parli in parecchi punti, come a pag. 332, 339, 358, 370 e 488; anzi, a pag. 358 si dice perfino che essa è una tra le migliori ore possedute (1). Stando così le cose si pensò di scrivere direttamente a Toronto per avere l'ora esatta, relativa al terremoto di Charleston; e non è molto che il direttore di quel *Meteorological Office* si è compiaciuto rispondere che il principio della perturbazione, calcolato sui fotogrammi originali, corrisponde a $9^h 37^m 30^s$ (t. m. l.), ossia a $9^h 55^m 3^s$ espresse nel tempo del 75° meridiano ad W di Greenwich, tempo appunto adottato agli Stati Uniti. Ora poichè nella Relazione del Dutton si stabilisce, appoggiandosi all'ora esattissima di Charleston, che l'ora all'epicentro corrisponde a $9^h 51^m 6^s$, così se ne deduce che le onde sismiche impiegarono $3^m 57^s$ per percorrere 1180 km., quanti appunto se ne hanno dall'epicentro fino a Toronto; e così vien fuori una velocità di propagazione di quasi 5 km. esatti al secondo, vale a dire un valore che s'accorda perfettamente con quello ricavato dal Dutton in base alle numerose ore osservate dalle persone. Dunque gli strumenti magnetici di Toronto accusarono il passaggio delle stesse onde sismiche, risentite dall'uomo.

« Per dimostrare vieppiù che le onde longitudinali possano essere effettivamente registrate anche dai pendoli orizzontali e dai magnetografi, riporterò i seguenti fatti. In occasione del terremoto del Giappone del 22 marzo 1894, i pendoli orizzontali di Charkow e Nicolaiew in Russia diedero rispettivamente $11^h 34^m 30^s$ e $11^h 35^m 0^s$ (t. m. E. C.) per il principio della perturbazione, ore queste che s'accordano assai bene con quelle, pure relative al principio delle onde longitudinali, ricavate dai più sensibili sismometrografi italiani. E perfino nel magnetografo di Potsdam, forse a causa della sua squisita sensibilità, il principio della perturbazione risale a $11^h 45^m 44^s$ (t. m. E. C.), ora questa che difficilmente si potrebbe far corrispondere col principio delle successive onde a lento periodo, ritenute dal Cancani per le trasversali della teoria. — E similmente, in occasione dell'altro ancor più recente terremoto del 27 ottobre 1894, registrato in Europa, che sembra essere provenuto dall'Argentina, mentre il sismometrografo di Roma ed il microsismografo di Siena

(1) Infatti l'Osservatorio di Toronto, uno dei più importanti di tutto il globo può completamente rassicurare sulla bontà del tempo campione ivi posseduto. Di più, le perturbazioni si riscontrano distinte e col principio ben netto in tutti e tre gli strumenti, vale a dire nel declinometro, nel bifilare e nella bilancia di Lloyd, come si vede nelle stesse copie dei fotogrammi, che ci furono gentilmente inviate. Finalmente importa notare che il tempo è tracciato di due in due ore sulla stessa carta fotografica, la quale si muove colla ragguardevole velocità di 18^{mm} all'ora.

danno rispettivamente $22^h 7^m 35^s$ e $22^h 12^m 0^s$ (t. m. E. C.) per il principio del movimento, troviamo che i pendoli orizzontali di Charkow e Nicolaiew forniscono valori poco diversi, ossia rispettivamente $22^h 8^m 36^s$ e $22^h 12^m 6^s$ (t. m. E. C.). E poichè in quest'ultimo terremoto le oscillazioni a lento periodo (le trasversali del Cancani) si mostrano negli strumenti italiani circa una mezz'ora dopo, così bisogna concludere che anche i pendoli orizzontali furono capaci di registrare le onde longitudinali.

« La conclusione quindi è che nessuno dei terremoti fino ad oggi studiati si può portare come prova seria a sostegno del modo di vedere del Cancani. Io son certo che mediante i modernissimi strumenti si potrà in occasione di altri terremoti chiarire a sufficienza le idee, che ancora oggi si hanno poco chiare intorno al meccanismo delle onde sismiche, ben contento del resto se l'ipotesi così semplice del Wertheim, ripresa ora dal Cancani, potesse rendere plausibile spiegazione di tutti i fatti osservati. Dal canto mio, ripeto, io non dubito menomamente che nel centro di scuotimento di un terremoto possano originarsi le due specie di onde considerate nella teoria dei corpi elastici indefiniti; ma trattandosi nel caso nostro di urti che avvengono quasi sempre ad una relativamente debole profondità al di sotto della superficie terrestre, e perciò in seno ad una massa non indefinita e tutt'altro che omogenea, ho ragione di ritenere che sulla superficie terrestre si verifichino movimenti ben più complicati, anche perchè influenzati, come è probabile, dalla forza di gravità, quantunque essi possano ripetere la causa prima dalle onde longitudinali e trasversali della teoria.

« A tal proposito mi piace riportare un brano del Fouqué per far vedere appunto quanto ancora siano poco mature le nozioni che al giorno d'oggi si posseggono intorno alle onde longitudinali e trasversali, relative al nostro globo, sebbene fin dal tempo del Wertheim già s'intravedesse assai giustamente che esse potessero avere una parte non indifferente nella produzione dei fenomeni sismici. Il passaggio del Fouqué, che qui riporto, si riferisce appunto al terremoto dell'Andalusia del 1884 (1): « Chaque ébranlement souterrain produit
« des vibrations longitudinales, qui progressent rapidement et se transmettent
« à des grandes distances (Greenwich et Wilhelmshafen), et des vibrations transversales qui se propagent plus lentement et s'éteignent relativement très
« vite. Les premières sont celles qui déterminent le commencement du son, les
« secondes sont essentiellement la cause des destructions. Les observations
« citées de Greenwich et de Wilhelmshafen donnent 1600 (*metri al secondo*)
« pour la vitesse de propagation V des vibrations longitudinales, et la théorie

(1) *Relations entre les phénomènes présentés par le tremblement de terre de l'Andalusie et la constitution géologique de la région qui en a été la siège*. C. R., t. C, 1^{er} sem, 1885, p. 1116.

« analytique complétée par les expériences de M. Cornu permet d'en déduire, « pour la valeur v des vibrations transversales, une valeur de 923^m ».

« NOTA. — Ce chiffre de 1600^m est obtenu en prenant la différence des « distances des deux observatoires à l'épicentre et divisant cette différence « par le temps employé par les vibrations pour se transporter d'une station « à l'autre. On a choisi ces stations lointaines parce que les vibrations se « régularisent loin du centre d'ébranlement et que l'influence des vibrations « transversales cesse de se faire sentir » (1).

« Come si vede, il Cancani si trova proprio agli antipodi del Fouqué, per ciò che concerne il modo di comportarsi nei terremoti delle onde trasversali e longitudinali, contemplate nella teoria.

« Chiudo la presente Nota col fare alcune riflessioni sull'importanza che avrebbe l'esatta conoscenza delle proprietà delle due anzidette specie di onde per risolvere il problema della determinazione del centro di scuotimento (ipocentro) nei terremoti, seguendo il metodo di Falb, il quale, come si sa, è fondato sulla misura dell'intervallo di tempo nell'area epicentrale tra il momento d'arrivo del rombo e quello della scossa consecutiva. Chiamando con t il detto intervallo e con v e V le velocità rispettive delle onde trasversali e longitudinali, la profondità x dell'epicentro si calcola immediatamente colla formola:

$$x = t \frac{vV}{V - v}.$$

« Ora, per il terremoto dell'Andalusia del 1884, il valore di t essendo stato trovato in media di 5 secondi, come riferisce il Fouqué, e stando ai valori $v = 923$, $V = 1600$ metri, riportati dallo stesso autore nel brano sopra citato, si deduce senz'altro il valore di $x = \text{km. 11}$, che è assai vicino a quello calcolato nella Relazione italiana col noto metodo di Mallet. Ma se al contrario, si suppone che la velocità di 1600 metri, dedotta utilizzando i due soli dati orari delle località maggiormente distanti quali Greenwich e Wilhelmshaven, si riferisca non alle onde longitudinali, sibbene alle trasversali, seguendo le viste del Cancani, in tal caso, avendosi $v = 1600$ e $V = 2780$, x sarebbe uguale ad una ventina di chilometri. Finalmente, se alle onde trasversali si attribuisse la velocità di 2500 metri, già stabilita dal Cancani, x si avvicinerebbe ad una trentina di chilometri.

« Da tutto ciò parmi poter ragionevolmente concludere quanto poco attendibile sia il risultato al quale può oggi condurre il metodo del Falb; poichè oltre alla grande incertezza relativa alla misura dell'intervallo di tempo decorso tra il principio del rombo e quello della scossa successiva, regna ancora una grande confusione d'idee intorno alla vera natura delle due specie di onde sismiche che si vogliono considerare nei terremoti ».

(1) Le stesse idee si trovano a pag. 51 della Relazione francese.

Fisica terrestre. — *Sulle due velocità di propagazione del terremoto di Costantinopoli del 10 luglio 1894.* Nota del dott. A. CANCANI, presentata dal Socio TACCHINI.

« Nel volume XV (1893) degli *Annali dell'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica* fu pubblicata una mia Memoria *Sulle ondulazioni provenienti da centri sismici lontani*, le cui principali conclusioni erano le seguenti: 1° si debbono distinguere due specie di movimenti ondulatori emananti nel medesimo istante da un centro sismico; 2° le onde di una specie (che chiamo trasversali e che sono paragonabili a quelle della superficie del mare) ⁽¹⁾ si propagano con una velocità di chilometri 2,2 a 2,5 a secondo, le onde dell'altra specie (che chiamo longitudinali e che sono paragonabili a quelle del suono nell'aria), si propagano con una velocità presso a poco doppia.

« Dall'epoca della pubblicazione di quella Memoria fino ad oggi, parecchi sismologi hanno pubblicato degli studi sulle velocità di propagazione delle onde sismiche, ma o che essi non siano venuti a cognizione del lavoro mio sopra citato, o che, per qualunque ragione, non abbiano accettato le mie idee, non hanno tenuto conto della distinzione da me accennata. Soltanto il Grablovitz nella sua importante nota *Sulle indicazioni strumentali del terremoto giapponese del 12 marzo 1894* ⁽²⁾ ammette non solo le due differenti

(1) Le onde della superficie del mare sono chiamate generalmente trasversali. Vi è chi non ammette in tale caso questa locuzione perchè una particella d'acqua nel suo movimento non segue costantemente la normale alla direzione della propagazione, come avviene precisamente in una corda tesa, che venga scossa ad una estremità con un urto normale alla sua direzione. Io ho portato il paragone del movimento superficiale del mare, non perchè quel movimento sia in tutto e per tutto identico a quello della superficie terrestre, ma perchè meglio d'ogni altro si presta a dare un'idea del fenomeno.

(2) Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. III, 2° sem. serie 5ª, fasc. 2º. Colgo questa occasione per rettificare un errore in cui, per inesatte informazioni ricevute, incorsi nell'ultima mia Nota inserita in questi Rendiconti (seduta del 2 giugno 1894) in cui parlando di quel terremoto giapponese dissi che la scossa ebbe luogo a Tokio alle 7^h 27^m 49^s pom. t. m. di Tokio. Quest'ora deve riferirsi invece al 135° meridiano E da Greenwich e corrisponde alle 11^h 27^m 49^s t. m. E. C. Dal mio calcolo risultava che l'ora della scossa doveva essersi intesa nel Giappone alle 11^h 8^m t. m. E. C. Cadrebbe dunque l'accordo fra le deduzioni da me ricavate dal diagramma inserito nella Nota predetta ed il risultato dell'osservazione. Se non che per l'istesso mezzo con cui seppi che l'ora andava riferita al 135° meridiano E da Greenwich, seppi anche che appunto 20 minuti prima vi fu un'altra scossa nel Giappone, sebbene meno intensa. Io ritengo come cosa molto probabile che i due gruppi di piccole ondulazioni che si trovano nel diagramma suaccennato siano in relazione con quelle due scosse. La difficoltà che s'incontra nello assumere notizie sicure ed esatte da luoghi così lontani costituisce un immenso ostacolo nel nostro ordine di studi.

specie di movimenti ondulatori, ma le cifre stesse per le due velocità da me sopra citate, ed il Milne in un breve articolo ⁽¹⁾, in cui accenna al mio lavoro suddetto e non si mostra contrario alle mie idee, così esprime la sua opinione « I therefore imagine that the velocities of 2 or 3 kiloms. per second « refer to the propagation of a motion not unlike the swell upon an ocean ».

« Scopo della presente Nota, è di far vedere come i metodi d'osservazione perfezionati ed il progresso degli studi siano venuti a confermare sempre meglio le idee da me espresse nella Memoria citata. E per dimostrare ciò, mi varrò di un terremoto per il quale si sono potuti raccogliere numerosi dati da molti osservatori di prim'ordine italiani ed esteri.

« Il 10 luglio scorso un fortissimo terremoto ebbe il suo epicentro nelle vicinanze di Costantinopoli. Molti apparecchi destinati a scopi differenti e situati a grandissime distanze registrarono le ondulazioni del terreno e fornirono dati orari in gran parte eccellenti,

« Il Davison, raccolti molti di questi dati orari, ha fatto uno studio interessante sulla velocità di propagazione delle onde sismiche ⁽²⁾. Egli dispone di tre dati orari relativi a Costantinopoli, e cioè dell'ora fornita dal direttore di quell'imperiale Osservatorio meteorologico, e di quelle fornite dal Console generale inglese ed avute da due pendoli regolatori che trovavansi presso due differenti orologiai e che si fermarono al momento della scossa. Queste tre ore espresse in tempo medio di Costantinopoli, sono rispettivamente 12^h 24^m pom., 12^h 20^m 30^s e 12^h 21^m 45^s. Io ritengo che siano da accettare come più prossime al vero le ultime due, e fra queste la prima, per più ragioni. Anzi tutto perchè essendo fornite da due pendoli che si sono fermati, e quindi si sono potuti osservare con agio, è da escludere in esse un errore materiale di lettura facilissimo altrimenti a commettersi; in secondo luogo perchè essendosi tenuto conto in esse anche della frazione di minuto appariscono più attendibili, in terzo luogo perchè sono due ore quasi concordanti che stanno di fronte ad una terza notevolmente discordante, in quarto luogo perchè escludendo i dati orari di Costantinopoli, e combinando fra loro i dati orari di Nicolajew, Potsdam, Wilhelmshaven, Parc S. Maur e Kew, le quali stazioni è noto che sono solite fornir l'ora con precisione più o meno grande, si ottengono delle velocità per i rispettivi percorsi parziali che, come vedremo, combinano molto bene e fra loro e con quelle che si ottengono adottando le ore fornite dai due pendoli e specialmente dal primo, ma si accordano poco bene con quelle che risultano dall'ora fornita dall'Osservatorio meteorologico di Costantinopoli; in quinto luogo finalmente perchè accettando quest'ultim'ora e combinandola con quelle fornite dalle principali stazioni sismiche italiane, ed in ispecie con quella di Roma, il cui valore è indiscutibile, risulterebbe la velocità di pro-

(1) Seismological Journal, vol. III, pag. 89.

(2) « Nature » Thursday, september 6, 1894, p. 450.

pagazione di 18 chilometri a secondo, cifra questa che nello stato attuale della sismologia nessuno potrebbe seriamente ammettere, trattandosi specialmente di una distanza come quella che separa Roma da Costantinopoli, per la quale cioè non può avere influenza alcuna sensibile la profondità più o meno grande dell'epicentro.

« Le stazioni prese in considerazione dal Davison ed i risultati da lui avuti in base all'ora dell'Osservatorio meteorologico di Costantinopoli sono i seguenti

STAZIONI	Distanze dall'epicentro in chilometri	Intervallo di tempo in secondi	Velocità in chilometri per secondo
Bucharest	416	131	3,18
Nicolajew	707	156	4,53
Pola	1303	517	2,52
Potsdam	1742	504	3,46
Wilhelmshaven (declin.)	2097	595	3,52
" (bifil.)	"	655	3,20
" (Lloyd's bal.)	"	625	3,36
Utrecht	2185	540	4,05
Parc S. Maur.	2240	720	3,11
Kew	2518	780	3,23

Da questa tabella risulta il valore medio per la velocità $3,42 \pm 0,13$ km. a secondo. Ma il Davison nota che se si prendono le ore fornite dai due pendoli fermati si ottengono rispettivamente i valori medi 2,30 e 2,56 km. a secondo. Ed infatti coi dati orari dei due pendoli fermati ottengo la seguente tabella

STAZIONI	Differenza di tempo in secondi rispetto al pendolo A	Velocità che se ne deduce in chilometri a secondo	Differenza di tempo in secondi rispetto al pendolo B	Velocità che se ne deduce in chil. a secondo
Bucharest	341	1,2	266	1,6
Nicolajew	366	1,9	291	2,4
Pola	727	1,8	652	2,0
Potsdam	714	2,4	639	2,7
Wilhelmshaven (declin.)	805	2,6	730	2,9
" (bifil.)	865	2,4	790	2,6
" (Lloyd's bal.)	835	2,5	760	2,8
Utrecht	750	2,9	675	3,2
Parc S. Maur.	930	2,4	855	2,6
Kew	990	2,5	915	2,7

Da questa tabella si ottengono per la velocità i valori medi $2,26 \pm 0,16$ e $2,55 \pm 0,15$ km. a secondo.

« Per le ragioni già dette sono da accettare come più vicini al vero questi due valori.

« Ed infatti escludiamo del tutto i dati orari di Costantinopoli e combiniamo in tutti i modi possibili le ore delle stazioni sopra accennate come quelle che sono più attendibili e si ha la seguente tabella

STAZIONI	Differenze delle distanze dell'epicentro in chilometri	Differenze di tempo in secondi	Velocità nei percorsi parziali in chilom. a secondo
Nicolajew-Potsdam	1035	348	3,0
» Wilhelmshaven (decl.)	1390	439	3,2
» " (bifil.)	1390	499	2,8
» " (Lloyd's ball.)	1390	469	3,0
» Parc S. Maur	1533	564	2,7
» Kew	1811	624	2,9
Potsdam-Wilhelmshaven (decl.)	355	91	3,9
» " (bifil.)	355	151	2,4
» " (Lloyd's bal.)	355	121	2,9
» Parc S. Maur	498	216	2,3
» Kew	776	276	2,8
Wilhelmshaven (decl.) - Parc S. Maur	143	125	1,1
» Kew	421	185	2,3
» (bifil.) - Parc S. Maur	143	65	2,2
» Kew	421	125	3,3
» (Lloyd's bal.) - Parc. S. Maur.	143	95	1,5
» Kew	421	155	2,7
Parc S. Maur Kew	278	60	4,6

Da questa risulta per la velocità di propagazione il valore medio $2,75 \pm 0,19$ e questo è più prossimo a quelli (2,3 e 2,6) che si ottengono accettando le ore dei pendoli fermati, che a quello (3,4) che si ottiene in base all'ora dell'Osservatorio di Costantinopoli.

« Fra i due valori 2,3 e 2,6 poi è da preferire il primo perchè fra due orologi ugualmente ben regolati e che per una data scossa di terremoto si fermano ad ore differenti, il primo che si ferma indicherà evidentemente l'ora

più prossima al vero e quest'ora potrà essere affetta da un errore in più ma non da un errore in meno.

« Veniamo ora alla velocità che risulta dai dati orari forniti da cinque fra le migliori stazioni sismiche italiane e precisamente da Rocca di Papa, Roma, Siena, Firenze e Pavia.

STAZIONI	Distanze dell'epicentro in chilometri	Ora di arrivo delle prime ondulazioni	Differenze di tempo rispetto all'ora dell'Osservatorio di Costantinopoli	Velocità che se ne deduce in chilom. a secondo	Differenze di tempo rispetto all'ora del pendolo A	Velocità che se ne deduce in chilom. a secondo	Differenze di tempo rispetto all'ora del pendolo B	Velocità che se ne deduce in chilom. a secondo
Rocca di Papa	1350	11 ^h 29 ^m 10 ^s (1)	64 ^s	21,0	274 ^s	4,9	199	6,9
Roma	1370	11 29 20	74	18,5	284	4,9	209	6,5
Siena	1450	11 29 36	90	16,1	300	4,8	225	6,4
Firenze	1470	11 29 0	54	27,2	264	5,6	189	7,8
Pavia	1650	11 30 37	151	10,9	361	4,6	286	5,8

Da questa tabella risultano la velocità media 18,1 km. a secondo in base all'ora fornita dall'Osservatorio meteorologico di Costantinopoli e le velocità $4,96 \pm 0,17$ e $6,68 \pm 0,33$ in base alle ore fornite dai due pendoli fermati. La prima è da escludersi per le ragioni già dette, e perchè non si conosce alcun corpo solido in cui la velocità di un moto ondulatorio qualsiasi arrivi a quel valore. Le altre due sono da accettarsi, ma fra queste è da preferire la prima perchè ottenuta in base all'ora più attendibile per la ragione di sopra esposta.

« Potrebbe nascere il dubbio che io avessi scelto le cinque stazioni della tabella superiore per ottenere più facilmente l'intento desiderato. A rimuovere questo dubbio presento qui un'altra tabella in cui tengo conto di tutti i dati, nessuno escluso, forniti dal Supplemento 109 dell'Ufficio centrale di meteorologia e geodinamica. In questa tabella, per amore di brevità, tralascio i risultati che si ottengono basandosi sull'ora fornita dall'Osservatorio di Costantinopoli, e mi attengo solo a quelli che si hanno in base alle ore dei

(1) Quest'ora non è quella che trovasi nel suppl. 109 del Bollettino dell'U. C. di meteorologia e geodinamica, ma quella che corrisponde ai primi tremiti che ho scoperto in seguito nel diagramma dopo averlo esaminato con una lente d'ingrandimento.

due pendoli fermati, poichè, come abbiamo già visto, queste sono più prossime al vero.

STAZIONI	Distanze dall'epicentro in chilometri	Ora di arrivo delle prime ondulazioni	Differenze di tempo in secondi rispetto al pendolo A	Velocità che se ne deduce	Differenze di tempo in secondi rispetto al pendolo B	Velocità che se ne deduce
Benevento . . .	1200	11 ^h 27 ^m 5 ^s	144	8,3	69	17,4
Ischia	1250	11 31 27	411	3,0	336	3,7
Catania	1260	11 34	564	2,2	489	2,7
Mineo	1300	11 27 35	179	7,2	104	12,5
Rocca di Papa . . .	1350	11 29 10	274	4,9	199	6,9
Roma	1370	11 29 20	284	4,9	209	6,5
Spinea	1440	11 33 59	563	2,6	488	3,0
Siena	1450	11 29 36	300	4,8	225	6,4
Padova	1460	11 31 55	439	3,3	364	4,0
Firenze	1470	11 29	264	5,6	189	7,8
Piacenza	1590	11 35	624	2,5	549	2,9
Pavia	1650	11 30 37	361	4,6	286	5,8

« La velocità media che risulta da questa tabella è $4,49 \pm 0,55$ km. a secondo in base all'ora del pendolo A; $6,63 \pm 1,26$ km. a secondo in base all'ora del pendolo B.

« Abbiamo dunque dalle stazioni estere la velocità di propagazione 2,3 e dalle stazioni italiane quella di 4,9 km. a secondo.

« I dati orari forniti dalle cinque stazioni della penultima tabella sono abbastanza sicuri, quelli poi di Roma e di Rocca di Papa stazioni che hanno direttamente il tempo campione, sono affatto ineccepibili; come possono dunque conciliarsi i due valori trovati l'uno presso a poco doppio dell'altro? È molto facile il conciliarli se si rifletta che gli strumenti da cui si è ottenuta l'ora, nelle stazioni estere non sono strumenti adatti allo studio di qualunque movimento di terreno. Essi sono pendoli orizzontali e magnetografi. Questi apparecchi, avendo un ritmo di oscillazione piuttosto lungo, poco si prestano per registrare le onde longitudinali le quali, avendo un breve ritmo di vibrazione, sono registrate da strumenti basati sul principio della massa sta-

zionaria. Le stazioni estere adunque hanno registrato le ondulazioni di ritmo lento, che chiamo trasversali e che hanno la lunghezza di parecchie decine di chilometri; le stazioni italiane invece prima di segnalare o di registrare le ondulazioni trasversali hanno registrato le ondulazioni longitudinali che si propagano con una velocità doppia di quella delle altre. Che se poi prendiamo in considerazione le ore corrispondenti all'arrivo delle onde trasversali nelle stazioni italiane, ritroviamo presso a poco il medesimo risultato che si è avuto per le stazioni estere.

« Che poi si tratti realmente di moti ondulatori di genere diverso, e non di un solo moto ondulatorio piccolo da principio e che poi vada mano mano ingrandendosi, lo deduco anzitutto dai diagrammi che si ottengono dai sismometrografi e specialmente da quelli collocati in grandi e bassi edifici ove perciò non sia da temere la sovrapposizione del moto ondulatorio proprio del fabbricato. In questi diagrammi il distacco fra le due specie di movimenti, specialmente in alcuni casi, è spiccatissimo. Per citare qualche esempio dirò che, col mio sismometrografo in Rocca di Papa, nel caso del terremoto giapponese del 22 marzo scorso, ottenni un diagramma in cui le onde longitudinali, che aveano sulla carta 0,5 mm. di larghezza, precedevano a grande intervallo le onde trasversali che giunsero sulla carta a 10,0 mm. di larghezza. Mentre le prime erano tutte di ritmo brevissimo e costante, le altre aveano l'enorme e pur costante ritmo di 17 secondi. Nel caso del terremoto del 10 luglio scorso a Costantinopoli, mentre le onde longitudinali non si vedono nel mio diagramma senza ricorrere al microscopio, le onde trasversali nel diagramma hanno la larghezza di 12 millimetri. Nel diagramma di questo medesimo terremoto, fornitomi gentilmente dal dott. Oddone reggente dell'osservatorio di Pavia, il distacco è marcatissimo, specialmente nella componente N-S, perchè mentre le onde del 1° sistema hanno la larghezza di circa un millimetro, quelle dell'altro sistema hanno la lunghezza di parecchi centimetri. In secondo luogo poi dobbiamo di necessità ammettere i due differenti sistemi di onde perchè se si trattasse di un solo sistema le stazioni estere sopracitate, a parità di condizioni avrebbero dovuto segnalare tanto meglio il primo giungere del moto ondulatorio quanto più vicine all'epicentro; da ciò ne sarebbe derivato che le cifre della velocità sarebbero dovute andare scemando col crescere della distanza dal centro, abbiamo visto invece che nulla avviene di tutto questo.

« In conclusione, a me sembra che oramai non possa più mettersi in dubbio nei terremoti la presenza di due diversi sistemi di onde. Le prime a ritmo breve e più difficili a venir registrate, specialmente dai pendoli orizzontali e dai magnetografi, si propagano colla velocità di 4,5 a 5,0 chilom. a secondo; le altre a periodo lentissimo, che sono di molti chilometri di lunghezza e di parecchi decimetri di altezza, si propagano colla velocità di 2,2 a 2,5 chilom. a secondo.

« E qui mi torna opportuno richiamare ciò che già scrissi nella Memoria citata, che cioè questi due valori per le velocità li ritroveremo ogni volta che si tratti di distanze tali, come quelle delle tabelle su esposte, per le quali non abbia più influenza la profondità dell'ipocentro e la varia costituzione dei terreni. Nelle aree epicentrali o nelle loro vicinanze, si potranno trovare, evidentemente per varie ragioni, cifre assai diverse ».

Mineralogia. — *Appunti di mineralogia italiana.* — *Antimonite di Cetine.* Nota di E. ARTINI, presentata a nome del Socio STRUEVER.

« La miniera detta delle Cetine di Cotorniano, presso Rosia, in Provincia di Siena, fu aperta nel 1878 ⁽¹⁾, e il Museo Civico di Milano possiede già dal 1881 due grandi esemplari di antimonite di questa località, dono del sig. C. Scaniglia. I cristalli hanno dimensioni relativamente notevoli, cioè fino a 6 centimetri di lunghezza per 1 1/2 cent. di grossezza; sono piantati sulla matrice per una estremità dell'asse delle *z*, e spesso terminati all'altra estremità da facce di piramide relativamente ben definite; ma disgraziatamente, come quelli di Pereta, sono profondamente alterati.

« Recentemente però, per mezzo del sig. G. D'Anna, il nostro Museo è venuto in possesso di un interessante esemplare della stessa miniera, nel quale l'antimonite è affatto inalterata, e si presenta in cristallini alquanto più piccoli, ma brillantissimi, e spesso terminati perfettamente. Ho creduto utile sottoporre a misure goniometriche alcuni tra i più splendidi, tanto più che, per quanto io sappia, è questa la prima volta che un'antimonite di località italiana può venir fatta oggetto di studio cristallografico.

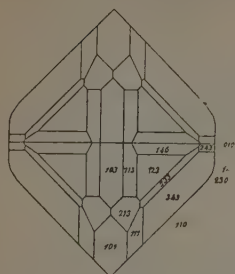
« Le forme osservate sono le seguenti:

$$\begin{array}{ccccccc} b & m & d & i & z & L & \sigma \\ \{010\}, \{110\}, \{230\}, \{140\}, \{101\}, \{103\}, \{213\}, \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} p & s & \tau & \sigma_3 & \sigma_4 & e & \psi \\ \{111\}, \{113\}, \{343\}, \{233\}, \{243\}, \{123\}, \{146\}. \end{array}$$

« Nessuna di tali forme è nuova per l'antimonite.

⁽¹⁾ Non è perciò menzionata questa località nella « Mineralogia della Toscana » del D'Achiardi, vol. II, 1873. Questo autore in fatto di antimonite ben cristallizzata cita solo quella di Pereta, in prov. di Grosseto; egli osservò solo cristalli rotti alle estremità, con le forme $\{010\}$, $\{110\}$, $\{130\}$, $\{350\}$: il Coquand invece avrebbe visto grossi cristalli terminati, che presentavano anche le $\{100\}$, $\{111\}$.



« I cristallini, sempre prismatici allungati secondo [001], presentano talvolta anche la combinazione di tutte le forme sopra elencate (fig. 1); le {243} e {230} mancano talora; rara è soltanto la {111}, che fu anzi osservata sopra un solo cristallo.

« Il pinacoide {010} è sempre discretamente sviluppato, e con facce molto meno striate che non siano quelle dei tre prismi verticali, dei quali {110} è quello che ha facce di gran lunga più ampie. Sarebbe stato forse possibile trovare anche talune altre forme nella

zona verticale, ma ho creduto buon consiglio tener conto solo di quelle facce che si presentavano ben riconoscibili alla lente semplice, e per le quali potei constatare che stavano almeno in un'altra zona, oltre la verticale.

« I due prismi {101} e {103} hanno facce brillantissime, e affatto piane. Del pari le facce di piramide sono sempre bellissime, e si misurano egregiamente, anche quando sono relativamente di poca estensione; solo la {146} ha facce leggermente striate parallelamente allo spigolo [032], e la {243} si presenta con faccette piccole, e talora un po'curve. Di tutte le piramidi osservate, quella che ha il maggiore sviluppo è la {343}, e, subordinatamente, {123} e {113}. Ne deriva un tipo di combinazione che è abbastanza diverso da quelli ordinari della antimonite, e specialmente è notevole la assoluta rarità della piramide fondamentale {111}. Tra i cristalli di antimonite finora studiati non ne conosco altri che presentino un così grande sviluppo della piramide {343}, se non quelli rappresentati nelle fig. 18-22 della Monografia del Krenner ⁽¹⁾ provenienti da una drusa di Felsöbánya: questi infatti sono terminati all'estremità da sole facce di {343}, senz'altra piramide.

« I risultati delle mie misure sono esposti nella seguente tabella, accanto ai valori relativi, calcolati dalle costanti determinate dal Dana ⁽²⁾ per l'antimonite del Giappone:

⁽¹⁾ Krystallographische Studien über den Antimonit. - Sitzb. d. K. Akad. der Wiss., Wien 1865, vol. 51, I, pag. 468.

⁽²⁾ Edw. S. Dana. - On the Stibnite from Japan. - The Amer. Journ. of Science 3^a ser. vol. XXVI, n. 153, a. 1883, pag. 214.

$$a : b : c = 0.99257 : 1 : 1.01788$$

Spigoli misurati	Angoli trovati (Limiti)	Numero delle osservaz. ¹	Angoli trovati (Medie)	Angoli calcolati
(110). (010)	44.54' — 45.22'	3	45.7'	45.18'
(230). (010)	—	1	34.34	33.53
(230). (233)	—	1	39.21	39.12
(140). (010)	13.47 — 14.12	2	13.59 $\frac{1}{2}$	14.8
(140). (103)	—	1	85.27	85.28
(140). (146)	—	1	55.4	55.1
(140). (123)	—	1	54.1	53.49
(140). (343)	—	1	37.32	37.27
(140). (146)	—	1	59.39	59.40
(101). (101)	91.21 — 91.22	2	91.21 $\frac{1}{2}$	91.27
(103). (101)	26.48 — 26.52	4	26.50	26.51
(103). (101)	—	1	64.33	64.36
(103). (103)	37.41 — 37.50	2	37.45 $\frac{1}{2}$	37.45
(103). (110)	—	1	76.48	76.44
(213). (010)	74.16 — 74.26	3	74.21	74.21
(213). (110)	54.37 — 54.50	2	54.43 $\frac{1}{2}$	54.51
(213). (103)	—	1	21.53	21.53
(213). (113)	14.56 — 15.3	2	14.59 $\frac{1}{2}$	14.59
(213). (233)	24.12 — 24.18	2	24.15	24.24
(213). (253)	55.40 — 55.43	2	55.41 $\frac{1}{2}$	55.41
(213). (113)	—	1	62.10	62.12
(111). (101)	35.14 — 35.29	2	35.21 $\frac{1}{2}$	35.24
(111). (113)	29.33 — 30.13	2	29.53	29.36
(111). (233)	10.20 — 10.39	2	10.29 $\frac{1}{2}$	10.6
(111). (343)	—	1	7.52	8.3
(113). (010)	72.4 — 72.18	5	72.13	72.12
(113). (103)	17.39 — 17.50	7	17.43	17.48
(113). (103)	—	1	41.9	41.9
(113). (113)	—	1	35.33	35.36
(113). (113)	35.51 — 35.54	3	35.52	35.52
(113). (113)	—	1	51.2	51.26
(113). (123)	14.39 — 15.3	6	14.48	14.54
(343). (010)	46.14 — 46.40	4	46.26	46.33
(343). (110)	31.15 — 31.26	4	31.22	31.25
(343). (101)	43.1 — 43.57	6	43.29	43.27
(343). (343)	—	1	86.58	86.55

Spigoli misurati	Angoli trovati (Limiti)	Numero delle osservaz. ¹	Angoli trovati (Medie)	Angoli calcolati
(343). (343)	62.18 ⁰ — 62.43 ⁰	3	62.31 ⁰	62.38 ⁰
(233). (010)	49.43 — 50.4	4	49.53	49.58
(233). (233)	—	1	80.6	80.5
(233). (233)	50.59 — 51.19	4	51.15	51.12
(233). (343)	8.58 — 9.17	4	9.8	9.8
(243). (010)	41.21 — 41.42	3	41.31	41.45
(243). (243)	—	1	44.00	44.9
(243). (343)	8.56 — 9.13	3	9.5	9.14
(243). (233)	—	1	8.29	8.13
(123). (010)	57.9 — 57.30	5	57.20	57.18
(123). (103)	48.6 — 48.7	2	48.6 $\frac{1}{2}$	48.17
(123). (123)	31.23 — 31.38	3	31.32	31.35
(123). (233)	14.28 — 14.43	4	14.34	14.26
(146). (010)	56.16 — 56.20	3	56.18	56.13
(146). (103)	—	1	34.45	34.51 $\frac{1}{2}$
(146). (146)	—	1	16.17	16.6
(146). (113)	—	1	17.51	17.58
(146). (123)	7.40 — 7.49	4	7.43	7.45

« L'antimonite nell'esemplare in questione è su matrice di quarzo compatto, e accompagnata qua e là da cristallini minuti e imperfettamente sviluppati di quarzo, calcite e gesso; di quest'ultimo minerale tengo anzi un altro più piccolo esemplare, con pochi cristalli, non molto ben definiti, ma assai più grossi e limpidissimi.

« Per quanto poi riguarda la giacitura, non è, credo, inutile, riportare quanto ne scrive l'ing. Fabri: « Il giacimento è costituito da un potente ammasso lenticolare, quarzoso e antimonifero, che trovasi al letto di una formazione calcarea, riferita al retico. In basso succedono degli scisti silicei, permiani, che più lungi diventano argillosi, micacei. L'ammasso quarzoso, in alto presso il calcare, racchiude molte vene di calcite, aragonite e gesso, e cambiando di natura passa gradatamente alla calcarea. Anzi vi si trovano delle lenti di calcare, e in queste, come nella massa di calcare presso il giacimento, si trovano delle altre lenti di quarzo antimonifero. Il minerale, costituito dalla stibina con prevalenza, vi è sparso in noduli, geodi, macchie, e piccole lenti; e in alcune spaccature della roccia si presenta, per lo più allo stato di ossido, in vene e in forma di incrostazioni » (1).

(1) Annali di Agricoltura, 1890. — Rivista del Serv.^o Minerario nel 1888, pag. 113.

INDICE DEL VOLUME III, SERIE 5^a. — RENDICONTI

1894 — 2° SEMESTRE.

INDICE PER AUTORI

A

AGAMENNONE. « Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto andaluso del 25 dicembre 1884 ». 303.

— « Velocità superficiale di propagazione delle onde sismiche, in occasione della grande scossa di terremoto dell'Andalusia del 25 dicembre 1884 ». 317.

— « Sulla variazione di velocità di propagazione dei terremoti, attribuita alle onde trasversali e longitudinali ». 372; 401.

DETTO e BONETTI. « Ulteriori esperienze sopra un nuovo tipo d'igrometro ». 23.

ALVISI. « Osservazioni sulle relazioni tra il peso molecolare e la densità nei corpi solidi e liquidi. — Sali alogenati ». 311; 376.

ANDREOCCI. — V. *Cannizzaro*.

ANGELI. « Azione dell'acido nitroso sopra l'amminouracile e sopra l'amminoacetone ». 72.

DETTO e MALAGNINI. « Sopra la configurazione di alcune gliossime ». 37.

ARNÒ. « Sull'impiego dell'elettrometro a quadranti come strumento differenziale ». 152.

— « Sul ritardo della polarizzazione nei dielettrici ». 294.

ARTINI. « Appunti di mineralogia italiana. Antimonite di Cetine ». 373; 416.

ASCOLI e LORI. « Sulla distribuzione del magnetismo indotto nel ferro ». 157.

— « Sopra il fattore smagnetizzante nei cilindri di ferro ». 190.

B

VON BAEYER. È eletto Socio straniero. 76.

— Ringrazia. 312.

— Ringrazia l'Accademia per le onoranze tributate a suo padre. 390.

BALBIANO. « Sull'ossidazione dell'acido canforico ». 282.

BESSE. « Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche ». 368; 393.

BIANCHI. « Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso ». 77.

BIGINELLI. « Nuova sintesi di Cumarine ». 311; 344.

BLASERNA (Segretario). Dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti. 313.

— Presenta le lettere di ringraziamento dei Soci di nomina recente. 312.

— Presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: *Arcangeli, Millosevich, Nasini, Veronese, Cayley, Klein, Lévy, Poincaré*. 312; *Noether*. 390. *Righi*. 358; dai signori: *Reina, Cesàro*. 358.

— Presenta una pubblicazione del defunto Socio straniero prof. *Hertz*; un volume

della Società Reale di Londra; un volume delle « Opere » di Fermat, e un fascicolo del Principe di Monaco. 312.

— Comunica l'elenco dei lavori presentati al concorso *Santoro* pel 1894. 313.

— È riconfermato Segretario per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 391.

BOERIS. — V. *Ciamician*.

BRUGNATELLI. « Osservazioni cristallografiche sull'acido picrico ». 196.

C

CAMPETTI. « Sulle determinazioni delle costanti dielettriche col mezzo delle oscillazioni rapide ». 16.

CANCANI. « Intorno ad alcune obiezioni relative alla velocità di propagazione delle onde sismiche ». 30.

— « Sulle due velocità di propagazione del terremoto di Costantinopoli del 10 luglio 1894. 409.

CANDIANI. « Sul trisolfuro di etenile ». 311; 339.

CANNIZZARO e ANDREOCCHI. « Studio del dimetilnaftol ». 359.

CANTONE. « Sull'attrito interno del nichel ». 122.

CAPELLINI. Fa omaggio di una sua pubblicazione. 390.

— « Di alcuni fossili controversi riferiti a erinoidi, foraminiferi, vermi e corollari ». 362.

CARRARA. « Sulle Selenetino. Nuova serie di composti del Selenio ». 32.

— « Dissociazione elettrolitica e legge della diluizione nei solventi organici ». 311; 384.

DETTO e GENNARI. « Ancora sulla dissociazione elettrolitica in relazione col potere rotatorio ottico ». 311; 325.

CESÀRO. « Sulle equazioni dell'elasticità negli iperspazii ». 290.

CIAMICIAN e BOERIS. « Sulla costituzione delle idrochinoline, considerazioni ed esperienze intorno alla struttura dei nuclei azotati ». 84.

COSSA. « Sui composti di platosodiammina ». 360.

CROSA. — V. *Paternò*.

D

DE PAOLIS. « Teoria generale delle corrispondenze proiettive a degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni ». 225.

DEL RE. « Sulle superficie del 5° ordine con 5 punti tripli ed una cubica doppia ». 11.

DE SANCTIS. « Sull'esistenza della Coniina nel *Sambucus nigra* ». 311; 373,

F

FANO. « Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari ». 401.

— « Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari che con queste curve si possono rappresentare ». 401.

FERRERO. Rende conto delle onoranze tributate al defunto Socio straniero generale *von Baeyer*. 390.

FOLGHERAITER. « Origine del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio ». 53.

— « Distribuzione del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio ». 117.

— « Orientazione ed intensità del magnetismo permanente nelle rocce vulcaniche del Lazio ». 165.

FONTANA. « Sulla dilatazione termica dei bronzi di alluminio ». 129.

G

GARELLI. « Sui punti di congelamento di miscugli isomorfi ». 97.

GIORGIS. « Sul carbonato acido di tallio ». 104.

GRABLOVITZ. « Sulle indicazioni strumentali del terremoto giapponese del 22 marzo 1894 ». 61.

GUGLIELMO. « Intorno ad una modificazione della bilancia di Mohr e ad un semplice apparato per la misura del volume dei solidi ». 299.

H

- HALL. È eletto Socio straniero. 76. — Ringrazia. 312.
 von HELMHOLTZ. Annuncio della sua morte. 203; 312.

L

- LEONCINI. « Sopra alcune trasformazioni delle equazioni della dinamica del punto ». 3.

M

- MARCHETTI. « Sopra un nuovo alcool della lanolina ». 311; 352.
 MAZZARELLI. « Sull'origine del simpatico nei Vertebrati ». 269.
 MILLOSEVICH. « Osservazioni ed elementi ellittici di (303) Josephina in IV opposizione ». 281.
 MONTEMARTINI. — V. *Paternò*.

P

- PATERNÒ. « Sul polimero dell'epicloridrina ». 278.
 ID. e MONTEMARTINI. « Il paraxilene quale solvente nelle ricerche crioscopiche ». 175.
 — Sulle variazioni di volume nei miscugli dei liquidi, in relazione al comportamento crioscopico ». 139.
 — « Sul massimo abbassamento nella temperatura di congelamento dei miscugli ». 215*.
 ID. e CROSA. « Ricerche sulla Sordidina ». 256.
 PELLIZZARI. « Nuova sintesi del triazolo e dei suoi derivati ». 67.
 PICCINI. È eletto Corrispondente. 76. — Ringrazia. 312.
 PIERPAOLI. « Variazione sull'altezza di un corista prodotta dalla magnetizzazione ». 368.

PIROTTA. « Sulla germinazione e sulla struttura della piantina della Keteleeria Fortunei (Murr.) Carr ». 286.

- PITTARELLI. « Sulle assintotiche delle rigate contenute in una congruenza lineare ». 111.
 — « Altre osservazioni assintotiche delle rigate appartenenti ad una congruenza lineare ». 148.
 — « Le assintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque, che fanno parte di una congruenza lineare ». 229.
 — « Correzioni alla Nota: Sulle linee assintotiche di una classe di superficie gobbe di genere zero ». 264.
 PRESTWICH. È eletto Socio straniero. 76. — Ringrazia. 312.
 PRINGSHEIM. Annuncio della sua morte. 274; 312.

R

- RICCI. « Dell'equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie che appartengono ad un sistema triplo ortogonale ». 93.
 ROWLAND. È eletto Socio straniero. 76. — Ringrazia. 312.

S

- SEGRE. « Nota ad un lavoro del prof. De Paolis ». 227.
 SELLA. « Sui corpi di massima attrazione ». 47.
 SIACCI. « Sulle tensioni di un sistema elastico articolato ». 205; 245.
 SIMONELLI. « Appunti sulla costituzione geologica dell'isola di Candia ». 236.
 — « Appunti sopra i terreni neogenici e quaternari dell'isola di Candia ». 265.

T

- TACCHINI. È eletto Socio nazionale. 76. — Ringrazia. 312.
 — « Terremoto calabro-messinese del 16 novembre 1894 ». 275.

TACCHINI. « Sulla registrazione a Roma del terremoto calabro-messinese del 16 novembre 1894 » n. 365.

TODARO. Fa omaggio di una pubblicazione da lui diretta e ne discorre » n. 312.

TOMMASI-CRUDELI. È riconfermato Segretario aggiunto per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 391.

Z

ZAMBIASI. « La legge degli stati corrispondenti e i metodi di misura degli elementi critici » n. 184.

ZOPPELLARI. « Sulla rifrazione atomica del selenio » n. 311; 330.

INDICE PER MATERIE

A

- ANATOMIA. Sull'origine del simpatico nei Vertebrati. *G. Mazzarelli*. 269.
- ASTRONOMIA. Osservazioni ed elementi ellittici di (303) Josephina in IV opposizione. *E. Millosevich*. 281.

B

- BOTANICA. Sulla germinazione e sulla struttura della piantina della *Keteleeria Fortunei* (Murr.) Carr. *R. Pirotta*. 286.

C

- CHIMICA. Osservazioni sulle relazioni tra il peso molecolare e la densità ne' corpi solidi e liquidi. — Sali alogenati. *U. Alvisi*. 311; 376.
- Azione dell'acido nitroso sopra l'amminouracile e sopra l'amminoacetone. *A. Angeli*. 72.
- Sopra la configurazione di alcune glicosime. *Id. e Malagnini*. 37.
- Sull'ossidazione dell'acido canforico. *L. Balbiano*. 282.
- Nuova sintesi di Cumarine. *P. Biginelli*. 311; 344.
- Sul trisolfuro di etenile. *P. Candiani*. 311; 339.
- Studio del dimetilnaftol. *S. Cannizzaro e A. Andreocci*. 359.
- Sulle Selenetine. Nuova serie di composti del Selenio. *G. Carrara*. 32.
- Sulla costituzione delle idrochinoline, considerazioni ed esperienze intorno alla struttura dei nuclei azotati. *G. Ciamician e G. Boeris*. 84.

CHIMICA. Sui composti di platosodiammina. *A. Cossa*. 360.

- Sull'esistenza della Coniina nel *Sam-bucus nigra*. *G. De Sanctis*. 311 373.
- Sui punti di congelamento di miscugli isomorfi. *F. Garelli*. 97.
- Sul carbonato acido di tallio. *G. Giorgis*. 104.
- Sopra un nuovo alcool della Lanolina. *G. Marchetti*. 311; 352.
- Sul polimero dell'epicloridrina. *E. Paternò*. 278.
- Il paraxilene quale solvente nelle ricerche crioscopiche. *E. Paternò e C. Montemartini*. 175.
- Sulle variazioni di volume nei miscugli dei liquidi, in relazione al comportamento crioscopico. *Id. Id.* 139.
- Sul massimo abbassamento nella temperatura di congelamento dei miscugli. *Id. Id.* 215.
- Ricerche sulla Sordidina. *Id. e F. Crosa*. 256.
- Nuova sintesi del triazolo e dei suoi derivati. *G. Pellizzari*. 67.

CHIMICA-FISICA. Dissociazione elettrolitica e legge della diluizione nei solventi organici. *G. Carrara*. 311; 384.

- Ancora sulla dissociazione elettrolitica in relazione col potere rotatorio ottico. *Id. e G. Gennari*. 311; 325.
- Sulla rifrazione atomica del Selenio. *I. Zoppellari*. 311; 330.

Concorsi a premi. Elenco dei lavori presentati al concorso *Santoro* pel 1894. 44; 313.

Corrispondenza relativa al cambio degli Atti. 44; 203; 236.

CRISTALLOGRAFIA. Osservazioni cristallografiche.

grafiche sull'acido picrico. *L. Brugnattelli*. 196.

E

ELETTRICITÀ. Sull'impiego dell'elettrometro a quadranti come strumento differenziale. *R. Arndt*. 152.

— Sul ritardo della polarizzazione nei dielettrici. *Id.* 294.

— Sulla determinazione delle costanti dielettriche col mezzo delle oscillazioni rapide. *A. Campetti*. 16.

Elezioni di Soci. 76.

— del Segretario e del Segretario aggiunto per la Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. 391.

F

FISICA TERRESTRE. Alcune considerazioni sui differenti metodi fino ad oggi adoperati nel calcolare la velocità di propagazione del terremoto andaluse del 25 dicembre 1894. *G. Agamennone*. 303.

— Velocità superficiale di propagazione delle onde sismiche, in occasione della grande scossa di terremoto dell'Andalusia del 25 dicembre 1884. *Id.* 317.

— Sulla variazione di velocità di propagazione dei terremoti, attribuita alle onde trasversali e longitudinali. *Id.* 372 ; 401.

— Ulteriori esperienze sopra un nuovo tipo d'igrometro. *Id.* e *Bonatti*. 23.

— Intorno ad alcune obiezioni relative alla velocità di propagazione delle onde sismiche. *A. Cancani*. 30.

— Sulle due velocità di propagazione del terremoto di Costantinopoli del 10 luglio 1894. *Id.* 409.

— Origine del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio. *G. Folgheraiter*. 53.

— Distribuzione del magnetismo nelle rocce vulcaniche del Lazio. *Id.* 117.

— Orientazione ed intensità del magnetismo permanente nelle rocce vulcaniche del Lazio. *Id.* 165.

— Sulle indicazioni strumentali del terre-

moto giapponese del 22 marzo 1894. *G. Grablovitz*. 61.

— Terremoto calabro-messinese del 16 novembre 1894. *P. Tacchini*. 275.

— Sulla registrazione a Roma del terremoto calabro-messinese del 16 novembre 1894. *Id.* 365.

FISICA. Sulla distribuzione del magnetismo indotto nel ferro. *M. Ascoli* e *F. Lori*. 157.

— Sopra il fattore smagnetizzante nei cilindri di ferro. *Id. id.* 190.

— Sull'attrito interno del nichel. *M. Cantone*. 122.

— Sulla dilatazione termica dei bronzi di alluminio. *A. Fontana*. 129.

— Intorno ad una modificazione della bilancia di Mohr e ad un semplice apparato per la misura del volume dei solidi. *G. Guglielmo*. 299.

— Variazione sull'altezza di un corista prodotto dalla magnetizzazione. *N. Pierpaoli*. 368.

— La legge degli stati corrispondenti e i metodi di misura degli elementi critici. *G. Zambiasi*. 184.

G

GEOLOGIA. Appunti sulla costituzione geologica dell'isola di Candia. *V. Simionelli*. 236.

— Appunti sopra i terreni neogenici e quaternari dell'isola di Candia. *Id.* 265.

M

MATEMATICA. Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche. *D. Besso*. 368; 393.

— Sulle superficie i cui piani principali hanno costante il rapporto delle distanze da un punto fisso. *L. Bianchi*. 77.

— Teoria generale delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni. *R. De Paolis*. 225.

— Sulle superficie del 5° ordine con 5 punti

tripli ed una cubica doppia *A. Del Re*. 11.

MATEMATICA. Sopra alcune considerazioni geometriche che si collegano alla teoria delle equazioni differenziali lineari. *G. Fano*. 401.

— Sopra certe curve razionali di uno spazio qualunque, e sopra certe equazioni differenziali lineari che con queste curve si possono rappresentare. *Id.* 401.

— Sulle assintotiche delle rigate contenute in una congruenza lineare. *G. Pitarelli*. 111.

— Altre osservazioni assintotiche delle rigate appartenenti ad una congruenza lineare. *Id.* 148.

— Le assintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque, che fanno parte di una congruenza lineare. *Id.* 229.

— Correzione alla Nota: Sulle linee assintotiche di una classe di superficie gobbe di genere zero. *Id.* 264.

— Dell'equazione di condizione pei parametri dei sistemi di superficie che appartengono ad un sistema triplo-ortogonale. *G. Ricci*. 93.

MATEMATICA. Nota ad un lavoro del pro *De Paolis. C. Segre*. 227.

MECCANICA. Sull'equazioni dell'elasticità negli iperspazi. *E. Cesàro*. 290.

— Sopra alcune trasformazioni delle equazioni della dinamica del punto. *M. Leoncini*. 3.

— Sui corpi di massima attrazione. *A. Sella*. 47.

— Sulle tensioni di un sistema elastico articolato. *F. Siacci*. 205; 245.

MINERALOGIA. Appunti di mineralogia italiana. Antimonite di Cetine. *E. Artini*. 373; 416.

N

Necrologie. Annuncio della morte dei Soci stranieri: *von Helmholtz*. 203; 312. *Pringsheim*. 274; 312.

P

PALEONTOLOGIA. — Di alcuni fossili controversi riferiti a crinoidi, foraminiferi, vermi e corallari. *G. Capellini*. 362.

ERRATA CORRIGE

A pag.	312	lin.	22	invece di:	diretta	legg. diretto
"	366	"	1	"	18 ^h , 55 ^m , 50 ^s	" 18 ^h , 55 ^m , 30 ^s
"	"	"	5	"	1 ^m , 50 ^s	" 1 ^m , 5 ^s
"	"	"	30	"	18 ^h , 1 ^m , 51 ^s	" 18 ^h , 51 ^m , 51 ^s

